Esercizi di algebra 2 (Damiani, 2018/2019) - consegna martedì 08/01/2019.

Risolvere i seguenti esercizi; in particolare se ne scelgano tre e si consegni la soluzione alla docente.

1) Siano G un gruppo e X, Y due G-insiemi (cioè due insiemi dotati di un'azione di G). Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice mappa di G-insiemi se $g.f(x) = f(g.x)\ \forall g \in G, x \in X$ e si dice isomorfismo di G-insiemi se f è invertibile e f e f^{-1} sono mappe di G-insiemi. Provare che se $f : X \to Y$ è una mappa di G-insiemi ed f è invertibile allora f è un isomorfismo di G-insiemi.

2) Si consideri l'azione naturale di $\mathcal{S}_n$ su $I_n = \{1, ..., n\}$ e si considerino le seguenti azioni indotte su $I_n \times I_n$: $\rho_1(\sigma)(i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$, $\rho_2(\sigma)(i, j) = (\sigma(i), j)$.

i) Determinare le orbite di queste azioni e dire se si tratti di azioni transitive;

ii) determinare gli stabilizzatori di tutti gli elementi.

3) Si provi che l'azione naturale di $\mathcal{S}_n$ su $I_n = \{1, ..., n\}$ induce un'azione su $\mathcal{P}(I_n)$.

i) Determinare le orbite di questa azione e dire se $\mathcal{S}_n$ agisca transitivamente su $\mathcal{P}(I_n)$;

ii) determinare gli stabilizzatori di tutti gli elementi $A \in \mathcal{P}(I_n)$;

iii) dimostrare che l'insieme $X = \{A \in \mathcal{P}(I_n) | \#A = 2\}$ è stabile rispetto all'azione di $\mathcal{S}_n$ e dire se l'azione di $\mathcal{S}_n$ su X sia transitiva.

4) Si consideri l'azione di $GL_n(K)$ su $K^n \times K^n$ definita da $A.(v, w) = (Av, Aw))$. Determinare le orbite.

5) Siano X un insieme, G un gruppo che agisce su X, $H \leq G$ un sottogruppo tale che $H \cap Stab_G(x) = \{e\}\ \forall x \in X$. Provare che se $\#X < \infty$ anche $\#H < \infty$ e si ha $\#H | \#X$.

6) Sia G un gruppo e sia $i : G \to G$ definita $i(g) = g^{-1}$. Provare che i determina un'azione di $\mathbf{Z}_2$ su G.

7) Sia $\alpha : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$ definta da $\alpha(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \lambda^2 y)$.

i) Provare che α definisce un'azione di $\mathbf{R}^*$ su $\mathbf{R}^2$;

ii) determinare le orbite di α;

iii) determinare $Stab_{\mathbf{R}^*}(x, y)$ al variare di $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

8) Sia $G \leq \mathbf{C}^*$ un sottogruppo finito. Provare che:

i) $\mathbf{C}^*/G \cong \mathbf{C}^*$;

ii) se $G \leq \mathbf{R}^*$ allora $G \leq \{\pm 1\}$;

iii) $\mathbf{R}^*/\{\pm 1\} \cong \mathbf{R}_+ \not\cong \mathbf{R}^*$;

iv) $\mathbf{R}^* \cong \mathbf{R}_+ \times \{\pm 1\}$.

9) Sia $T = \{\tau \in \mathcal{S}_3 | \tau \text{ trasposizione}\}$.

i) Provare che $\mathcal{S}_T \cong \mathcal{S}_3$;

ii) provare che l'applicazione $Aut(\mathcal{S}_3) \to \mathcal{S}_T$ data da $\varphi \mapsto \varphi|_T$ è un ben definito omomorfismo di gruppi, e che tale omomorfismo è iniettivo;

iii) sia $c : \mathcal{S}_3 \to Aut(\mathcal{S}_3)$ il coniugio (cioè $c(g)(h) = ghg^{-1}\ \forall g, h \in \mathcal{S}_3$); provare che φ è iniettivo;

iv) dimostrare che $Aut(\mathcal{S}_3) \cong \mathcal{S}_3$ e che ogni automorfismo di $\mathcal{S}_3$ è interno.

