Esercitazioni di geometria 2 - 2008/2009 (Damiani)

Forme bilineari

In queste note k è un campo e gli spazi vettoriali sono spazi vettoriali su k.

I) Definizione di forma bilineare.

Definizione:
Dato V k-spazio vettoriale si indica con $Bil_k(V)$ l'insieme $Bil_k(V) = \{b : V \times V \to k | b(v,\cdot) : V \to k$ e $b(\cdot, v) : V \to k$ sono lineari $\forall v \in V\}$, dove $b(v,\cdot)$ e $b(\cdot,v)$ $(v \in V)$ sono definite da $b(v,\cdot)(w) = b(v,w)$, $b(\cdot,v)(w) = b(w,v)$ $\forall w \in V$. Gli elementi di $Bil_k(V)$ si chiamano forme bilineari su V.

Osservazione: $Bil_k(V)$ è un k-spazio vettoriale.

Osservazione: $b : V \times V \to k$ è bilineare se e solo se $\forall v_1, v_2, v \in V, \forall \lambda \in k$ si ha $b(v_1 + v_2, v) = b(v_1, v) + b(v_2, v)$, $b(v, v_1 + v_2) = b(v, v_1) + b(v, v_2)$, $b(\lambda v_1, v_2) = \lambda b(v_1, v_2) = b(v_1, \lambda v_2)$.

Osservazione: i) $\forall b \in Bil_k(V)$ le applicazioni $V \ni v \mapsto b(v,\cdot) \in Hom_k(V,k)$ e $V \ni v \mapsto b(\cdot,v) \in Hom_k(V,k)$ sono lineari;
ii) le applicazioni $\Phi_1 : Bil_k(V) \ni b \mapsto (v \mapsto b(v,\cdot)) \in Hom_k(V, Hom_k(V,k))$ e $\Phi_2 : Bil_k(V) \ni b \mapsto (v \mapsto b(\cdot,v)) \in Hom_k(V, Hom_k(V,k))$ sono lineari, iniettive e suriettive; in particolare $Bil_k(V) \cong Hom_k(V, Hom_k(V,k))$;
iii) $\forall b \in Bil_k(V), v, w \in V$ si ha $\Phi_1(b)(v)(w) = b(v,w)$ e $\Phi_2(b)(v)(w) = b(w,v)$;
iv) se $dim_k(V) = n < \infty$ si ha $dim_k(Bil_k(V)) = n^2$.

Osservazione: dati $b \in Bil_k(V)$ e $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si ha che la restrizione $b|_{U\times U}$ di b è bilineare e la funzione $res_U : Bil_k(V) \ni b \to b|_{U\times U} \in Bil_k(U)$ è lineare.

Definizione: sia $b \in Bil_k(V)$:
i) un sottospazio vettoriale U di V si dice isotropo (per b) se $b|_{U\times U} = 0$, cioè se $b(u,u') = 0$ $\forall u, u' \in U$; equivalentemente U è isotropo per b se $b \in ker(res_U)$;
ii) un vettore $v \in V$ si dice isotropo se $b(v,v) = 0$. Si osservi che v è isotropo se e solo se lo spazio vettoriale $< v >$ generato da v è isotropo.

II) Forme bilineari simmetriche e antisimmetriche.

Osservazione: data $b \in Bil_k(V)$ l'applicazione $\tilde{b} : V \times V \to k$ definita da $\tilde{b}(v,w) = b(w,v)$ $\forall v, w \in V$ è bilineare; l'applicazione $Bil_k(V) \ni b \mapsto \tilde{b} \in Bil_k(V)$ è lineare ed è un'involuzione (cioè $\tilde{\tilde{b}} = b$ $\forall b \in Bil_k(V)$); in particolare $b \mapsto \tilde{b}$ è un isomorfismo.

Definizione:
Una forma bilineare b si dice simmetrica se $\tilde{b} = b$ e antisimmetrica se $\tilde{b} = -b$. L'insieme delle forme bilineari simmetriche si indica con $S(V)$ e l'insieme delle forme bilineari antisimmetriche si indica con $\Lambda(V)$.

Osservazione: se $car(k) \neq 2$ si ha che $Bil(V) = S(V) \oplus \Lambda(V)$.

Esempi:

i) il prodotto $k \times k \ni (\lambda, \mu) \mapsto \lambda\mu \in k$ è bilineare; determinare $Bil_k(k)$;
ii) il prodotto scalare $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ni ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbf{R}$ è bilineare;
iii) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$ è bilineare;
iv) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1$ è bilineare;
v) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ è bilineare;
vi) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 x_2$ non è bilineare;
vii) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1^2 + y_2$ non è bilineare;
viii) la funzione $k^2 \times k^2 \to k$ definita da $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1^2 + x_2 y_2$ non è bilineare.

Negli esempi precedenti dire se le forme bilineari siano simmetriche e se siano antisimmetriche e determinarne la decomposizione come somma di una forma simmetrica e di una antisimmetrica.

Osservazione: $\Phi_1|_{S(V)} = \Phi_2|_{S(V)}$; $\Phi_1|_{\Lambda(V)} = -\Phi_2|_{\Lambda(V)}$; in generale data $b \in Bil_k(V)$ si ha $\Phi_2(b) = \Phi_1(\tilde{b})$

Osservazione: sia U un sottospazio vettoriale di V; allora $res_U(S(V)) \subseteq S(U)$ e $res_U(\Lambda(V)) \subseteq \Lambda(U)$, cioè se b è simmetrica/antisimmetrica anche $b|_{U\times U}$ è simmetrica/antisimmetrica. Provare con un esempio che il viceversa non è vero, cioè che $b|_{U\times U}$ può essere simmetrica/antisimmetrica anche se b non lo è.

Osservazione: se $b \in \Lambda(V)$ tutti i sottospazi di dimensione 1 di V sono isoptropi per b e tutti i vettori di V sono isotropi.

III) Degenericità.

In questa sezione V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su k.

