Moduli su anelli - esercizi (Damiani)
Moduli irriducibili, indecomponibili, ciclici

In questi esercizi A è un anello unitario.

1) Sia M un A-modulo.
Dimostrare che M è ciclico se e solo se esiste $I \subseteq A$ ideale (sinistro) tale che $M \cong A/I$; se M è ciclico generato da x descrivere esplicitamente l'isomorfismo $A/I \to M$ e il legame tra tale isomorfismo e x.

2) Un A-modulo M si dice irriducibile se $M \neq 0$ e se M non possiede A-sottomoduli non banali, cioè se

$$N \subseteq M \quad A\text{−sottomodulo} \ \Rightarrow N = 0 \text{ oppure } N = M.$$

i) Dimostrare che se M è irriducibile allora M è ciclico.
ii) Più precisamente dimostrare che se M è irriducibile e $x \in M \setminus \{0\}$ allora $M = Ax$.
iii) Dimostrare che se $A = K$ è un campo un A-modulo è irriducibile se e solo se è ciclico.
iv) Esibire esempi di A-moduli irriducibili e di A-moduli ciclici non irriducibili.

3) Sia $I \subseteq A$ un ideale (sinistro). Determinare condizioni su I affinché A/I sia un A-modulo irriducibile.

4) Sia A un dominio a ideali principali. Caratterizzare gli $a \in A$ tali che $A/(a)$ sia un A-modulo irriducibile.

5) Siano p, q primi distinti e sia $A = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Osservare che gli A-moduli sono i gruppi abeliani G in cui $o(g)|pq$ per ogni $g \in G$.
i) Per quali $m \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è un A-modulo?
ii) Dimostrare che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sono A-moduli irriducibili non isomorfi tra loro.
iii) Esistono A-moduli irriducibili diversi da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?
iv) Dimostrare che $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ è un A-modulo ciclico ma non irriducibile.
v) Dimostrare che ogni A-modulo finitamente generato è finito.
vi) Dimostrare che per ogni A-modulo G esistono unici $G_p, G_q \subseteq G$ A-sottomoduli tali che $o(g)|p$ per ogni $g \in G_p$, $o(g)|q$ per ogni $g \in G_q$ e $G \cong G_p \oplus G_q$; determinare $o(g)$ per $g \in G \setminus (G_p \cup G_q)$; determinare G_p e G_q nel caso $G = A$.

vii) Con le notazioni del punto vi) dimostrare che la struttura di A-modulo induce su G_p una struttura di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-spazio vettoriale ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong A/(p)$) e su G_q una struttura di $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-spazio vettoriale.
viii) Dimostrare che per ogni A-modulo finito G esistono unici $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m \oplus (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$.

6) Sia $p \in \mathbb{Z}$ primo e sia $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Osservare che gli A-moduli sono i gruppi abeliani G in cui $o(g)|p^2$ per ogni $g \in G$.
i) Per quali $m \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è un A-modulo?
ii) Dimostrare che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è un A-modulo irriducibile; ce ne sono altri?
iii) Dimostrare che $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ è un A-modulo ciclico ma non irriducibile: è somma diretta di irriducibili?

7) Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$. Osservare che un A-modulo è un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale V con un endomorfismo $f \in End_{\mathbb{Q}}(V)$ tale che $f^2 = id_V$.
i) Dimostrare che $(\mathbb{Q}, id)$ è un A-modulo (si indichi tale modulo con $\mathbb{Q}_1$).
ii) Dimostrare che $(\mathbb{Q}, -id)$ è un A-modulo (si indichi tale modulo con $\mathbb{Q}_{-1}$).
iii) Dimostrare che $\mathbb{Q}_1$ e $\mathbb{Q}_{-1}$ sono A-moduli irriducibili.
iv) Dimostrare che $\mathbb{Q}_1$ e $\mathbb{Q}_{-1}$ sono A-moduli non isomorfi.
v) Dimostrare che $\mathbb{Q}_1$ e $\mathbb{Q}_{-1}$ sono gli unici A-moduli di dimensione 1 su $\mathbb{Q}$ (a meno di isomorfismo).
vi) Descrivere $\mathbb{Q}_1 \oplus \mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_1 \oplus \mathbb{Q}_{-1}$, $\mathbb{Q}_{-1} \oplus \mathbb{Q}_{-1}$: c'è qualche isomorfismo tra questi A-moduli? c'è qualche omorfismo (non necessariamente invertibile) tra questi A-moduli?
vii) Dire se gli A-moduli del punto vi) siano irriducibili e se siano ciclici.
viii) Si consideri l'A-modulo A. Si osservi che $dim_{\mathbb{Q}} A = 2$ e si dica se A sia isomorfo a qualcuno degli A-moduli del punto vi).
ix) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e sia $(V, f) \cong \mathbb{Q}_1^n \oplus \mathbb{Q}_{-1}^m$. Calcolare $dim_{\mathbb{Q}} V$. Scegliere una base di V e scrivere la matrice di f in tale base; f è diagonalizzabile? Per quali n, m (V, f) è un A-modulo ciclico?
x) Sia (V, f) un A-modulo. Dimostrare che $\exists! V_1, V_{-1} \subseteq V$ A-sottomoduli tali che V_1 è somma diretta di copie di $\mathbb{Q}_1$, V_{-1} è somma diretta di copie di $\mathbb{Q}_{-1}$, $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