10) Siano p un numero primo, $G = GL_3(\mathbf{Z}_p)$, $U = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbf{Z}_p \} \leq G$ e H, K, L, M i sottogruppi di G generati rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare H, K, L, M e la loro cardinalità;
ii) calcolare $\#U$ e $\#G$;
iii) dire se $HK = KH,\ HL = LH,\ HM = MH,\ LM = ML$;
iv) determinare $< H, K >,\ < H, L >,\ < H, M >,\ < L, M >$;
v) dire se H, K, L, M sono normali nei sottogruppi dati in iv) che li contengono.

11) Siano K un campo, $G = GL_n(K)$ con $n > 1$, $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in K \}$,

$L = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_2 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} | a_i \in K \ \forall i = 1, ..., n-1 \}$.

i) Provare che H e L sono sottogruppi abeliani di G;
ii) provare che $H \cong K$ e $L \cong K^{n-1}$;
iii) dire se H e L siano normali in G e se H sia normale in L.

12) Siano G un gruppo, $H, K \leq G$ sottogruppi, $c : G \to Aut(G)$ il coniugio (cioè $c(g)(\tilde{g}) = g\tilde{g}g^{-1}$) e $c_K : G \to Hom_{gr}(K, G)$ l'applicazione definita da $c_K(g) = c(g)\big|_K$ per ogni $g \in G$.

i) Determinare condizioni necessarie e sufficienti su H e K affinché $c_K\big|_H$ abbia valori in $Aut(K)$, e provare che in tal caso $c_K\big|_H$ è un omomorfismo di gruppi da H ad $Aut(K)$.

ii) Osservare che se $H = G$ le condizioni necessarie e sufficienti del punto i) si traducono nella condizione che $K \trianglelefteq G$.

iii) Trovare un esempio di un gruppo G e un sottogruppo $K \trianglelefteq G$ tale che K sia abeliano e c_K non sia banale; concludere che, dato $g \in G$, non necessariamente $c_K(g)$ è un automorfismo interno di K.

13) Siano K e H due gruppi e $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi non banale; provare che $K \rtimes_\varphi H$ non è abeliano.

14) Provare che $\mathcal{S}_3 = < (1,2,3) > \rtimes < (1,2) > \cong \mathbf{Z}_3 \rtimes_\varphi \mathbf{Z}_2$ dove φ è l'unico omomorfismo non banale di $\mathbf{Z}_2$ in $Aut(\mathbf{Z}_3)$.

15) Siano H, K due gruppi, $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi, $\gamma \in Aut(K)$.

i) Si definisca $\varphi^{(\gamma)} : H \to Aut(K)$ nel modo seguente: $\varphi^{(\gamma)}(h) = \gamma \circ \varphi(h) \circ \gamma^{-1}$; provare che $\varphi^{(\gamma)}$ è ben definito (cioè $\varphi^{(\gamma)}(h) \in Aut(K)\ \forall h \in H$), e che $\varphi^{(\gamma)}$ è un omomorfismo di gruppi;

ii) provare che $K \rtimes_{\varphi} H \cong K \rtimes_{\varphi^{(\gamma)}} H$.

16) Sia $D_4 =< \rho, \sigma | \rho^4 = \sigma^2 = e, \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} >$; provare che:
i) D_4 non è prodotto diretto di due sottogruppi non banali;
ii) $D_4 =< \rho > \rtimes < \sigma > \cong \mathbf{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}_2$; determinare φ;
iii) $D_4 =< \rho^2, \sigma > \rtimes < \sigma\rho > \cong (\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}_2$; determinare φ.

17) Provare che $Aut(\mathbf{Z}_4) \cong \mathbf{Z}_2$ e dedurne che $\exists! \varphi : \mathbf{Z}_2 \to Aut(\mathbf{Z}_4)$ omomorfismo non banale di gruppi.