Definizione:

Una forma bilineare $b \in Bil_k(V)$ si dice non degenere sulla prima componente se $\Phi_1(b) : V \to Hom_k(V, k)$ è un isomorfismo; si dice non degenere sulla seconda componente se $\Phi_2(b) : V \to Hom_k(V, k)$ è un isomorfismo.

Osservazione: $b \in Bil_k(V)$ è non degenere sulla prima componente se e solo se $\forall v \in V$ tale che $v \neq 0$ $\exists w \in V$ tale che $b(v, w) \neq 0$; è non degenere sulla seconda componente se e solo se $\forall v \in V$ tale che $v \neq 0$ $\exists w \in V$ tale che $b(w, v) \neq 0$.

Osservazione: le nozioni di non degenericità sulla prima e sulla seconda componente ovviamente coincidono per le forme bilineari simmetriche e per quelle antisimmetriche.

Osservazione: le nozioni di non degenericità sulla prima e sulla seconda componente coincidono sempre: data $b \in Bil_k(V)$ si ha che b è non degenere sulla prima componente se e solo se $\tilde{b}$ è non degenere sulla seconda componente.

Dimostrazione: siano $b \in Bil_k(V)$, $v \in V$ tali che $v \neq 0$ e $\Phi_2(b)(v) = 0$, cioè $b(w, v) = 0$ $\forall w \in V$; allora $v \in ker(\Phi_1(b)(w))$ $\forall w \in V$, cioè $\forall w \in V$ $\Phi_1(b)(w) : V \to k$ induce un omomorfismo $\Phi_1(b)(w)' : V/ < v > \to k$, cioè esiste $\Phi_1(b)' : V \to Hom_k(V/ < v >, k)$ tale che $\Phi_1(b)(w) = \pi \circ \Phi_1(b)'(w)$ dove $\pi : V \to V/ < v >$ è la proiezione; $\Phi_1(b)'$ è lineare (perché?). Ma $dim_k(V) > dim_k(Hom_k(V/ < v >, k))$, quindi $\Phi_1(b)'$ non è iniettiva, quindi $\exists w \in V$, $w \neq 0$, tale che $\Phi_1(b)'(w) = 0$; ne segue che $\Phi_1(b)(w) = 0$.

Il viceversa segue immediatamente utilizzando l'osservazione precedente.

Definizione:

Una forma bilineare $b \in Bil_k(V)$ si dice non degenere se è non degenere sulla prima componente o equivalentemente se è non degenere sulla seconda componente; si dice degenere se non è non degenere.

Osservazione: $b \in Bil_k(V)$ non degenere, $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale $\not\Rightarrow b|_{U\times U}$ non degenere. Ad esempio se U è isotropo $b|_{U\times U}$ è nulla e in particolare è degenere.

Osservazione: siano $b \in Bil_k(V)$ e $v \in V$ tale che $b(v, v) \neq 0$; allora $b|_{<v>\times<v>}$ è non degenere.

IV) La matrice associata.

Osservazione: siano $dim_k(V) = n < \infty$, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e $b \in Bil_k(V)$. Se $u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ si ha

$$b(u, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(v_i, v_j) = (\, x_1, ..., x_n \,) \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & b(v_1, v_2) & ... & b(v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(v_n, v_1) & b(v_n, v_2) & ... & b(v_n, v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ è tale che $b(u, w) = x^t A y$ dove x e y sono i coefficienti rispettivamente di u e w rispetto alla base $\{v_1, ..., v_n\}$ si ha $A = \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & b(v_1, v_2) & ... & b(v_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(v_n, v_1) & b(v_n, v_2) & ... & b(v_n, v_n) \end{pmatrix}$.

Definizione:

Nelle ipotesi dell'osservazione precedente si chiama matrice associata ad una forma bilineare b la matrice A con la proprietà che $b(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_i v_i) = x^t A y \; \forall x, y \in k^n$; tale matrice esiste ed è univocamente determinata (v. osservazione precedente).

Osservazione: fissata una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V l'applicazione $Bil_k(V) \to \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ che ad ogni forma bilineare associa la sua matrice associata è un isomorfismo (lineare, iniettiva e suriettiva).

Osservazione: fissata una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V, se la matrice di b è A la matrice di $\tilde{b}$ è A^t; in particolare b è simmetrica/antisimmetrica se e solo se A è simmetrica/antisimmetrica.

Osservazione: fissata una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V si ha che b è non degenere se e solo se la matrice associata a b è invertibile.

Esercizio: Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V e si considerino le funzioni $\{f_1, ..., f_n\}$ di $Hom_k(V, k)$ tali che $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Si osservi che poiché una funzione lineare su V è determinata dai suoi valori su una base le funzioni $f_1, ..f_n$ esistono e sono univocamente determinate dalle condizioni date.

i) Dimostrare che $\{f_1, ..., f_n\}$ è una base di $Hom_k(V, k)$ (che si chiama base duale di $\{v_1, ..., v_n\}$);

ii) dimostrare che la matrice A associata a una forma bilineare b nella base $\{v_1, ..., v_n\}$ è anche la matrice associata a $\Phi_1(b)$ nelle basi $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e $\{f_1, ..., f_n\}$ di $Hom_k(V)$;

iii) qual è la matrice associata a $\Phi_2(b)$ nelle basi $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e $\{f_1, ..., f_n\}$ di $Hom_k(V)$?

Osservazione: siano $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{v'_1, ..., v'_n\}$ due basi di V e sia C la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda (cioè $\sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n x'_i v'_i \Rightarrow x' = Cx$); allora se A e A' sono le matrici associate ad una forma bilineare b rispetto alle basi $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{v'_1, ..., v'_n\}$ si ha $A = C^t A' C$.

Osservazione: la trasformazione $A \mapsto C^t AC$ conserva simmetria e antisimmetria. Tale trasformazione conserva inoltre il rango (in particolare A è invertibile se e solo se $C^t AC$ è invertibile). Si può ancora osservare che $det(C^t AC) = det(A)det(C)^2$, quindi due matrici che rappresentano la stessa forma bilineare in due basi diverse hanno determinanti uguali a meno di quadrati non nulli.

