

p -Gruppi.

- 1) Si consideri il gruppo Q_8 dei quaternioni.
 - i) Dimostrare che tutti i sottogruppi di Q_8 sono normali.
 - ii) Dimostrare che Q_8 non è prodotto semidiretto di due sottogruppi non banali.
- 2) Studiare il gruppo $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con $\Phi(1)(a, b) = (b, a)$: determinare esplicitamente l'operazione, calcolare l'ordine degli elementi, descrivere i sottogruppi e i sottogruppi normali, il centro, il sottogruppo derivato.
Confrontare G con D_4 e Q_8 .
- 3) Sia $p > 2$ un numero primo.
 - i) Dimostrare che esiste un prodotto semidiretto non banale tra $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
 - ii) Descrivere esplicitamente l'operazione del gruppo $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ trovato nel punto i) e studiare G (elementi, sottogruppi, quozienti).
 - iii) Siano $r \in \mathbb{Z}$, $\varphi_r : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^* \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ definito da $\varphi_r(1) = 1 + rp$, $G_r = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_r} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Descrivere G_0 e dimostrare che $G_r \cong G_1 \Leftrightarrow (r, p) = 1$.
- 4) Sia p un numero primo.
 - i) Dimostrare che

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

e trovare un automorfismo di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ di ordine p .

- ii) Dimostrare che $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3$.
- 5) Sia $p > 2$ un numero primo.
 - i) Provare che esiste un prodotto semidiretto non banale tra $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
 - ii) Descrivere esplicitamente l'operazione di $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e studiare G (elementi, sottogruppi, quozienti).
- 6) Sia $p > 2$ un numero primo.
Confrontare i gruppi $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: sono isomorfi?
E nel caso $p = 2$?

7) Sia p un numero primo e sia $U_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ il gruppo

$$U_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

Studiare $U_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ e dire se sia isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, se sia isomorfo a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, se non sia isomorfo a nessuno dei due.

8) Siano p un numero primo e G un p -gruppo non banale ($\#G = p^a$, $a > 0$). Dimostrare che esiste $H \leq G$ sottogruppo di indice p .

9) Sia p un numero primo e siano G un p -gruppo non banale, $H \leq G$ un sottogruppo di indice p , $z \in Z(G)$.

i) Dimostrare che se $z \notin H$ allora $H \triangleleft \langle H, z \rangle = G$.

ii) Osservare che se $z \in H$ allora $H/\langle z \rangle$ ha indice p in $G/\langle z \rangle$.

iii) Dimostrare che $H \trianglelefteq G$.

10) Sia p un numero primo e sia G un p -gruppo non banale. Dimostrare che $G' \neq G$.

11) Siano $p > 2$ un numero primo, G un gruppo, $x, y \in G$ tali che

$$x^{p^2} = e, \quad y^p = x^p, \quad yxy^{-1} = x^{1+p}.$$

Dimostrare che $(xy^{-1})^p = e$.

E se $p = 2$?

12) Sia p un numero primo. Classificare i gruppi G tali che $\#G = p^3$.