18) Provare che $Aut(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \cong GL_2(\mathbf{Z}_2)$; osservare che se $\varphi, \psi \in GL_2(\mathbf{Z}_2)$ sono tali che $o(\varphi) = o(\psi) = 2$ si ha che φ e ψ sono coniugati e dedurne che esiste un unico prodotto semidiretto non banale $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) \rtimes \mathbf{Z}_2$ a meno di isomorfismo.

19) Provare che se $\#G = 8$ e G è prodotto semidiretto non banale di due suoi sottogruppi, allora $G \cong D_4$.

20) Sia Q il gruppo dei quaternioni. Provare che Q non è prodotto semidiretto di due suoi sottogruppi propri.

21) Siano K un campo e $\varphi : K^* \to Aut_{gr}(K)$ definita da $\lambda \mapsto (a \mapsto \lambda a)$.
i) Provare che φ è un ben definito omomorfismo di gruppi;
ii) sia $G = K \rtimes_{\varphi} K^*$; scrivere esplicitamente il prodotto $(a, \lambda)(b, \mu)$;
iii) siano $H = \{\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \subseteq GL_2(K)$, $SL_2(K) = \{A \in GL_2(K) | det(A) = 1\}$, $D_2(K) = \{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\} \subseteq GL_2(K)$; provare che H è un sottogruppo di $GL_2(K)$ e che H è prodotto semidiretto di $H \cap SL_2(K)$ e $H \cap D_2(K)$;
iv) provare che $G \cong H$ e scrivere un isomorfismo esplicito tra i due gruppi.

22) Siano H e K due gruppi, $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi, $\gamma \in Aut(H)$. Dimostrare che $K \rtimes_{\varphi} H \cong K \rtimes_{\varphi\gamma} H$.

23) Siano $p < q$ due numeri primi e sia G un gruppo di ordine pq; siano H e $K \leq G$ rispettivamente un p-Sylow e un q-Sylow di G. Provare che:
i) $H \cong \mathbf{Z}_p$ e $K \cong \mathbf{Z}_q$; quanti sono i coniugati di H e quanti i coniugati di K?
ii) se G è abeliano G è ciclico;
iii) $K \lhd G$;
iv) se $p \nmid q - 1$ allora $H \lhd G$ e G è abeliano;
v) G è prodotto semidiretto di K e H; in particolare $G \cong \mathbf{Z}_q \rtimes \mathbf{Z}_p$;
vi) sia $\varphi : \mathbf{Z}_p \to Aut(\mathbf{Z}_q) \cong (\mathbf{Z}_q)^* \cong \mathbf{Z}_{q-1}$ l'omomorfismo di gruppi tale che $G \cong \mathbf{Z}_q \rtimes_{\varphi} \mathbf{Z}_p$; osservare che se $p \nmid q - 1$ allora φ è banale e si confronti questo risultato con iv);
vii) siano $p | q - 1$ e φ come in vi) non banale; osservare che φ è iniettivo e che esiste un unico sottogruppo di $(\mathbf{Z}_q)^*$ isomorfo ad $H (\cong \mathbf{Z}_p)$. Dedurre che esiste un unico gruppo

non abeliano di ordine pq, a meno di isomorfismi;

viii) elencare le classi di isomorfismo di gruppi di ordine pq con $p < q$ numeri primi.

24) Sia G un gruppo non abeliano di ordine pq con $p < q$ primi. Provare che in G ci sono l'identità e $q-1$ elementi di ordine q e che i restanti elementi hanno tutti ordine p.

25) Classificare e studiare i gruppi di ordine 33.

26) Classificare e studiare i gruppi di ordine 21.