Esercizio: Siano $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{v'_1, ..., v'_n\}$ due basi di V e $\{f_1, ..., f_n\}$ e $\{f'_1, ..., f'_n\}$ le due rispettive basi duali di $Hom_k(V, k)$;

i) se C è la matrice di passaggio da $\{v_1, ..., v_n\}$ a $\{v'_1, ..., v'_n\}$ determinare la matrice di passaggio da $\{f_1, ..., f_n\}$ a $\{f'_1, ..., f'_n\}$;

ii) se A è la matrice di $\Phi_1(b)$ nelle basi $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e $\{f_1, ..., f_n\}$ di $Hom_k(V, k)$ determinare la matrice di $\Phi_1(b)$ nelle basi $\{v'_1, ..., v'_n\}$ e $\{f'_1, ..., f'_n\}$;

iii) confrontare ii) con la regola di trasformazione della matrice di un'applicazione bilineare.

Definizione:

Due matrici A e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ si dicono equivalenti se rappresentano (in basi diverse) la stessa forma bilineare.

Osservazione: due matrici A e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ sono equivalenti se e solo se $\exists C \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ invertibile tale che $A = C^t BC$. Si osservi che effettivamente la nozione di "equivalente" appena data per matrici quadrate è una relazione di equivalenza.

V) Il problema della classificazione.

Definizione:

Siano V e W spazi vettoriali, $b \in Bil_k(V)$, $\beta \in Bil_k(W)$; (V, b) e (W, β) si dicono isomorfi (e si scrive $(V, b) \cong (W, \beta)$) se esiste $\varphi : V \to W$ isomorfismo tale che $b(v_1, v_2) = \beta(\varphi(v_1), \varphi(v_2))\ \forall v_1, v_2 \in V$ (cioè se esiste un'identificazione di V con W che induce un'identificazione di b con β).

Osservazione: siano $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{w_1, ..., w_m\}$ basi rispettivamente di V e W e siano A la matrice di b nella base $\{v_1, ..., v_n\}$, A' la matrice di β nella base $\{w_1, ..., w_m\}$, C la matrice di φ nelle basi $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{w_1, ..., w_m\}$; allora $(V, b) \cong (W, \beta)$ se e solo se $n = m$ e $A = C^t A' C$.

Esercizi: Sia V uno spazio vettoriale e si considerino lo spazio vettoriale $Bil_k(V)$ e il gruppo $GL(V) = \{\varphi \in End_k(V) | \varphi \text{ isomorfismo}\}$.

Dimostrare che:

i) $\forall \varphi \in GL(V)\ \forall b \in Bil_k(V)$ l'applicazione $\varphi.b : V \times V \to k$ definita da $\varphi.b(v_1, v_2) = b(\varphi^{-1}(v_1), \varphi^{-1}(v_2))\ \forall v_1, v_2 \in V$ è bilineare;

ii) $\forall \varphi \in GL(V)$ l'applicazione $Bil_k(V) \ni b \mapsto \varphi.b \in Bil_k(V)$ è lineare;

iii) $\forall \varphi, \psi \in GL(V)\ \forall b \in Bil_k(V)$ si ha $\varphi.(\psi.b) = (\varphi \circ \psi).b$;

iv) $\forall \varphi \in GL(V)$ l'omomorfismo $Bil_k(V) \ni b \mapsto \varphi.b \in Bil_k(V)$ è un isomorfismo;

v) l'applicazione $GL(V) \to GL(Bil_k(V))$ definita da $\varphi \mapsto (b \mapsto \varphi.b))$ è un omomorfismo di gruppi;

vi) se $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, C è la matrice di $\varphi \in GL(V)$ in questa base e A e A' sono le matrici rispettivamente di $b \in Bil_k(V)$ e di $\varphi.b$ nella stessa base, si ha che $A = C^t A' C$;

vii) la relazione $\sim$ definita su $Bil_k(V)$ da $b \sim \beta \Leftrightarrow \exists \varphi \in GL(V)$ tale che $\beta = \varphi.b$ è una relazione di equivalenza;

viii) $b \in S(V) \Rightarrow \varphi.b \in S(V)\ \forall \varphi \in GL(V)$;

ix) $b \in \Lambda(V) \Rightarrow \varphi.b \in \Lambda(V)\ \forall \varphi \in GL(V)$;

x) se $dim_k(V) < \infty$ si ha che $b \in Bil_k(V)$ non degenere $\Rightarrow \varphi.b$ non degenere $\forall \varphi \in GL(V)$.

Problema: classificare le forme bilineari su V significa descrivere $Bil_k(V)/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza descritta negli esercizi. In particolare l'obiettivo è: studiare gli invarianti (cioè le funzioni F su $Bil_k(V)$ che hanno la proprietà che $F(b) = F(\beta)$ $\forall b \cong \beta$); trovare un sistema completo di invarianti (cioè degli invarianti $F_1, ..., F_r$ con la proprietà che $F_i(b) = F_i(\beta)\ \forall i = 1, ..., r \Rightarrow b \cong \beta$); esibire un insieme di rappresentanti per $Bil_k(V)/\sim$ (forma canonica) che permetta di capire se $b \cong \beta$ confrontando le loro forme canoniche.

Osservazione: l'esercizio vi) e i risultati visti nella sezione IV) implicano che classificare le forme bilineari equivale a studiare quando due matrici rappresentano la stessa forma bilineare in basi diverse; equivale anche a studiare quando $(V, b) \cong (W, \beta)$ (v. inizio di questa sezione).

Osservazione: se G è un sottogruppo di $GL(V)$ si può definire una relazione di equivalenza $\sim_G$ su $Bil_k(V)$ nel modo seguente: $b \sim_G \beta \Leftrightarrow \exists \varphi \in G$ tale che $\beta = \varphi.b$. Per ogni gruppo G ci si può proporre di classificare le forme bilineari sotto l'azione di G e naturalmente la classificazione dipende dal gruppo G.

VI) Forme quadratiche.

Definizione: Sia V un k-spazio vettoriale e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V; una funzione $q : V \to k$ si dice forma quadratica su V se q è un polinomio omogeneo di secondo grado nei coefficienti rispetto a $\{v_1, ..., v_n\}$, cioè se esiste un polinomio omogeneo di secondo grado p tale che $q(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = p(x_1, ..., x_n)$.

