QUOZIENTE e TEOREMI di OMOMORFISMO e ISOMORFISMO.

In questi appunti viene presentata una breve sintesi sul concetto di quoziente, lavorando in una categoria i cui oggetti sono gruppi eventualmente con qualche altra struttura (gruppi, anelli, moduli su anelli o su gruppi) e i cui morfismi (omomorfismi di gruppi, di anelli, di moduli) conservano in particolare la struttura di gruppo: una categoria in cui ha quindi senso la nozione di nucleo (=controimmagine dell'elemento neutro per l'operazione di gruppo).

Osservazione 1
$f : X \to Y$ omorfismo $\Rightarrow$
  i) $Im(f) \subseteq Y$ è un sottogruppo/sottoanello/sottomodulo;
  ii) $ker(f) \subseteq X$ è un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo.

Lemma 2 (viceversa dell'Osservazione 1,ii): caratterizzazione dei nuclei degli omomorfismi)
$K \subseteq X$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo $\Rightarrow$
  $\exists f : X \to Y$ omomorfismo tale che $ker f = K$.
Dimostrazione:
Siano G un gruppo e $H \trianglelefteq G$ un sottogruppo normale; allora la relazione $\sim_H \subseteq G \times G$ definita da $g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$ è una relazione di equivalenza (verificare) e il prodotto $\cdot : G \times G \to G$ è compatibile con tale relazione (grazie alla normalità di H: verificare) quindi induce un prodotto $* : G/\sim_H \times G/\sim_H \to G/\sim_H$ che dota $G/\sim_H$ di una struttura di gruppo (verificare) tale che la proiezione $\pi : G \to G/\sim_H$ sia un omomorfismo di gruppi. È sufficiente allora osservare che

$$ker(\pi) = \{g \in G | e \sim_H g\} = H.$$

[Si osservi anche che:
  π è ovviamente suriettivo e
  per ogni $g \in G$ la classe di equivalenza di g è $gH = Hg$.]
Siano ora X un anello/modulo e $K \subseteq X$ un ideale/sottomodulo; allora $(X, +)$ è un gruppo abeliano e $K \trianglelefteq X$ è un sottogruppo normale, quindi la relazione di equivalenza definita sopra diventa $a \sim_K b \Leftrightarrow b - a \in K$ (e la classe di equivalenza di $x \in X$ è $x + K$) e il prodotto/prodotto per "scalari" definito su X è compatibile con $\sim_K$ (perché, oltre ad essere un sottogruppo additivo, K è un ideale/sottomodulo di X: verificare la compatibilità), dunque induce un prodotto/prodotto per "scalari" sul gruppo abeliano $X/\sim_K$ che dota $X/\sim_K$ di una struttura di anello/modulo (verificare) tale che la proiezione $\pi : X \to X/\sim_K$ sia un omomorfismo, ovviamente con nucleo ancora K.

Osservazione 3
$f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ omomorfismi $\Rightarrow g \circ f : X \to X''$ ha le seguenti proprietà:
  i) $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$;
  ii) $ker(f) \subseteq ker(g \circ f)$.

La PROPOSIZIONE seguente fornisce una descrizione completa delle condizioni sotto le quali un omomorfismo fattorizza tramite un altro, è quindi il viceversa dell'osservazione 3.

PROPOSIZIONE 4
$f' : X \to X'$, $f'' : X \to X''$ omomorfismi tali che $ker(f') \subseteq ker(f'') \Rightarrow$

i) $\exists! F : Im(f') \to X''$ tale che $f'' = F \circ f'$;
ii) F è tale che $Im(F) = Im(f'')$;
iii) F è tale che $ker(F) = f'(ker(f''))$.
[In particolare:
$F : Im(f') \to Im(f'')$ è suriettiva;
F è iniettiva se e solo se $ker(f') = ker(f'')$; in tal caso $F : Im(f') \cong Im(f'')$.]

