Struttura dei moduli finitamente generati su domini a ideali principali.

In queste note A è un dominio a ideali principali e M è un A-modulo.

Torsione.

i) sia $x \in M$ e sia $Ann(x) = \{a \in A |\ ax = 0\}$; si osservi che $Ann(x)$ è un ideale di A, quindi esiste $a_x \in A$ tale che $Ann(x) = (a_x)$. a_x si chiama il minimo annullatore di x.

ii) $a_x = 1 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) il sottomodulo Ax di M generato da x è isomorfo a $A/_{(a_x)}$;

iv) siano $x \in M$, $b \in A$: che legame c'è tra a_x e a_{bx}?

v) siano $x, y \in M$ tali che $(a_x, a_y) = 1$; allora $Ax \cap Ay = \{0\}$, $a_{x+y} = a_x a_y$ e $Ax + Ay = A(x + y)$;

vi) x si dice di torsione se $a_x \neq 0$ (in particolare 0 è di torsione); sia $T(M) = \{x \in M | x$ di torsione$\}$; allora $T(M)$ è un A-sottomodulo di M e $T(M/T(M)) = \{0\}$; M si dice di torsione se $T(M) = M$; M si dice privo di torsione (o libero) se $T(M) = \{0\}$;

vii) sia $Ann(M) = \{a \in A | ax = 0\ \forall x \in M\} = (a_M)$: M è in modo naturale un $A/_{Ann(M)}$-modulo; si osservi che $Ann(Ax) = (a_x)$; inoltre $a_M \neq 0 \Rightarrow M$ di torsione (e $a_x | a_M\ \forall x \in M$);

viii) sia M finitamente generato; allora $a_M \neq 0 \Leftrightarrow M$ è di torsione. Più precisamente se $\{x_1, ..., x_r\}$ è un sistema di generatori per M $a_M = m.c.m.(a_{x_1}, ..., a_{x_r})$;

ix) sia $N \subseteq M$ un A-sottomodulo; allora $a_N | a_M$ e $a_{N/M} | a_M$;

x) sia M tale che $a_M \neq 0$; allora $\exists x \in M$ tale che $a_x = a_M$; inoltre $a_{M/Ax} | a_M$.

Moduli finitamente generati privi di torsione.

Teorema:

Sia M finitamente generato e privo di torsione; allora $M \cong A^r$ dove r è il minimo numero di generatori di M.

Dimostrazione: induzione su r.

Se $r = 1$ la tesi è ovvia;

$r > 1$: sia $M = \sum_{i=1}^{r} Ax_i$; per l'ipotesi induttiva $\forall i_1, ..., i_{r-1} \in \{1, ..., r\}$ si ha $\sum_{j=1}^{r-1} Ax_{i_j} = \oplus_{j=1}^{r-1} Ax_{i_j}$; ne segue che se $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$ con $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \neq 0$ si deve avere $\alpha_i \neq 0\ \forall i = 1, ..., r$.

Siano $d = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta_1, \beta_2 \in A$ tali che $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = d$ e si ponga $y_1 = \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2$, $y_2 = \frac{\alpha_1}{d} x_1 + \frac{\alpha_2}{d} x_2$. Allora $\{y_1, y_2, x_3, ..., x_r\}$ è ancora un insieme di generatori per M e $dy_2 + \sum_{i=3}^{r} \alpha_i x_i = 0$. Ma questo è assurdo perché non ci sono relazioni che coinvolgono $r - 1$ generatori, quindi $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i = 1, ..., r$.

Teorema:

Sia M finitamente generato e privo di torsione; allora $\exists! r \in \mathbf{N}$ tale che $M \cong A^r$.

Dimostrazione:

Siano $p \in A$ irriducibile e $I = (p)$; allora I è un ideale massimale di A, quindi A/I è un campo e M/IM è un A/I-spazio vettoriale. Se $M \cong A^r$ si ha $M/IM \cong A^r/IA^r \cong (A/I)^r$, quindi $r = dim_{A/I} M/IM$.

Moduli finitamente generati di torsione.

Teorema:

Sia M finitamente generato e di torsione; allora $\exists x_1, ..., x_r \in M$ tali che:

i) $1 \neq a_{x_r} | a_{x_{r-1}} | ... | a_{x_1} = a_M$;

ii) $M = \oplus_{i=1}^r Ax_i \cong \oplus_{i=1}^r A/_{(a_{x_i})}$.