8) Nell'esercizio 7) sostituire $\mathbb{Q}$ con un altro campo K (ad esempio $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ o altri) e studiare la struttura degli A-moduli al variare di K. Per quali campi K tutte le affermazioni dei punti i)-x) continuano a valere e tutte le domande hanno le stesse risposte? Per quali campi K invece si presentano delle differenze rispetto al caso $K = \mathbb{Q}$, e quali sono queste differenze?

9) Siano K un campo e $A = K[x]/(x^2)$. Osservare che un A-modulo è un K-spazio vettoriale V con un endomorfismo $f \in End_K(V)$ tale che $f^2 = 0$.
i) Dimostrare che, a meno di isomorfismo, esiste un unico A-modulo (V, f) di dimensione 1 su K (cioè un'unica struttura di A-modulo su K) e si denoti tale struttura con K_0; descriverlo, determinare f e dire se K_0 sia irriducibile e se sia ciclico.
ii) Sia $(V, f) \cong K_0 \oplus K_0$. Determinare f e dimostrare che (V, f) non è ciclico.
iii) Dimostrare che esiste un A-modulo (V, f) ciclico di dimensione 2 su K; determinare f e scriverne la matrice in una base di V; (V, f) è irriducibile? si può decomporre in somma diretta di due A-sottomoduli non banali?
iv) Determinare tutti gli A-moduli di dimensione 2 su K a meno di isomorfismo.
v) Sia (V, f) come nel punto iii); determinare $Hom_A(K_0, V)$ e $Hom_A(V, K_0)$.
vi) Esibire due A-moduli non isomorfi di dimensione 3 su K.
vii) Siano (V, f) e (W, g) due A-moduli di dimensione finita su K; dimostrare che $(V, f) \cong (W, g) \Leftrightarrow f$ e g hanno la stessa forma canonica di Jordan.
viii) Sia (V, f) un A-modulo di dimensione $n \in \mathbb{N}$ su K: quale può essere la forma canonica di Jordan di f?
ix) Determinare le classi di isomorfismo degli A-moduli di dimensione su K 3, 4, $n \in \mathbb{N}$.

10) Si confrontino i risultati degli esercizi 8) e 9).

11) Si confrontino i risultati degli esercizi 5), 7) e 8).

12) Si confrontino i risultati degli esercizi 6) e 9).

13) Sia V un K-spazio vettoriale. Si osservi che $End_K(V)$ è un anello unitario (non commutativo se $dim_K(V) > 1$) e che V ha una struttura naturale di $End_K(V)$-modulo.
i) Dimostrare che V è un $End_K(V)$-modulo irriducibile.
ii) Dimostrare che se $n \leq dim_K V$ allora $V^{\oplus n}$ è un $End_K(V)$-modulo ciclico (ma non irriducibile).
iii) Dimostrare che se $dim_K V = n \in \mathbb{N}$ allora esiste un isomorfismo di $End_K(V)$-moduli $End_K(V) \cong V^{\oplus n}$.
iv) Dimostrare che se $dim_K V = n \in \mathbb{N}$ allora $V^{\oplus(n+1)}$ è un $End_K(V)$-modulo non ciclico.

***

14) Un A-modulo M si dice indecomponibile se $M \neq 0$ e M non ammette

decomposizioni non banali in somma diretta, cioè se

$$M = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow M_1 = 0,\ M_2 = M \ \text{ oppure } \ M_1 = M,\ M_2 = 0.$$

i) Dimostrare che M irriducibile $\Rightarrow$ M indecomponibile.
ii) Dimostrare che se $A = K$ è un campo i concetti di "ciclico" non nullo, "irriducibile", "indecomponibile" coincidono.
iii) Esibire anelli A tali che gli A-moduli indecomponibili non coincidono con gli A-moduli irriducibili.
iv) Per tutti gli A-moduli studiati negli esercizi precedenti dire quali siano indecomponibili.
v) Per tutti gli A-moduli studiati negli esercizi precedenti dire quali siano ciclici ma non indecomponibili.
vi) Per tutti gli A-moduli studiati negli esercizi precedenti dire quali siano somma diretta di indecomponibili.