Dimostrazione:
i) Unicità: $x' \in f'(X) \Rightarrow \exists x \in X$ tale che $x' = f'(x) \Rightarrow F(x') = F(f'(x)) = f''(x)$.
Esistenza: $x' = f'(x_1) = f'(x_2) \Rightarrow x_1^{-1}x_2 \in ker(f') \subseteq ker(f'') \Rightarrow f''(x_1) = f''(x_2)$; dunque la definizione $F(x') = f''(x)$ se $x' = f'(x)$ è ben posta; inoltre F è un omomorfismo perché f' e f'' lo sono.
ii) e iii) Ovvio.

Definizione 5
Sia $K \subseteq X$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo.
Si chiama quoziente di X per K il dato di:
i) un gruppo/anello/modulo $\bar{X}$ (chiamato *quoziente*) dotato di
ii) un omomorfismo suriettivo $\pi : X \to \bar{X}$ tale che $ker(\pi) = K$ (chiamato *proiezione sul quoziente*).

Teorema di esistenza e unicità del quoziente 6
$K \subseteq X$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo $\Rightarrow$
Il quoziente di X per K esiste ed è unico a meno di unico isomorfismo.
N.B. L'unicità a meno di isomorfismo significa che:
se $(\bar{X}, \pi : X \to \bar{X})$, $(\bar{X}', \pi' : X \to \bar{X}')$ sono due quozienti di X per K
allora esiste un unico omomorfismo $\gamma : \bar{X} \to \bar{X}'$ tale che $\pi' = \gamma \circ \pi$
e tale γ è un isomorfismo.
Notare che viceversa l'esistenza di un isomorfismo $\gamma : \bar{X} \to \bar{X}'$ tale che $\pi' = \gamma \circ \pi$ implica che π e π' hanno lo stesso nucleo e che π è suriettivo se e solo se π' lo è.

Notazione 7
Il quoziente di X per K si denota X/K.

Dimostrazione dell'esistenza:
Segue dal Lemma 2:
sia $f : X \to Y$ tale che $ker(f) = K$;
allora $(Im(f), f)$ è un quoziente di X per K.
[Osservazione: $X/\sim_K$ è (già) un quoziente di X per K.]

Dimostrazione dell'unicità:
L'unicità è la PROPOSIZIONE 4 con (X', f'), (X'', f'') quozienti di X per K.

Teorema di omomorfismo 8
Siano $K \subseteq X$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo, $f : X \to Y$ omomorfismo; allora $K \subseteq ker(f) \;\Rightarrow$
i) $\exists! \bar{f} : X/K \to Y$ tale che $f = \bar{f} \circ \pi$ ($\pi : X \to X/K$ è la proiezione sul quoziente);
ii) $\bar{f}$ è tale che $Im(\bar{f}) = Im(f)$ e $ker(\bar{f}) = \pi(ker(f))$ (cioè $ker(\bar{f}) = ker(f)/K$).
Si dice che f passa al quoziente e che $\bar{f}$ è l'omomorfismo indotto da f su X/K.

Dimostrazione:
La tesi è la PROPOSIZIONE 4 con $(X', f') = (X/K, \pi)$, $(X'', f'') = (Y, f)$.

Il teorema di omomorfismo è una caratterizzazione del quoziente. Vale cioè la seguente

Proposizione 9 (viceversa del teorema di omomorfismo)
Siano $K \subseteq X$ un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo e sia $\pi : X \to \bar{X}$ un omomorfismo tale che:

i) $K \subseteq ker(\pi)$;

ii) $\forall f : X \to Y$ omomorfismo tale che $K \subseteq ker(f)$ $\exists! \bar{f} : \bar{X} \to Y$ tale che $f = \bar{f} \circ \pi$.

Allora $(\bar{X}, \pi)$ è il quoziente di X per K.

Dimostrazione:
Le condizioni i) e ii) descrivono una proprietà universale, da cui segue l'unicità (a meno di unico isomorfismo) di $(\bar{X}, \pi)$ che soddisfa i) e ii). D'altra parte il teorema di omomorfismo dice che il quoziente di X per K soddisfa i) e ii), da cui la tesi.