Dimostrazione: induzione su a_M.

Se $a_M = 1$ la tesi è ovvia ($M = \{0\}$);

[sia $a_M = p$ primo; allora M è un $A/_{(p)}$-spazio vettoriale e la tesi è ovvia;]

sia ora a_M qualsiasi e sia $Y = \{y_1, ..., y_s\} \subseteq M$ massimale con la proprietà che $N = \sum_{i=1}^s Ay_i = \oplus_{i=1}^s Ay_i$ e $a_{y_i} = a_M$ $\forall i = 1, ..., s$.

Osserviamo che $Y \neq \emptyset$, grazie a x).

Allora:

a) se $a_M = bc$ si ha che $\{n \in N | bn = 0\} = cN$;

b)$Ann(M/N) \neq (a_M)$: sia $z \in M \setminus N$ tale che $a_{z+N} = a_M$; allora $a_z = a_M$; inoltre $\alpha z \in Az \cap N \Rightarrow \alpha(z+N) = 0 \Rightarrow a_M | \alpha \Rightarrow \alpha z = 0$, dunque $N + Az = N \oplus Az$ e questo contraddice la massimalità di Y; la tesi segue grazie a x);

c) poiché $a_{M/N} | a_M$ e $a_{M/N} \neq a_M$ l'ipotesi induttiva dice che la tesi è vera per M/N: quindi $\exists z_1, ..., z_t \in M$ tali che $1 \neq a_{z_t+N} | a_{z_{t-1}+N} | ... | a_{z_1+N} = a_{M/N} (| a_M)$ e $M/N = \oplus_{i=1}^t A(z_i + N) \cong \oplus_{i=1}^t A/_{(a_{z_i+N})}$;

d) $\forall z \in M$ $\exists n \in N$ tale che $a_{z+N} = a_{z+n}$: sia b tale che $a_M = ba_{z+N}$; allora $a_{z+N} z \in N$ e $ba_{z+N} z = 0$; per a) questo implica che $a_{z+N} z \in a_{z+N} N$, cioè che $\exists n \in N$ tale che $a_{z+N}(z+n) = 0$, che è la tesi;

e) se in c) gli elementi z_i sono scelti in modo tale che $a_{z_i+N} = a_{z_i}$ $\forall i = 1, ..., t$ si ha che $N \cap \sum_{i=1}^t Az_i = \{0\}$: infatti $\sum_{i=1}^t \alpha_i z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^t \alpha_i (z_i + N) = 0 \Rightarrow a_{z_i} | \alpha_i$ $\forall i = 1, ..., t$, da cui $\alpha_i z_i = 0$ $\forall i = 1, ..., t$;

f) $M \cong N \oplus M/N$; più precisamente $\sum_{i=1}^t Az_i = \oplus_{i=1}^t Az_i \cong M/N \cong$ e $M = N \oplus \sum_{i=1}^t Az_i$;

g) in conclusione gli elementi $y_1, ..., y_s, z_1, ..., z_t$ sono gli elementi $x_1, ..., x_r$ cercati.

Teorema:

Sia M finitamente generato e di torsione; allora $\exists! b_1, ..., b_r \in A$ tali che:

i) $M \cong \oplus_{i=1}^r A/(b_i)$;

ii) $1 \neq b_r | b_{r-1} | ... | b_1$.

Si ha anche $b_1 = a_M$.

Dimostrazione: che i) e ii) implicano $b_1 = a_M$ è ovvio.

Si tratta di provare l'unicità . Siano M e b_i $(i = 1, ..., r)$ come in i) e ii).

Si osservi che se $p \in A$ è irriducibile e $h_p = max\{i = 1, ..., r$ tale che $p | b_i\}$, allora $M/pM \cong \oplus_{i=1}^{h_p} A/(p)$ è uno spazio vettoriale di dimensione h_p su $A/(p)$. Ne segue che i fattori irriducibili di b_i sono esattemente gli irriducibili p tali che $i \leq dim_{A/(p)} M/pM$; in particolare r è univocamente determinato ($r = max\{dim_{A/(p)} M/pM | p \in A$ irriducibile$\}$).

Procediamo adesso per induzione su a_M.

Se a_M è irriducibile M è un $A/(a_M)$-spazio vettoriale e la tesi è ovvia.

