Moduli su anelli - esercizi (Damiani)
Generatori

In questi esercizi A è un anello unitario.

1) Siano A un anello, M un A-modulo e $X \subseteq M$ un sottoinsieme. Si chiama A-sottomodulo di M generato da X, e si denota $< X >_A$ o $< x|x \in X >_A$ o semplicemente $< X >$ se non ci sono ambiguità, il minimo A-sottomodulo di M contenente X.
i) Dimostrare che tale definizione è ben posta: se $\{M_i|i \in I\}$ è una famiglia di A-sottomoduli di M contenenti X, esiste un A-sottomodulo N di M tale che $X \subseteq N \subseteq M_i \ \forall i \in I$; d'altra parte un A-sottomodulo di M contenente X esiste (esibirne uno); concludere che nell'insieme degli A-sottomoduli di M contenenti X esiste un (unico: perché?) elemento minimo rispetto all'inclusione.
ii) Dimostrare che

$$< X >_A = \left\{ \sum_{x \in X} a_x x | a_x \in A \ \forall x \in X \text{ e } \#\{x \in X | a_x \neq 0\} < \infty \right\}.$$

iii) Si dice che X genera M, o è un insieme di generatori per M, se $< X >_A = M$; dimostrare che per ogni A-modulo M esiste un insieme di generatori $X \subseteq M$.

2) Siano I un insieme,

$$A^I = \prod_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} | a_i \in A \ \forall i \in I\}$$

e $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I} \in A^I$ per ogni $i \in I$.
i) Dimostrare che per ogni $i \in I$ $< e_i >_A \cong A$.
ii) Determinare l'A-sottomodulo $< e_i|i \in I >_A$ di A^I generato da $\{e_i|i \in I\}$.
iii) Dimostrare che $\{e_i|i \in I\}$ è un insieme di generatori per A^I se e solo se $\#I < \infty$.

3) Con le notazioni introdotte nell'esercizio 2) siano M un A-modulo, I un insieme, $e : I \to A^I$ la funzione definita da $i \mapsto e_i$ e $f : I \to M$ una funzione.
i) Dimostrare che esiste un unico omomorfismo di A-moduli

$$\varphi_f :< e_i|i \in I >_A \to M$$

che estende f cioè tale che il diagramma

commuti.
ii) Dimostrare che $Im(\varphi_f) =< f(I) >_A$.
iii) Dimostrare che se $X \subseteq M$ e $\varphi :< e_x | x \in X >_A \to M$ è l'omomorfismo che estende l'inclusione $X \hookrightarrow M$ si ha che φ è suriettivo se e solo se X è un insieme di generatori per M.

4) Un A-modulo M si dice finitamente generato se esiste un sottoinsieme finito $X \subseteq M$ tale che $< X >_A = M$.
i) Esibire esempi di A-moduli finitamente generati e di A-moduli che non sono finitamente generati.
ii) Dimostrare che se $n \in \mathbb{N}$ allora A^n è un A-modulo finitamente generato.
iii) Dimostrare che un A-modulo M è finitamente generato se e solo se esistono $n \in \mathbb{N}$ e un omomorfismo suriettivo di A-moduli $A^n \to M$.

5) Un A-modulo M si dice ciclico se esiste un insieme di generatori di M di cardinalità 1, cioè se esiste $x \in M$ tale che $M =< x >_A = Ax$. In particolare ogni A-modulo ciclico è finitamente generato.
i) Esibire esempi di A-moduli ciclici e di A-moduli finitamente generati che non sono ciclici.
ii) Dimostrare che se M è un A-modulo ciclico esiste un omomorfismo suriettivo $f : A \to M$; se $M = Ax$ descrivere esplicitamente f.
iii) Dimostrare che M è ciclico se e solo se esiste un omomorfismo suriettivo $A \to M$; in particolare A è un A-modulo ciclico.
iv) Dimostrare che $\mathbb{Q}$ è un $\mathbb{Q}$-modulo ciclico e non è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo.
v) Dimostrare che $A[x]$ è un $A[x]$-modulo ciclico e non è finitamente generato come A-modulo; determinare un isomorfismo di A-moduli $A^{\oplus \mathbb{N}} \cong A[x]$ ed esibire un insieme numerabile di generatori di $A[x]$.
vi) Dimostrare che $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{C}$-modulo ciclico e un $\mathbb{R}$-modulo finitamente generato ma non ciclico.
vii) Esibire un A-modulo ciclico M tale che esistano due elementi non nulli $x, y \in M$ con la proprietà che $M \neq < x >_A$, $M \neq < y >_A$, $M =< x, y >_A$.
viii) Esibire un A-modulo ciclico M tale che esistano due elementi non nulli $x, y \in M$ con la proprietà che $M =< x >_A \oplus < y >_A$.
ix) È possibile esibire un A-modulo M con le proprietà del punto viii) se A è un campo? se $A = \mathbb{Z}$? se $A = K[x]$?