27) Siano K un campo e V un K-spazio vettoriale di dimensione finita; si chiama affinità di V un'applicazione $f : V \to V$ tale che $\exists g \in GL(V)$ tale che $\forall u, w \in V$ si abbia $f(u) - f(w) = g(u - w)$ e si denota con $\mathcal{A}ff(V)$ l'insieme delle affinità di V.

i) Osservare che $\forall f \in \mathcal{A}ff(V)$ $\exists! g \in GL(V)$ tale che $\forall u, w \in V$ si abbia $f(u) - f(w) = g(u - w)$; si denoti tale g con $\pi(f)$, cioè con π la corrispondente applicazione $\pi : \mathcal{A}ff(V) \to GL(V)$;

ii) provare che $\mathcal{A}ff(V)$ è chiuso rispetto al prodotto e che $\pi(f \circ \tilde{f}) = \pi(f) \circ \pi(\tilde{f})$;

iii) provare che $\mathcal{A}ff(V) \subseteq \mathcal{S}_V$ è chiuso rispetto all'inverso; dedurne che $\mathcal{A}ff(V)$ è un gruppo e π è un omomorfismo di gruppi;

iv) provare che $GL_V \subseteq \mathcal{A}ff(V)$ (cioè le applicazioni lineari invertibili sono affinità) e $\pi\big|_{GL(V)} = id_{GL(V)}$;

v) si consideri l'azione di V su V per traslazione, cioè l'applicazione $T : V \to \mathcal{S}_V$ definita da $T(u)(w) = u + w$ $\forall u, w \in V$; si osservi che T è un omomorfismo iniettivo di gruppi; V può quindi essere identificato all'immagine di T;

vi) provare che $T(V)(\cong V)$ è un sottogruppo di $\mathcal{A}ff(V)$ (cioè che le traslazioni sono affinità); più precisamente provare che $T(V) = ker(\pi)$; se ne deduca che $T(V) \trianglelefteq \mathcal{A}ff(V)$;

vii) provare che $\mathcal{A}ff(V) = T(V) \rtimes GL(V) \cong V \rtimes GL(V)$ dove $GL(V) \hookrightarrow Aut(V)$ è l'inclusione naturale.

28) Siano $K = \mathbf{Z}_2$ e $V = K^2$.

i) Provare che la restrizione $GL(V) \to \mathcal{S}_{V \setminus \{0\}}$ è un isomorfismo di gruppi; in particolare $Aut(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2) = GL_2(\mathbf{Z}_2) \cong \mathcal{S}_3$;

ii) calcolare la cardinalità di $\mathcal{A}ff(V) = V \rtimes GL(V)$;

iii) osservare che l'inclusione $\mathcal{A}ff(V) \hookrightarrow \mathcal{S}_V$ è un isomorfismo; dedurne che ogni applicazione biunivoca di $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ in sé è un'affinità e che $\mathcal{A}ff(V) \cong \mathcal{S}_4$;

iv) sia $N \leq \mathcal{S}_4$ il sottogruppo di Klein ed $\mathcal{S}_3$ il sottogruppo di $\mathcal{S}_4$ delle permutazioni che mandano 4 in sé. Provare che $\mathcal{S}_4$ è prodotto semidiretto di N e $\mathcal{S}_3$; osservare che $\mathcal{S}_3$ agisce su $N \setminus \{e\}$ e che l'omomorfismo $\mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_{N \setminus \{e\}}$ è biunivoco. Si confronti questo risultato con iii).

29) Siano K, H gruppi, $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi, $G = K \rtimes_\varphi H$; si considerino le identificazioni naturali di H e K con i corrispondenti sottogruppi di G. Provare che:

i) se $L \leq H$ allora KL è un sottogruppo di G e $KL = K \rtimes_{\varphi|_L} L$;

ii) $Kker(\varphi) \cong K \times ker(\varphi)$;

iii) sia $L \leq H$; provare che $L \trianglelefteq G$ se e solo se $L \subseteq ker(\varphi)$;

iv) sia $M \leq K$; provare che $M \trianglelefteq G$ se e solo se $M \trianglelefteq K$ e $\varphi(h)(M) \subseteq M$ $\forall h \in H$;