Osservazione: se una funzione è quadratica rispetto ad una base è quadratica rispetto ad ogni altra base, cioè la nozione di quadraticità è indipendente dalla base.

Osservazione: l'insieme $\mathcal{Q}(V)$ delle forme quadratiche su V è uno spazio vettoriale.

Osservazioni:
i) $\forall b \in Bil_k(V)$ la funzione $Q(b) : V \ni \mapsto b(v,v) \in k$ è quadratica;
ii) la funzione $Q : Bil_k(V) \ni b \mapsto Q(b) \in \mathcal{Q}(V)$ è lineare e suriettiva;
iii) se $car(k) \neq 2$ $ker(Q) = \Lambda(V)$;
iv) se $car(k) \neq 2$ $\mathcal{Q}(V) \cong S(V)$; in particolare se $b \in S(V)$ si ha che $b(v,v) = 0$ $\forall v \in V$ $\Rightarrow b = 0$; equivalentemente: se b è una forma bilineare simmetrica non nulla esiste un vettore non isotropo per b.
v) se $car(k) \neq 2$ e $q = Q(b)$ con $b \in S(V)$ si ha che $\forall v, w \in V$ $b(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$.

Esercizi: Dire quali tra le seguenti funzioni $f : k^2 \to k$ sono quadratiche:
i) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
ii) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
iii) $f(x,y) = xy$;
iv) $f(x,y) = -xy$;
v) $f(x,y) = x^2$;
vi) $f(x,y) = (x+y)^2$;
vii) $f(x,y) = x + y^2$;
viii) $f(x,y) = x^2y^2$;
ix) $f(x,y) = x + y^3$;
x) $f(x,y) = 0$.

Ci concentriamo adesso sullo studio delle forme bilineari simmetriche, cioè delle forme bilineari che (almeno su campi di caratteristica diversa da 2) sono univocamente determinate dalla forma quadratica associata.

Osservazione: l'esercizio viii) della sezione V) mostra che ha senso classificare le forme bilineari simmetriche rispetto all'azione del gruppo $GL(V)$; tale problema equivale alla classificazione delle matrici simmetriche rispetto alla relazione A equivalente ad A' se e solo se esiste C matrice invertibile tale che $A = C^tA'C$.

VII) Ortogonalità.

In questa e nelle prossime sezioni ci restringiamo allo studio delle forme bilineari simmetriche; chiamiamo $\Phi : S(V) \to Hom_k(V, Hom_k(V,k))$ l'omomorfismo $\Phi = \Phi_1|_{S(V)} = \Phi_2|_{S(V)}$ $(\Phi(b)(v) = b(v,\cdot) = b(\cdot,v)$ $\forall b \in S(V)$ $\forall v \in V$. Si ricordi che Φ è un omomorfismo iniettivo.

Definizioni: sia $b \in S(V)$ fissata:
i) dati $v_1, v_2 \in V$ si dice che v_1 e v_2 sono ortogonali (v_1 è ortogonale a v_2 ed equivalentemente v_2 è ortogonale a v_1) se $b(v_1,v_2) = 0$ $(\Leftrightarrow b(v_2,v_1) = 0)$;
ii) sia $v \in V$; si dice ortogonale di v (e si indica $v^\perp$) l'insieme di tutti i vettori di V ortogonali a v;
iii) sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme; si indica con $X^\perp$, e si chiama ortogonale di X, l'insieme $X^\perp = \{v \in V | b(x,v) = 0 \ \forall x \in X\}$ (osservare che $\{v\}^\perp = v^\perp$).

Osservazione: sia $b \in S(V)$ fissata:

i) dato $X \subseteq V$ si ha $X \subseteq (X^{\perp})^{\perp}$;

ii) dato $v \in V$ si ha $v^{\perp} = ker(\Phi(b)(v))$; in particolare $v^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V (e $v \in v^{\perp}$ se e solo se v è isotropo);

iii) dato $X \subseteq V$ si ha $X^{\perp} = \cap_{v \in X} v^{\perp}$; in particolare $X^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V;

iv) dati $X, Y \subseteq V$ sottoinsiemi si ha $X \subseteq Y \Rightarrow Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$;

v) dato $X \subseteq V$ si ha $X^{\perp} =< X >^{\perp}$;

vi) dato $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale e $\{u_1, ..., u_r\}$ base di U si ha $U^{\perp} = \cap_{i=1} u_i^{\perp}$;

vii) $0^{\perp} = V$;

viii) $V^{\perp} = ker(\Phi(b))$ ($V^{\perp}$ si chiama ortogonale di V rispetto a b, oppure radicale di b, oppure nucleo di b).

Osservazione: siano $dim_k(V) < \infty$ e $b \in S(V)$ fissata: i) $V^{\perp} = \{0\}$ se e solo se b è non degenere;

ii) per ogni $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si ha $dim_k(U) + dim_k(U^{\perp}) \geq dim_k(V)$;

iii) dato $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si ha $dim_k(U) + dim_k(U^{\perp}) = dim_k(V)$ se e solo se $U \cap V^{\perp} = \{0\}$ (se $\{u_1, ..., u_r\}$ è una base di U si ha che le forme lineari $\Phi(b)(u_i)$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\Phi(b)|_U$ è iniettiva);

iv) anche nel caso in cui b sia non degenere in generale non è detto che dato $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si abbia $V = U \oplus U^{\perp}$;

v) più in generale dato $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si ha $dim_k(U) + dim_k(U^{\perp}) = dim_k(V) + dim_k(U \cap V^{\perp})$;

vi) $dim_k(V^{\perp}) = dim_k(V) - rk(A)$ dove A è la matrice associata a b in qualche base;

vii) dato $U \subseteq V$ sottospazio vettoriale si ha $U = (U^{\perp})^{\perp}$ se e solo se $U \supseteq V^{\perp}$;

viii) in particolare b non degenere $\Rightarrow U = (U^{\perp})^{\perp}$ per ogni sottospazio vettoriale U di V.