Sia a_M non irriducibile e supponiamo la tesi vera per i fattori non banali di a_M.

Sia p un fattore irriducibile di b_r; allora $a_{pM} = \frac{a_M}{p}$, quindi la tesi è vera per pM. Ma $pM \cong \oplus_{i=1}^r A/(\frac{b_i}{p})$ e l'unicità dei $\frac{b_i}{p}$ implica l'unicità dei b_i.

Osservazione: l'ipotesi ii) nel teorema è essenziale per l'unicità . Infatti se $a, b \in A$ sono tali che $(a, b) = 1$ si ha $A/(ab) \cong A/(a) \oplus A/(b)$.

Osservazione:

i) Se $M \cong \oplus_{i=1}^{r} A/(b_i)$ con i b_i come nel teorema si ha che r è il minimo numero di generatori di M, cioè $r = min\{s \in \mathbf{N} | \exists x_1, ..., x_s$ tali che $M = \sum_{i=1}^{s} Ax_i\}$: infatti $M = \sum_{i=1}^{s} Ax_i$ con $s < r$ e $Ax_i \cong A/(\alpha_i) \Rightarrow \forall p \in A$ irriducibile $(A/(p))^s \twoheadrightarrow \oplus_{i=1}^{s} A/(\alpha_i, p) \twoheadrightarrow M/pM$, quindi $dim_{A/(p)} M/pM \leq s < r$, che è assurdo;

ii) il viceversa non è vero: se r è il minimo numero di generatori di M e $\{x_1, ..., x_r\}$ è un insieme di generatori di M non è detto che si abbia $M \cong \oplus_{i=1}^{r} Ax_i$; esempio: $x_1 = (1, 0), x_2 = (1, 1) \in (A/(p^2)) \oplus (A/(p))$.

Osservazione:

i) Sia M un A-modulo finitamente generato tale che $a_M \neq 0$ e siano $M_1, M_2 \subseteq M$ due sottomoduli tali che $M_i \cong A/(a_M)$ $\forall i = 1, 2$; allora $M/M_1 \cong M/M_2$ e $M \cong M_i \oplus M/M_i$;

ii) In generale se M è un A-modulo finitamente generato (tale che $a_M \neq 0$) e $M_1, M_2 \subseteq M$ sono due sottomoduli isomorfi (cioè tali che $M_1 \cong M_2$) non è detto che si abbia $M/M_1 \cong M/M_2$; ad esempio sia $p \in A$ irriducibile: allora $(A/(p) \oplus A/(p^2))/(A/(p) \oplus \{0\}) \cong A/(p^2)$ mentre $(A/(p) \oplus A/(p^2))/(\{0\} \oplus pA/(p^2)) \cong A/(p) \oplus A/(p)$.

Corollario: Sia M finitamente generato e di torsione; allora $\exists! b_1, ..., b_r \in A$ tali che:

i) $M \cong \oplus_{i=1}^{r} A/(b_i)$;

ii) $\forall i = 1, ..., r$ b_i ha un unico fattore irriducibile ($\exists p_i \in A$ irriducibile, $m_i > 1$ tali che $b_i = p_i^{m_i}$).

Struttura dei moduli finitamente generati su domini a ideali principali.

Teorema:

Sia M un A-modulo finitamente generato. Allora $M \cong T(M) \oplus M/T(M)$. Viceversa se N_1 ed N_2 sono due moduli finitamente generati tali che $T(N_1) = N_1$, $T(N_2) = \{0\}$, allora $T(N_1 \oplus N_2) = N_1$.

In particolare $\exists! b_1, ..., b_r \in A$ tali che:

i) $M \cong \oplus_{i=1}^{r} A/(b_i)$;

ii) $1 \neq b_r | b_{r-1} | ... | b_1$.

Si osservi che M è di torsione se e solo se $b_1 \neq 0$.

Dimostrazione: Siano $y_1 ..., y_s \in M$ tali che $\{y_1 + T(M), ..., y_s + T(M)\}$ sia una base di $M/T(M)$. Allora $\sum_{i=1}^{s} Ay_i \cong M/T(M)$ e $\sum_{i=1}^{s} Ay_i \cap M = \{0\}$.

È anche chiaro che $\sum_{i=1}^{s} Ay_i$ è un complementare di $T(M)$ in M.