v) sia $M \leq K$; mostrare con degli esempi che le condizioni $M \trianglelefteq K$ e $\varphi(h)(M) \subseteq M$ $\forall h \in H$ sono indipendenti;

vi) sia $M \leq K$ tale che $\varphi(h)(M) \subseteq M$ $\forall h \in H$; provare che MH è un sottogruppo di G, che $M \trianglelefteq MH$ e che $MH \cong M \rtimes_{\varphi_M} H$ dove $\varphi_M(h) = \varphi(h)\big|_M$ $\forall h \in H$;

vii) nelle ipotesi del punto vi) dire sotto quali condizioni MH è normale in G;

viii) siano $L \leq H$, $M \leq K$; studiare il sottogruppo $< L, M >$ di G generato da L e M.

30) Sia K un gruppo e si consideri il gruppo $G = K \rtimes_{id_{Aut(K)}} Aut(K)$. Studiare G per qualche gruppo K a scelta.

31) Siano H, K gruppi, $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi e si considerino i gruppi $G = K \rtimes_{id_{Aut(K)}} Aut(K)$, $L = K \rtimes_{\varphi} H$.

i) provare che l'applicazione $L \ni (k, h) \overset{\gamma}{\mapsto} (k, \varphi(k)) \in G$ è un omomorfismo di gruppi;

ii) provare che $ker(\gamma) = ker(\varphi) (\subseteq H \hookrightarrow L)$;

iii) provare che se φ è iniettiva allora L è un sottogruppo di G; più precisamente $L = \{(k, u) \in G | u \in Im(\varphi)\}$;

iv) provare che in generale $\gamma(L) = K \rtimes \varphi(H)$;

v) provare che se $\exists M \subseteq H$ tale che $M \to H/ker(\varphi)$ sia un isomorfismo (equivalentemente se H è prodotto semidiretto di $ker(\varphi)$ e $\varphi(H)$) allora L è prodotto semidiretto di $ker(\varphi) = ker(\gamma)$ e $K \rtimes M \cong \gamma(L)$.

32) Studiare i sottogruppi di Sylow di $\mathcal{S}_4$ e di $\mathcal{A}_4$: dire quanti sono e se sono normali, determinarli a meno di isomorfismo, esibirli esplicitamente tutti.

33) Studiare i sottogruppi di Sylow di $\mathcal{S}_5$:

i) provare che i 3-Sylow sono isomorfi a $\mathbf{Z}_3$ e i 5-Sylow sono isomorfi a $\mathbf{Z}_5$;

ii) provare che i 3-Sylow non sono normali e provare che il numero dei 3-Sylow è 10;

iii) sia $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$; provare che $(1, 2, 3, 5, 4) \notin < \sigma >$ e dedurne che i 5-Sylow non sono normali; provare che il numero dei 5-Sylow è 6;

iii)$'$ contando gli elementi di $\mathcal{S}_5$ di ordine 5 provare che il numero dei 5-Sylow è 6; dedurne che i 5-Sylow non sono normali;

iv) dimostrare che i 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ sono isomorfi ai 2-Sylow di $\mathcal{S}_4$.

v) i 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ sono normali?

vi) $\forall 1 = 1, ..., 5$ sia G_i il sottogruppo di $\mathcal{S}_5$ delle permutazioni che fissano i; provare che $G_i \cong \mathcal{S}_4$ e che se $i \neq j$ $G_i \cap G_j \cong \mathcal{S}_3$;

vii) siano $i \neq j$ e $H_i \leq G_i$, $H_j \leq G_j$ due 2-Sylow; provare che $H_i \neq H_j$;

viii) sapendo che i 2-Sylow di $\mathcal{S}_4$ sono tre e utilizzando il punto vii) provare che $\mathcal{S}_5$ ha almeno 15 2-Sylow; concludere che il numero dei 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ è esattamente 15;

ix) determinare esplicitamente tutti i 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$;