Esercizio: siano V un k-spazio vettoriale di dimensione finita, $b \in S(V)$ e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; provare che $(U^{\perp})^{\perp} = U + V^{\perp}$.

Definizione: siano $b \in S(V)$, $U, W \subseteq V$ tali che $U + W = U \oplus W$; si dice che la somma di U e W è ortogonale (e si scrive $U + W = U \oplus^{\perp} W$) se $b(u, w) = 0$ $\forall u \in U, w \in W$, cioè se $U \subseteq W^{\perp}$ o equivalentemente se $W \subseteq U^{\perp}$.

Osservazione: siano U, W spazi vettoriali, $b_U \in S(U)$, $b_W \in S(W)$; la funzione $b : (U \oplus W) \times (U \oplus W) \to k$ definita da $b((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = b_U(u_1, u_2) + b_W(w_1, w_2)$ $\forall (u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \oplus W$ è bilineare simmetrica e si ha $b|_{U \times U} = b_U$, $b|_{W \times W} = b_W$, $U \oplus W = U \oplus^{\perp} W$.

Definizione:

Con le notazioni dell'osservazione precedente si dice che $(U \oplus W, b) = (U, b_U) \oplus^{\perp} (W, b_W)$.

Osservazione: siano $b \in S(V)$, U, W sottospazi vettoriali di V tali che $U + W = U \oplus^{\perp} W$; allora $(U + W, b_{(U+W) \times (U+W)}) \cong (U, b|_{U \times U}) \oplus^{\perp} (W, b|_{W \times W})$.

Osservazione: siano U, W spazi vettoriali, $b_U \in S(U)$, $b_W \in S(W)$, $(U \oplus W, b) = (U, b_U) \oplus^{\perp} (W, b_W)$; allora b è non degenere se e solo se b_U e b_W sono non degeneri.

Esercizio: siano $b \in S(V)$, $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che $U \cap U^{\perp} = \{0\}$; allora:
i) $b|_{U \times U}$ è non degenere;
ii) $b|_{U^{\perp} \times U^{\perp}}$ è non degenere se e solo se b è non degenere.

Osservazione: sia $b \in S(V)$; se $W \subseteq V$ è un complementare di $V^{\perp}$ ($V = V^{\perp} \oplus W$; in tal caso ovviamente si ha $V = V^{\perp} \oplus^{\perp} W$) si ha (se $dim_k(V) < \infty$) $b|_{W \times W}$ non degenere.

Dimostrazione: sia $w \in W$ tale che $b(w, \tilde{w}) = 0\ \forall \tilde{w} \in W$; la definizione di $V^{\perp}$ implica anche che $b(w, u) = 0\ \forall u \in V^{\perp}$, quindi $b(w, v) = 0\ \forall v \in V$, cioè $w \in V^{\perp} \cap W = \{0\}$.

Dimostrazione$'$: si tratta di dimostrare che $\Phi(b|_{W \times W}) : W \to Hom_k(W, k)$ è un isomorfismo, o equivalentemente è una funzione iniettiva. Ma $\Phi(b|_{W \times W})$ è la composizione $W \hookrightarrow V \stackrel{\Phi(b)}{\to} Hom_k(V, K) \stackrel{|_W}{\to} Hom_k(W, K)$; ora la composizione $W \hookrightarrow V \stackrel{\Phi(b)}{\to} Hom_k(V, K)$ è iniettiva perché W è un complementare di $V^{\perp} = ker(\Phi(b))$; d'altra parte la composizione $V \stackrel{\Phi(b)}{\to} Hom_k(V, K) \stackrel{|_{V^{\perp}}}{\to} Hom_k(V^{\perp}, K)$ è nulla (per definizione di $V^{\perp}$). La tesi segue dal fatto che $Hom_k(V, K) \stackrel{(|_W, |_{V^{\perp}})}{\to} Hom_k(W, K) \oplus Hom_k(V^{\perp}, K)$ è un isomorfismo.

Osservazione: siano $b \in S(V)$ e $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; allora b induce $b_{V/U} : V/U \times V/U \to k$ definita da $b_{V/U}(v_1 + U, v_2 + U) = b(v_1, v_2)\ \forall v_1 + U, v_2 + U \in V/U$ se e solo se $U \subseteq V^{\perp}$.

Osservazione: siano $b \in S(V)$, $U \subseteq V^{\perp}$ un sottospazio vettoriale, $W \subseteq V$ un complementare di U; allora $(W, b|_{W \times W}) \cong (V/U, b_{V/U})$; in particolare se W' è un altro complementare di U in V si ha che $(W, b|_{W \times W}) \cong (W', b|_{W' \times W'})$.

Proposizione: per ogni $b \in S(V)$ esistono U, W spazi vettoriali e $b_W \in S(W)$ non degenere tali che $(V, b) \cong (U, 0) \oplus^{\perp} (W, b_W)$. $(U, 0)$ e (W, b_W) sono univocamente determinati a meno di isomorfismo: si ha infatti $(U, 0) \cong (V^{\perp}, b|_{V^{\perp} \times V^{\perp}})$ e $(W, b_W) \cong (V/V^{\perp}, b_{V/V^{\perp}})$.

Osservazione: La proposizione implica che per classificare le forme bilineari simmetriche è sufficiente classificare le forme bilineari simmetriche non degeneri.

Definizione:
Siano V uno spazio vettoriale e $b \in S(V)$; una base $\{v_i | i \in J\}$ di V si dice ortogonale se v_i è ortogonale a v_j $\forall i \neq j \in J$, cioè se $b(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j \in J$.

Osservazione: sia $b \in S(V)$; una base di V è ortogonale se e solo se la matrice di b in tale base è diagonale.

Definizione:
Siano V uno spazio vettoriale e $b \in S(V)$; una base $\{v_i | i \in J\}$ di V si dice ortonormale se è ortogonale e $b(v_i, v_i) = 1\ \forall i \in J$.

Osservazione: sia $b \in S(V)$; una base di V è ortonormale se e solo se la matrice di b in tale base è la matrice identica I.

Teorema:

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo k di caratteristica diversa da 2 e $b \in S(V)$; allora esiste una base ortogonale per b.