In particolare le condizioni i) e ii) implicano che π è suriettiva e $ker(\pi) = K$.

Osservazione 10
Le condizioni i) e ii) della Proposizione 9 si chiamano *proprietà universale del quoziente* e lo caratterizzano, cioè forniscono una definizione equivalente di quoziente di X per K, dalla quale seguono l'unicità (per universalità) e la descrizione di nucleo e immagine della proiezione sul quoziente (*), cioè allo stesso tempo l'esistenza e l'equivalenza con la definizione data sopra.

1^o Teorema di isomorfismo 11
$f : X \to Y$ omomorfismo $\Rightarrow Im(f) \cong X/ker(f)$.

Dimostrazione:
Basta applicare il teorema di omomorfismo con $K = ker(f)$.

La definizione, l'esistenza e l'unicità del quoziente, il teorema di omomorfismo e il 1^o teorema di isomorfismo non sono altro che una sintesi e sistematizzazione della proprietà degli omomorfismi descritta nella PROPOSIZIONE 4.
Il secondo e il terzo teorema di isomorfismo discussi sotto descrivono i sottogruppi/sottoanelli/sottomoduli (secondo teorema di isomorfismo) e i quozienti (terzo teorema di isomorfismo) di gruppi/anelli/moduli, e sono entrambi applicazioni del primo teorema di isomorfismo.

Lemma 12
Siano:

X un gruppo/anello/modulo,

$K \subseteq X$ un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo,

$\pi : X \to X/K$ la proiezione sul quoziente,

$Y \subseteq X$ e $\bar{Y} \subseteq X/K$ sottoinsiemi.

Allora:

i) $\pi(\pi^{-1}(\bar{Y})) = \bar{Y}$;

ii) $\pi^{-1}(\pi(Y)) = Y + K (= \{y + k | y \in Y,\ k \in K\})$.

Dimostrazione:
i) segue dalla suriettività di π;
ii) È chiaro che $Y + K \subseteq \pi^{-1}(\pi(Y))$; viceversa

$$x \in \pi^{-1}(\pi(Y)) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y \in Y \text{ tale che } \pi(x) = \pi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y \in ker(\pi) = K \Rightarrow x = y + (x - y) \in Y + K.$$

2^o Teorema di isomorfismo 13
Siano:
X un gruppo/anello/modulo,
$K \subseteq X$ un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo,
$\pi : X \to X/K$ la proiezione sul quoziente,
$X' \subseteq X$ un sottogruppo/sottoanello/sottomodulo.
Allora:
i) $K \cap X' \subseteq X'$ è un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo;
ii) $X' + K \subseteq X$ è un sottogruppo/sottoanello/sottomodulo;
iii) $K \subseteq X' + K$ è un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo;
iv) $\pi(X') \cong X'/(K \cap X') \cong (X' + K)/K$.
Dimostrazione:
i), ii) e iii) sono semplici verifiche.
iv) si trova applicando il teorema di isomorfismo a:
$\pi\big|_{X'} : X' \to X/K$, osservando che $Im(\pi\big|_{X'}) = \pi(X')$ e $ker(\pi\big|_{X'}) = K \cap X'$;
$\pi\big|_{X'+K} : X'+K \to X/K$, osservando che $Im(\pi\big|_{X'+K}) = \pi(X')$ e $ker(\pi\big|_{X'+K}) = K$.