v)$'$ utilizzare il punto iv) per provare che ogni 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ contiene esattamente due trasposizioni e che queste trasposizioni commutano; osservare inoltre che ogni coppia di trasposizioni che commutano è contenuta in un 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$; dedurne che l'insieme dei 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ è in corrispondenza biunivoca con la classe coniugata di $(1, 2)(3, 4)$ e contare cosı̀ il numero di 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$;

v)$''$ con le notazioni di vi) siano H un 2-Sylow di G_5, $\sigma \in \mathcal{S}_5$ un 5-ciclo, $C =<(1,2,3,4,5)>$; provare che $\sigma H \sigma^{-1} \not\leq G_5$ e dedurne che $\forall g \in \mathcal{S}_5$ si ha $gCg^{-1} \cap N_G(H) = \{id\}$; si utilizzi l'esercizio per provare che il numero di 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ è un multiplo di 5; ricordando che G_5 ha più di un 2-Sylow si provi che il numero di 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$ è maggiore di 5; si determini il numero di 2-Sylow di $\mathcal{S}_5$.

34) Siano p un numero primo, n, m due numeri tali che $p|n \leq m < n+p$.

i) Dimostrare che i p-Sylow di $\mathcal{S}_n$ sono isomorfi ai p-Sylow di $\mathcal{S}_m$;

ii) provare che se N e M sono i numeri di p-Sylow rispettivamente in $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{S}_m$ allora $M = N\binom{m}{n}$;

iii) provare che se $p^2 \not| n+p$ allora un p-Sylow di $\mathcal{S}_{n+p}$ è isomorfo al prodotto diretto di un p-Sylow di $\mathcal{S}_n$ per $\mathbf{Z}_p$.

35) È vero che i 5-Sylow di $\mathcal{S}_{24}$ sono abeliani? Determinarli a meno di isomorfismo.

36) Dimostrare che il p-Sylow di $\mathcal{S}_{p^2}$ è $\mathbf{Z}_p^p \rtimes \mathbf{Z}_p$. Descriverne esplicitamente uno.

Osservando che in $\mathcal{S}_{p^2}$ esiste un ciclo di lunghezza p^2 determinare un elemento di ordine p^2 in $\mathbf{Z}_p^p \rtimes \mathbf{Z}_p$.

Studiare il centro di un p-Sylow di $\mathcal{S}_{p^2}$ e il quoziente del p-Sylow per il suo centro.

Studiare il derivato di un p-Sylow; è abeliano?

37) Quante strutture (non isomorfe) esistono di prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_p^p \rtimes \mathbf{Z}_p$? A quale di queste corrisponde il p-Sylow di $\mathcal{S}_{p^2}$?

Più in generale fissato $r > 0$, quante strutture (non isomorfe) esistono di prodotto semidiretto $\mathbf{Z}_p^r \rtimes \mathbf{Z}_p$?

38) Determinare il minimo $n > 0$ tale che $\mathcal{S}_n$ contenga un sottogruppo isomorfo al gruppo dei quaternioni. Determinare esplicitamente un tale sottogruppo.

39) Sia G un gruppo tale che $\#G = 132$ e siano $H, L, M \leq G$ rispettivamente un 2-Sylow, un 3-Sylow, un 11-Sylow;

i) Provare che se M non è normale in G allora $gMg^{-1} \neq M$ $\forall g \in G \setminus M$;

ii) provare che se L e M non sono normali in G si ha necessariamente $H \triangleleft G$;

iii) dedurre da ii) che G non è semplice;

iv) provare che se L non è normale in G oppure H è normale in G allora HM è un sottogruppo di G; calcolare $\#HM$ e dedurre che $M \triangleleft HM$;

v) utilizzando i) e iv) provare che se L non è normale in G oppure H è normale in G allora $M \triangleleft G$;

vi) analogamente a quanto visto nei punti iv) e v) provare che se H non è normale in G oppure L lo è allora LM è un sottogruppo di G; calcolare $\#LM$ e dedurre che $M \triangleleft LM$ e anzi $M \triangleleft G$;

vii) utilizzando i risultati di v) e vi) concludere che in un gruppo di ordine 132 l'11-Sylow è normale;

viii) dimostrare che G contiene un sottogruppo ciclico di ordine 22.