Dimostrazione: induzione sulla dimensione n di V.

Se $dim_k(V) = 0, 1$ la tesi è ovvia (ogni base è ortogonale).

Sia $dim_k(V) > 1$; se $b = 0$ la tesi è ovvia (ogni base è ortogonale); se $b \neq 0$ $\exists v \in V$ non isotropo, cioè tale che $b(v, v) \neq 0$. Allora $V =< v > \oplus^{\perp} < v >^{\perp}$; per l'ipotesi induttiva esiste base ortogonale $\{v_2, ..., v_n\}$ di $< v >^{\perp}$; è allora ovvio che $\{v, v_2, ..., v_n\}$ è una base ortogonale di V.

Osservazione: il teorema può essere tradotto nel modo seguente: se A è una matrice simmetrica esiste C invertibile tale che $C^t AC$ sia diagonale, o equivalentemente esistono C invertibile e D diagonale tali che $A = C^t DC$.

Osservazione: sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonale per b; allora $\#\{i = 1, ..., n|b(v_i, v_i) = 0\} = dim_k(V^{\perp})$; più precisamente $\{v_i \ (i = 1, ..., n)|b(v_i, v_i) = 0\}$ è una base di $V^{\perp}$.

VIII) La classificazione delle forme bilineari simmetriche.

In questa sezione k è un campo di caratteristica diversa da 2.

L'unicità (a meno di isomorfismo) della decomposizione di uno spazio vettoriale nella somma diretta (ortogonale) del suo radicale e di uno spazio con forma bilineare simmetrica non degenere permette di ridurre il problema della classificazione delle forme bilineari simmetriche alla classificazione di quelle non degeneri.

In caratteristica diversa da 2 l'esistenza di una base ortogonale per le forme bilineari simmetriche permette di collegare il problema della classificazione delle forme bilineari simmetriche allo studio delle matrici diagonali.

Più precisamente abbiamo la seguente proposizione:

Due matrici diagonali $A = diag(a_1, ..., a_n)$ e $B = diag(b_1, ..., b_n)$ sono equivalenti se e solo se:

i) $\#\{i = 1, ..., n|a_i = 0\} = \#\{i = 1, ..., n|b_i = 0\}$ (cioè $rk(A) = rk(B)$) e

ii) $diag(a_i|i$ tale che $a_i \neq 0)$ è equivalente a $diag(b_i|i$ tale che $b_i \neq 0)$.

La classificazione delle forme bilineari dipende dal campo k.

VIIIa) Forme bilineari simmetriche su campi algebricamente chiusi.

Sia k un campo algebricamente chiuso (ad esempio $k = \mathbf{C}$).

Allora vale la seguente proposizione:

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $b \in S(V)$ non degenere; allora esiste una base ortonormale per b.

Dimostrazione: sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonale per b; per ogni $i = 1, ..., n$ sia $a_i \in k$ tale che $a_i^2 = b(v_i, v_i)$; a_i esiste (perché k è algebricamente chiuso) e $a_i \neq 0$ (perché b è non degenere). Allora $\{\frac{v_1}{a_1}, ..., \frac{v_n}{a_n}\}$ è una base ortonormale per b.

Teorema: due forme bilineari simmetriche su uno spazio vettoriale su un campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2 sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.

Osservazione: il teorema vale su una classe più ampia di campi. Precisamente affinché valga il teorema è sufficiente (e anche necessario) che k non abbia estensioni di grado 2, o equivalentemente che $x^2 = a$ sia risolubile per ogni $a \in k$, o equivalentemente che la funzione $k \ni a \mapsto a^2 \in k$ sia suriettiva.

VIIIb) Forme bilineari simmetriche su $\mathbf{R}$.

In questa sezione poniamo $k = \mathbf{R}$.

Proposizione: Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbf{R}$ e $b \in S(V)$; allora esiste una base $\{v_1, ..., v_n\}$ ortogonale per b tale che $\forall i = 1, ..., n$ $b(v_i, v_i) \in \{0, 1, -1\}$.

Dimostrazione: per ogni $i = 1, ..., n$ sia $a_i \in \mathbf{R}$ tale che $a_i = 1$ se $b(v_i, v_i) = 0$, $a_i^2 = |b(v_i, v_i)|$ se $b(v_i, v_i) \neq 0$. Allora $\{\frac{v_1}{a_1}, ..., \frac{v_n}{a_n}\}$ è una base di V con la proprietà richiesta.

Definizione: sia $b \in S(V)$; b si dice definita positiva (e si scrive $b > 0$) se $b(v, v) > 0$ per ogni $v \in V \setminus \{0\}$; b si dice definita negativa (e si scrive $b < 0$) se $-b > 0$.

Notazione: una forma bilineare simmetrica definita positiva si chiama prodotto scalare.

Osservazione: se $b \in S(V)$ è definita positiva allora $b|_{U \times U}$ è definita positiva per ogni sottospazio vettoriale $U \subseteq V$.

Osservazione: i prodotti scalari sono non degeneri ($\forall v \neq 0$ $b(v, v) \neq 0$).

Osservazione: ogni $b \in S(V)$ bilineare simmetrica definita positiva (b prodotto scalare) ammette una base ortonormale (anche da qui segue che b è non degenere): in particolare tutti i prodotti scalari sono equivalenti; viceversa se b ammette una base ortonormale b è definita positiva.

Osservazione: $b \in S(V)$ prodotto scalare $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$ $\forall U \subseteq V$.

Definizione:

Si chiama segnatura la funzione $s : S(V) \ni b \mapsto s(b) = (s_0, s_+, s_-) \in \mathbf{N}^3$ definita nel modo seguente:

i) $s_0 = dim_k(V^\perp)$;

ii) $s_+ = max\{dim_k(U) | U \subseteq V,\ b|_{U \times U} > 0\}$;

iii) $s_+ = max\{dim_k(U) | U \subseteq V,\ b|_{U \times U} < 0\}$.

Osservazione: la segnatura è invariante, cioè se $b, \beta \in S(V)$ sono forme bilineari equivalenti si ha $s(b) = s(\beta)$.