15) Sia A un domino a ideali principali. Caratterizzare gli $a \in A$ tali che $A/(a)$ sia un A-modulo indecomponibile.

16) Sia A un dominio di integrità e si osservi che $I \subseteq A$ è un ideale se e solo se è un A-sottomodulo.
i) Dimostrare che se I_1, I_2 sono ideali non nulli di A allora $I_1 \cap I_2 \neq 0$.
ii) Dimostrare che A è un A-modulo indecomponibile e ciclico; sotto quali condizioni è irriducibile?
iii) Dimostrare che se I è un ideale non nullo di A allora I è un A-modulo indecomponibile.
iv) Concludere che se A non è un dominio a ideali principali esistono A-moduli indecomponibili che non sono ciclici.
v) Esibire esempi di A-moduli indecomponibili che non sono ciclici.

17) Sia A un anello tale che ogni A-modulo sia somma diretta di irriducibili.
i) Dimostrare che gli A-moduli indecomponibili coincidono con gli A-moduli irriducibili.
ii) Dire quali tra gli anelli degli esercizi precedenti ($\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, K campo, $K[x]/(x^2-1)$, $K[x]/(x^2)$) hanno tale proprietà.
iii) $\mathbb{Z}$, $K[x]$ hanno tale proprietà? cioè: esistono gruppi abeliani che sono indecomponibili ma non irriducibili? esistono spazi vettoriali muniti di un endomorfismo che sono indecomponibili ma non irriducibili?

18) Siano $p \in \mathbb{Z}$ primo, $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, M un A-modulo e $p : M \to M$ il prodotto per p.
i) Osservare che $Im(p) = pM \subseteq ker(p)$ sono A-sottomoduli di M.
ii) Dimostrare $ker(p)$ e M/pM sono A-moduli e anche $A/(p)$-moduli, cioè $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-spazi vettoriali, e che lo stesso vale anche per pM e $M/ker(p)$.
iii) Dimostrare che per ogni $x \in M \setminus ker(p)$ si ha $Ax \cong A$.
iv) Sia $\pi : M \to M/ker(p)$ la proiezione sul quoziente e si scelgano $B' \subseteq ker(p)$ base di un complementare di pM in $ker(p)$ e $B'' \subseteq M \setminus ker(p)$ tale che $\pi(B'')$ sia una base di $M/ker(p)$; dimostrare che:

a) $< B', B'' >_A = M$;

b) $< B' >_A \cap < B'' >_A = 0$, quindi $M = < B' >_A \oplus < B'' >_A$;

c) $< B' >_A$ è somma diretta di copie di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; più precisamente

$$< B' >_A \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus B'};$$

d) $< B'' >_A$ è somma diretta di copie di $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$; più precisamente

$$< B'' >_A \cong (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^{\oplus B''}.$$

v) Concludere che M è somma diretta di indecomponibili.
vi) Confrontare il punto v) con l'esercizio 14,vi).
vii) Dimostrare che per ogni A-modulo finito M esistono unici $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $M \cong (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^m \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

19) Siano K un campo, $A = K[x]/(x^2)$ e (V, f) un A-modulo di dimensione finita su K.
i) Studiando la forma canonica di Jordan si dimostri che esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $(V, f) \cong K_0^n \oplus (K^2)_0^m$ dove $(K^2)_0$ è l'A-modulo dell'esercizio 9,ii).
ii) Che cosa rappresentano m e n nella forma canonica di Jordan di f?
iii) Il risultato del punto i) si può estendere agli A-moduli di dimensione infinta? Cioè: è vero che per ogni A-modulo (V, f) esistono $V_1, V_2 \subseteq V$ A-sottomoduli tali che V_1 sia somma diretta di copie di K_0, V_2 sia somma diretta di copie di $(K^2)_0$ e $V = V_1 \oplus V_2$?

20) Si confrontino i risultati degli esercizi 18) e 19): si ripercorra come si costruisce una base di Jordan per un endomorfismo $f : V \to V$ tale che $f^2 = 0$ (con $dim_K V < \infty$) e si confronti con l'esercizio 18).

21) Sia A un dominio di integrità e sia M un A-modulo.
Riassumere quali implicazioni valgano tra "M irriducibile", "M indecomponibile", "M ciclico"; per ciascuna delle implicazioni che NON valgono si esibisca un esempio; per le altre si fornisca una dimostrazione.