40) Sia $(G, \cdot)$ definito da:

$$G = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 \quad \text{come insieme,} \quad (a,b,c) \cdot (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = (a + 2^b \tilde{a}, b + (-1)^c \tilde{b}, c + \tilde{c}).$$

Dimostrare che:

i) $\cdot$ è ben definito e $(G, \cdot)$ è un gruppo;

ii) se H_i $(i = 1, ..., 6)$ sono i sottoinsiemi di G definiti da $H_1 = \mathbf{Z}_3 \times \{0\} \times \{0\}, H_2 = \{0\} \times \mathbf{Z}_4 \times \{0\}, H_3 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{Z}_2, H_4 = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4 \times \{0\}, H_5 = \mathbf{Z}_3 \times \{0\} \times \mathbf{Z}_2, H_6 = \{0\} \times \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$, provare che H_i è un sottogruppo di G $\forall i = 1, ..., 6$;

iii) con le notazioni di ii) $H_1 \cong \mathbf{Z}_3$, $H_2 \cong \mathbf{Z}_4$, $H_3 \cong \mathbf{Z}_2$; quali tra H_4, H_5, H_6 sono abeliani?

iv) H_5 è ciclico?

v) provare che $H_4 = H_1 \rtimes H_2$ e $H_6 = H_2 \rtimes H_3$;

vi) provare che se $K = \mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ prodotto semidiretto non banale allora $K \cong H_4$ e che se $K = \mathbf{Z}_4 \rtimes \mathbf{Z}_2$ prodotto semidiretto non banale allora $K \cong H_6$;

vii) dire quali degli H_i siano normali in G; se $H_i \triangleleft G$ determinare G/H_i;

viii) descrivere G, se possibile, come prodotto semidiretto.

41) Siano H, K due gruppi. Provare che $K \times H$ è risolubile $\Leftrightarrow$ H e K sono risolubili.

42) Siano H, K due gruppi e $\varphi : H \to Aut(K)$ un omomorfismo di gruppi. Provare che $K \rtimes_\varphi H$ è risolubile $\Leftrightarrow$ H e K sono risolubili.

43) Sia R un anello commutativo unitario e siano $T = T_n(R)$ il sottogruppo di $GL_n(R)$ delle matrici triangolari superiori, $U = U_n(R)$ il sottogruppo di T delle matrici unipotenti (cioè $U = \{(x_{ij})_{i,j=1,...,n} | x_{ij} = 0 \forall i > j,\ x_{ii} = 1 \forall i\}$.

i) Provare che il gruppo derivato di T è contenuto in U; è vero che $T' = U$?

ii) $\forall h \geq 1$ sia $U_h = \{(x_{ij})_{i,j=1,...,n} \in U | x_{ij} = 0 \forall i < j \leq i + h - 1, \}$; provare che $U = U_1 \geq U_2 \geq ... \geq U_n = \{I\}$ è una catena di sottogruppi di U;

iii) $\forall h = 1, ..., n-1$ sia $f_h : U_h \to R^{n-h}$ l'applicazione definita da $U_h \ni (x_{ij})_{i,j=1,...,n} \mapsto (x_{i,i+h+1})_{i=1,...,n-1-h} \in R^{n-h}$; provare che f_h è un omomorfismo di gruppi e che $ker(f_h) = U_{h+1}$; f_h è suriettiva?

iv) concludere che U e T sono risolubili;

v) dimostrare che $\forall h \geq 1$ $U_h' \subseteq U_{h+1}$; e' vero che $U_h' = U_{h+1}$?

44) Sia G un gruppo con 132 elementi. Provare che G è risolubile.