Osservazione: $b \in S(V)$ è un prodotto scalare se e solo se $s(b) = (0, dim_k(V), 0)$.

Lemma: Siano $b \in S(V)$, $X \subseteq V^\perp$, $Y, Z \subseteq V$ sottospazi vettoriali tali che $b|_{Y \times Y} > 0$ e $b|_{Z \times Z} < 0$. Allora $X + Y + Z = X \oplus Y \oplus Z$ e $dim_k(X) + dim_k(Y) + dim_k(Z) \leq dim_k(V)$.

Dimostrazione:

i) $Y \cap Z = \{0\}$: $v \in Y \cap Z \Rightarrow b(v,v) \geq 0,\ b(v,v) \leq 0$; quindi $b(v,v) = 0$, da cui $v = 0$;

ii) $X \cap (Y \oplus Z) = \{0\}$: $y \in Y, z \in Z, y+z \in X \Rightarrow 0 = b(y+z, y-z) = b(y,y) - b(z,z) \geq 0$, quindi $b(y,y) = 0$, $b(z,z) = 0$, da cui $y = z = 0$.

Corollario: $b \in S(V)$, $s(b) = (s_0, s_+, s_-) \Rightarrow s_0 + s_+ + s_- \leq dim_k(V)$.

Osservazione: Siano $b \in S(V)$, $s(b) = (s_0, s_+, s_-)$, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonale per b, $p = \#\{i = 1, ..., n | b(v_i, v_i) = 0\}$, $q = \#\{i = 1, ..., n | b(v_i, v_i) > 0\}$, $r = \#\{i = 1, ..., n | b(v_i, v_i) < 0\}$. Allora:

i) $p = s_0$;

ii) $q \leq s_+$;

iii) $r \leq s_-$;

iv) $dim_k(V) = p + q + r \leq s_0 + s_+ + s_- \leq dim_k(V)$;

v) $s(b) = (p, q, r)$.

Osservazione: $b \in S(V)$, $s(b) = (s_0, s_+, s_-) \Rightarrow s_0 + s_+ + s_- = dim_k(V)$ (perché b ammette una base ortogonale).

Teorema: $b, \beta \in S(V)$ sono forme bilineari equivalenti se e solo se $s(b) = s(\beta)$.

Dimostrazione: se $s(b) = s(\beta) = (s_0, s_+, s_-)$ esistono basi di V nelle quali le matrici di b e β sono diagonali con s_0 zeri, s_+ uni e s_- -uni sulla diagonale, cioè esistono basi di V nelle quali le matrici di b e β sono uguali.

Proposizione: sia $b \in S(V)$ e sia B la matrice di b rispetto ad una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V; per ogni $r = 1, ..., n$ sia B_r la matrice $r \times r$ costruita estraendo da B le prime r righe e le prime r colonne (cioè $(B_r)_{ij} = B_{ij}\ \forall i, j = 1, ..., r$). Allora

$$b > 0 \Leftrightarrow det(B_r) > 0\ \forall r = 1, ..., n.$$

Dimostrazione: si osservi che la matrice associata ad un prodotto scalare ha sempre determinante positivo (ha lo stesso segno del determinante della matrice identica, che è 1).

$\Rightarrow$) per ogni $r = 1, ..., n$ B_r è la matrice associata a $b|_{<v_1,...,v_r> \times <v_1,...,v_r>}$ che è definita positiva, quindi $det(B_r) > 0$;

$\Leftarrow$) induzione su n: per $n = 1$ la tesi è ovvia;

se $n > 1$ l'ipotesi induttiva dice che $b|_{<v_1,...,v_{n-1}> \times <v_1,...,v_{n-1}>}$ è definita positiva; sia $u \in <v_1, ..., v_{n-1}>^{\perp} \setminus \{0\}$; allora $det(B) (= det(B_n))$ ha lo stesso segno di $det(B_{n-1}) b(u,u)$, quindi $b(u,u) > 0$, da cui $b > 0$.

Osservazione: con le notazioni della proposizione si ha che $b < 0 \Leftrightarrow (-1)^r det(B_r) > 0\ \forall r = 1, ..., n$.

Esercizio: con le notazioni della proposizione provare che:

i) se $det(B_r) \neq 0\ \forall r = 1, ..., n$ e $s(b) = (s_0, s_+, s_-)$ allora $s_0 = 0$, $s_+ = \#\{r = 1, ..., n | det(B_r) det(B_{r-1}) > 0\}$, $s_- = \#\{r = 1, ..., n | det(B_r) det(B_{r-1}) < 0\}$ dove si è posto $det(B_0) = 1$;

ii) il viceversa di i) è falso: in particolare se b è non degenere non è necessariamente vero che $det(B_r) \neq 0\ \forall r = 1, ..., n$.

IX) Aggiunzione e operatori autoaggiunti.

In questa sezione $g \in S(V)$ è non degenere, cioè $\Phi(g) : V \to Hom_k(V,k)$ è un isomorfismo.

Osservazione: per ogni $f \in End_k(V)$ la funzione $b_f : V \times V \to k$ definita da $b_f(v,w) = g(f(v),w)$ $\forall v,w \in V$ è bilineare e si ha $b_f(v,\cdot) = g(f(v),\cdot)$, $b_f(\cdot,v) = g(\cdot,v) \circ f$, cioè $\Phi_1(b_f)(v) = \Phi(g)(f(v))$, $\Phi_2(b_f)(v) = \Phi(g)(v) \circ f$.

Osservazione: la funzione $End_k(V) \ni f \mapsto b_f \in Bil_k(V)$ è lineare, iniettiva e suriettiva (è un isomorfismo).

Osservazione: poiché per ogni $v \in V$ $\Phi_2(b_f)(v) \in Hom_k(V,k)$ la non degenericità di g implica che esiste un unico $v_f \in V$ tale che $\Phi_2(b_f)(v) = \Phi(g)(v_f)$.

Definizione: Sia $f^* : V \to V$ la funzione tale che $f^*(v) = v_f$ $\forall v \in V$, cioè la funzione definita dalla proprietà $g(f(v),w) = g(v,f^*(w))$ $\forall w \in V$. f^* si chiama aggiunto di f.