3^o Teorema di isomorfismo 14
Siano:
X un gruppo/anello/modulo,
$K \subseteq X$ un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo,
$\pi : X \to X/K$ la proiezione sul quoziente,
$\mathcal{K} = \{K' \subseteq X | K'$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo$\}$;
$\mathcal{K}_K = \{K' \in \mathcal{K} | K \subseteq K'\}$;
$\bar{\mathcal{K}} = \{\bar{K} \subseteq X/K | \bar{K}$ sottogruppo normale/ideale/sottomodulo$\}$.
Allora:
i) $\pi^{-1} : \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}_K$ è biunivoca e conserva l'inclusione;
ii) $\pi : \mathcal{K} \to \bar{\mathcal{K}}$ conserva l'inclusione e $\pi\big|_{\mathcal{K}_K} : \mathcal{K}_K \to \bar{\mathcal{K}}$ è l'inversa di $\pi^{-1} : \bar{\mathcal{K}} \to \mathcal{K}_K$;
iii) Per ogni $\bar{K} \in \bar{\mathcal{K}}$ si ha

$$(X/K)/\bar{K} \cong X/\pi^{-1}(\bar{K});$$

equivalentemente per ogni $K' \in \mathcal{K}_K$ si ha

$$(X/K)/(K'/K) \cong X/K'.$$

Dimostrazione:
i) e ii) È facile vedere che π^{-1} e π hanno effettivamente valore rispettivamente in $\mathcal{K}_K$ e $\bar{\mathcal{K}}$ (verificare; osservare che per concludere che $\pi(\mathcal{K}) \subseteq \bar{\mathcal{K}}$ serve la suriettività di π) ed è ovvio che conservano l'inclusione. Il lemma 12 implica anche immediatamente che $\pi \circ \pi^{-1} = id_{\bar{\mathcal{K}}}$ e che $\pi^{-1} \circ \pi\big|_{\mathcal{K}_K} = id_{\mathcal{K}_K}$.
iii) Che le due formulazioni siano equivalenti segue immediatamente da i) e ii).
Sia $K' \in \mathcal{K}_K$ e sia $\pi' : X \to X/K'$ la proiezione sul quoziente; allora π' induce $\bar{\pi}' : X/K \to X/K'$ suriettivo e con nucleo $\pi(K') = K'/K$. La tesi segue dal teorema di isomorfismo:

$$X/K' = Im(\bar{\pi}') \cong (X/K)/ker(\bar{\pi}') = (X/K)/(K'/K).$$

(*) **Proposizione 15**

Siano $X, \bar{X}$ gruppi/anelli/moduli, $K \subseteq X$ un sottogruppo normale/ideale/sottomodulo, $\pi : X \to \bar{X}$ un omomorfismo tale che

i) $K \subseteq ker(\pi)$;

ii) $\forall f : X \to Y$ omomorfismo tale che $K \subseteq ker(f)$ $\exists! \bar{f} : \bar{X} \to Y$ tale che $f = \bar{f} \circ \pi$.

Allora π è suriettivo e $ker(\pi) = K$.

Dimostrazione:

i) Che $ker(\pi) = K$ segue dal fatto che esiste $f : X \to Y$ tale che $ker(f) = K$, dunque $K = ker(f) = ker(\bar{f} \circ \pi) \supseteq ker(\pi)$.

ii) Siano $j : Im(\pi) \hookrightarrow \bar{X}$ l'inclusione e $p : X \to Im(\pi)$ tale che $\pi = j \circ p$ (quindi $ker(p) = ker(\pi) \supseteq K$), $\bar{p} : \bar{X} \to Im(\pi)$ tale che $p = \bar{p} \circ \pi$. Allora

$$\pi = j \circ p = j \circ \bar{p} \circ \pi;$$

l'unicità di $\bar{f}$ per $f = \pi$ implica $j \circ p = id_{\bar{X}}$ da cui $Im(p) = Im(j) = \bar{X}$, cioè p suriettivo.

Osservazione 16

La proprietà universale del quoziente $(X/K, \pi)$ è equivalente alla formulazione seguente:

per ogni Y la funzione

$$Hom(X/K, Y) \to Hom(X, Y) \ \text{ definita da } \ \bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \pi$$

è iniettava con immagine $\{f : X \to Y | K \subseteq ker(f)\}$.

Si osservi anche che π corrisponde a $id_{X/K}$.