45) Siano $G = GL_2(\mathbf{Z}_3)$, $N = SL_2(\mathbf{Z}_3)$.

i) Studiare i sottogruppi di Sylow di G e di N: dire quanti sono, descriverli a meno di isomorfismo, determinarli esplicitamente, dire se sono normali.

ii) Osservare che $G' \leq N$; concludere che N è risolubile se e solo se G è risolubile.

iii) Dallo studio di N, $Z(N)$ e $N/Z(N)$ dedurre che N è risolubile.

iv) Osservare che G ed N agiscono sulle rette di $\mathbf{Z}_3^2$ e dedurre che esiste un omomorfismo di gruppi $G \to \mathcal{S}_4$; determinare il nucleo di tale omomorfismo e la sua intersezione con N e dedurne una seconda dimostrazione del fatto che N e G sono risolubili.

46) Sia $n \in \mathbf{Z}_+$, si identifichi $\mathcal{S}_{n-1}$ con il sottogruppo di $\mathcal{S}_n$ delle permutazioni che mandano n in n e si considerino $\sigma = (1, 2, ..., n-1, n) \in \mathcal{S}_n$, $H =< \sigma >$.

Provare che:

i) $H \cong \mathbf{Z}_n$;

ii) $H \cap \mathcal{S}_{n-1} = \{e\}$;

iii) $H\mathcal{S}_{n-1} = \mathcal{S}_n$;

iv) $\mathcal{S}_n$ è prodotto diretto di $\mathcal{S}_{n-1}$ e H? è prodotto semidiretto?

v) $\mathcal{S}_n =< \mathcal{S}_{n-1}, \sigma >$;

vi) $\mathcal{S}_n =< (1,2), (1,2,3), ..., (1,2,...,n) >$ (suggerimento: si provi l'affermazione per induzione su n);

vi) $\mathcal{S}_n =< \mathcal{S}_{n-1}, (n-1,n) >$ (suggerimento: si studi $\sigma(n-1,n)$);

viii) $\mathcal{S}_n =< (1,2), (2,3), ..., (n-1,n) >$.

47) Sia $n \in \mathbf{Z}_+$ e per ogni $i = 1, ..., n-1$ sia $\sigma_i = (i, i+1)$. Provare che:

i) $\sigma_i^2 = id \ \forall i = 1, ..., n-1$;

ii) $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = id$ (equivalentemente $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$) $\forall i = 1, ..., n-2$;

iii) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ \forall i, j \in \{1, ..., n-1\}$ tali che $1 \leq i < j-1 < n-1$;

iv) se G è un gruppo e $g_1, ..., g_{n-1} \in G$ sono elementi tali che

$$g_i^2 = id \quad \forall i = 1, ..., n-1, \qquad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \quad \forall i = 1, ..., n-2,$$

$$g_i g_j = g_j g_i \quad \forall i, j \in \{1, ..., n-1\} \text{ tali che } 1 \leq i < j-1 < n-1,$$

allora $\exists!$ omomorfismo di gruppi $\varphi : \mathcal{S}_n \to G$ tale che $\varphi(\sigma_i) = g_i \ \forall i = 1, ..., n-1$.

48) Sia $\varphi \in Aut(\mathcal{S}_n)$ tale che $\varphi((12))$ sia una trasposizione. Dimostrare che φ manda trasposizioni in trasposizioni ed è un automorfismo interno.

Dimostrare che se $n \neq 6$ ogni automorfismo di $\mathcal{S}_n$ manda trasposizioni in trasposizioni e $Aut(\mathcal{S}_n) = Int(\mathcal{S}_n)$; se inoltre $n \neq 2$ si ha $Aut(\mathcal{S}_n) = Int(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n$.

49) Dimostrare che $\mathcal{S}_6 \cong Int(\mathcal{S}_6) \leq Aut(\mathcal{S}_6)$ è un sottogruppo di indice 2. È vero che $Aut(\mathcal{S}_6) \cong \mathcal{S}_6 \rtimes \mathbf{Z}_2$ oppure $Aut(\mathcal{S}_6) \cong \mathcal{S}_6 \times \mathbf{Z}_2$?