Osservazione: per ogni $f \in End_k(V)$ la funzione f^* è lineare.

Osservazione: la funzione $* : End_k(V) \ni f \mapsto f^* \in End_k(V)$ ha le seguenti proprietà:
i) è lineare;
ii) è un'involuzione (cioè $(f^*)^* = f$ $\forall f \in End_k(V)$;
iii) $id_V^* = id_V$;
iv) è un antiautomorfismo di algebre ($(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$ $\forall f_1,f_2 \in End_k(V)$).

Esempio: Siano $V = k^2$, $g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, $f(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$; allora $f^*(x_1,x_2) = (-x_2, x_1 + 3x_2)$.

Osservazione: Siano $\{v_1,...,v_n\}$ una base di V e G la matrice di g in tale base; per ogni $f \in End_k(V)$ siano A e A^* le matrici rispettivamente di f e di f^* nella stessa base; allora $A^tG = GA^*$ (cioè $A^* = G^{-1}A^tG$).

Osservazione: con le notazioni dell'osservazione precedente si ha che se $\{v_1,...,v_n\}$ è una base ortonormale di V allora $A^* = A^t$.

Definizione: $f \in End_k(V)$ si chiama autoaggiunto se $f^* = f$.

Osservazione: f è autoaggiunto se e solo se la forma bilineare $b_f : (v,w) \mapsto g(f(v),w)$ è simmetrica. Più precisamente l'isomorfismo $End_k(V) \ni f \mapsto b_f \in Bil_k(V)$ induce un isomorfismo $\{f \in End_k(V) | f^* = f\} \cong S(V)$.

Osservazione: Con le notazioni dell'osservazione precedente si ha che f è autoaggiunto se e solo $A^tG = GA$. Se inoltre $\{v_1,...,v_n\}$ è una base ortonormale di V allora f è autoaggiunto se e solo $A^t = A$.

Osservazione: Sia $f = f^*$; allora se $U \subseteq V$ è f-stabile anche $U^\perp$ è f-stabile.
Dimostrazione: $x \in U^\perp, u \in U \Rightarrow g(f(x),u) = g(x,f(u)) = 0$.

Teorema: Siano $k = \mathbf{R}$, $g > 0$, $f \in End_k(V)$ autoaggiunto. Allora:

i) f è diagonalizzabile;

ii) $V_\lambda \perp V_\mu \ \forall \lambda \neq \mu$.

In particolare esiste una base ortonormale per g di autovettori per f.

Dimostrazione:

i) Sia $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ un autovalore di f; allora $\beta = 0$; altrimenti $(T-\alpha)^2 + \beta^2$ è un fattore del polinomio minimo di f quindi esiste $v \neq 0$ tale che $(f - \alpha id_V)^2(v) = -\beta^2 v$ (e in particolare $f(v) \neq \alpha v$). Si ha allora $0 < g((f-\alpha id_V)(v), (f-\alpha id_V)(v)) = g(v, (f-\alpha id_V)^2(v)) = g(v, -\beta^2 v) = -\beta^2 g(v,v) < 0$, assourdo;

ii) sia $U = \oplus_\lambda V_\lambda$; si osservi che U è f-stabile, quindi anche $U^\perp$ lo è, e che inoltre $V = U \oplus U^\perp$; $g|_{U^\perp \times U^\perp} > 0$ ed $f|_{U^\perp}$ è autoaggiunto, quindi esiste $w \in U^\perp$ autovettore per f. Ne segue che $U^\perp = \{0\}$, cioè $U = V$, che significa che f è diagonalizzabile;

iii) siano $\lambda \neq \mu$, $v \in V_\lambda$, $w \in V_\mu$; allora $\lambda g(v,w) = g(f(v), w) = g(v, f(w)) = \mu g(v,w)$, quindi $g(v,w) = 0$.

Osservazione: Nelle ipotesi del teorema sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormale per g; allora $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di autovettori per f se e solo se è una base ortogonale per b_f.

Corollario: Siano V un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale, $g, b \in S(V)$ con $g > 0$. Allora esiste base di V ortonormale per g e ortogonale per b.

Corollario: sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ simmetrica; allora:

i) A è diagonalizzabile;

ii) esiste una matrice ortogonale C (cioè tale che $C^tC = I$ o equivalentemente $C^t = C^{-1}$) tale che $C^{-1}AC$ sia diagonale.

Dimostrazione: A è la matrice di un operatore autoaggiunto rispetto ad una base ortonormale di un prodotto scalare. La matrice di passaggio da questa base ortonormale ad una base ortonormale di autovettori è ortogonale.

Osservazione: L'insieme O_n delle matrici ortogonali è un sottogruppo di GL_n; equivalentemente dato $g \in S(V)$ tale che g ammette una base ortonormale si ha che $O(g) = \{\varphi \in GL(V) | g(\varphi(v), \varphi(w)) = g(v,w) \ \forall v, w \in V\} = \{\varphi \in GL(V) | \varphi.g = g\}$ è un sottogruppo di $GL(V)$ (isomorfo a O_n).

Corollario: Siano V un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale, $g \in S(V)$ tali che $g > 0$; se si considera la relazione di equivalenza in $S(V)$ definita da $b \sim_g \beta$ se e solo se $\exists \varphi \in O(g)$ tale che $\beta = \varphi.b$ si ha che il polinomio caratteristico classifica $S(V)/\sim_g$, cioè che $b \sim_g \beta$ se e solo se b e β hanno lo stesso polinomio caratteristico (che a sua volta equivale a dire che le matrici di b e β hanno gli stessi autovalori con molteplicità).

Osservazione: con le notazioni del corollario, poiché $O(g) < GL(V)$ si ha che $b \sim_g \beta \Rightarrow b \sim \beta$; in particolare la segnatura è una funzione degli autovalori: infatti se B è la matrice di b in una base si ha $s(b) = (\#\{\text{autovalori nulli di } B\}, \#\{\text{autovalori positivi di } B\}, \#\{\text{autovalori negativi di } B\})$.