Esercizi di Algebra 2 - a.a. 2025/26

Il gruppo simmetrico.

1) Sia $T = \{\tau \in \mathcal{S}_3 | \tau \text{ trasposizione}\}$.

i) Provare che $\mathcal{S}_T \cong \mathcal{S}_3$.

ii) Provare che la funzione $Aut(\mathcal{S}_3) \to \mathcal{S}_T$ data da $\varphi \mapsto \varphi|_T$ è un ben definito omomorfismo di gruppi, e che tale omomorfismo è iniettivo;

iii) Sia $c : \mathcal{S}_3 \to Aut(\mathcal{S}_3)$ il coniugio (cioè $c(g)(h) = ghg^{-1}$ $\forall g, h \in \mathcal{S}_3$); provare che φ è iniettivo;

iv) Dimostrare che $Aut(\mathcal{S}_3) \cong \mathcal{S}_3$ e che ogni automorfismo di $\mathcal{S}_3$ è interno.

2) Sia $K \leq \mathcal{S}_4$ il sottogruppo generato dai $(2, 2)$-cicli (gruppo di Klein) e si identifichi $\mathcal{S}_3$ con il sottogruppo di $\mathcal{S}_4$ delle permutazioni che fissano 4.

i) Dimostrare che $\mathcal{S}_4 = K \rtimes \mathcal{S}_3$ e che $\mathcal{S}_4/K \cong \mathcal{S}_3$.

ii) Studiare i coniugati di $\mathcal{S}_3$ in $\mathcal{S}_4$.

iii) Che cosa si può dire dei coniugati di K in $\mathcal{S}_4$?

3) Sia $\sigma = (1, 2)(3, 4) \in \mathcal{S}_4$.

i) Qual è la cardinalità della classe di coniugio di σ? e la cardinalità del centralizzatore di σ?

ii) Determinare il centralizzatore $C_{\mathcal{S}_4}(\sigma)$ di σ e riconoscerne la classe di isomorfismo.

iii) $C_{\mathcal{S}_4}(\sigma)$ contiene delle trasposizioni? quali?

4) Siano $K \leq \mathcal{S}_4$ il gruppo di Klein e $H \leq \mathcal{S}_4$ un sottogruppo con $\#H = 8$.

i) Dimostrare che $K \leq H$.

ii) Descrivere H: H contiene un elemento di ordine 4? quanti ne contiene? H contiene una trasposizione? quante ne contiene?

iii) Trovare $N_{\mathcal{S}_4}(H)$ e calcolare $\#\{gHg^{-1} | g \in \mathcal{S}_4\}$.

iv) Provare che i sottogruppi di $\mathcal{S}_4$ con 8 elementi sono coniugati ad H.

5) Siano $c : \mathcal{S}_4 \to Aut(\mathcal{S}_4)$ il coniugio, $K \leq \mathcal{S}_4$ il sottogruppo di Klein, $r : Aut(K) \to \mathcal{S}_{K\setminus\{e\}}$ la restrizione a $K \setminus \{e\}$.
Dimostrare che:

i) r è un ben definito omomorfismo di gruppi.

ii) c induce un omomorfismo di gruppi $c_K : \mathcal{S}_4 \to Aut(K)$.

iii) $ker(c_K) = K$.

iv) $\mathcal{S}_4/K \cong \mathcal{S}_{K\setminus\{e\}} \cong \mathcal{S}_3$.

Soffermarsi ad osservare che l'isomorfismo $\mathcal{S}_4/K \cong \mathcal{S}_{K\setminus\{e\}}$ è naturale (e descriverlo esplicitamente), mentre l'isomorfismo $\mathcal{S}_4/K \cong \mathcal{S}_3$ dipende da un'identificazione di $K \setminus \{e\}$ con $\{1, 2, 3\}$. Confrontare tale isomorfismo anche con quello dell'esercizio 2).

6) Identificando i vertici del poligono regolare di n lati con $\{1, 2, ..., n\}$, realizzare D_n some sottogruppo di $\mathcal{S}_n$ e esibirne due generatori.
Descrivere nei dettagli $D_n \leq \mathcal{S}_n$ nei casi $n = 3, 4, 5$.
Per quali valori di n le rotazioni corrispondono a permutazioni pari e le riflessioni corrispondono a permutazioni dispari?
Per quali valori di n si ha $D_n \leq \mathcal{A}_n$?
Sia n pari: considerare le due classi di coniugio delle riflessioni e confrontarne la struttura ciclica. Confrontare con il caso n dispari.

7) Siano $n \geq 3$ e $\rho = (1, 2, ..., n) \in \mathcal{S}_n$.
i) Dimostrare che $< \rho, (1, 2) >= \mathcal{S}_n$.
ii) Dimostrare che se n è primo e $i \neq j$ allora $< \rho, (i, j) >= \mathcal{S}_n$.
iii) Esibire un controesempio al punto ii) nel caso in cui n non sia primo.

8) Dimostrare che la composizione del coniugio di $\mathcal{S}_3$ ($c : \mathcal{S}_3 \to Aut(\mathcal{S}_3)$) con la restrizione $r : Aut(\mathcal{S}_3) \to \mathcal{S}_{\mathcal{S}_3 \setminus \{id\}}$ realizza $\mathcal{S}_3$ come sottogruppo del gruppo alterno $\mathcal{A}_5$.
Descrivere esplicitamente tale sottogruppo.
Concludere che in $\mathcal{S}_5$ esistono (almeno) due sottogruppi isomorfi ad $\mathcal{S}_3$ non coniugati tra loro.

9) Si consideri l'azione sinistra di $\mathcal{S}_3$ su se stesso.
i) Descrivere l'omomorfismo di gruppi

$$L : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_{\mathcal{S}_3} \cong \mathcal{S}_6.$$

ii) Verificare che - come deve essere - L è un omomorfismo iniettivo.
iii) Si può concludere che in $\mathcal{S}_6$ esistono (almeno) tre sottogruppi isomorfi ad $\mathcal{S}_3$ a due a due non coniugati?
*iv) Dimostrare con una costruzione esplicita che L si estende ad un automorfismo $\varphi : \mathcal{S}_6 \to \mathcal{S}_6$.
v) Dimostrare che $\varphi \notin Int(\mathcal{S}_6)$ e concludere che $Aut(\mathcal{S}_6) \neq Int(\mathcal{S}_6)$.

10) Siano $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutazione di ordine 2 e $T = \{\text{trasposizioni}\} \subseteq \mathcal{S}_n$.
i) Calcolare la cardinalità della classe di coniugio di σ e $\#T$.
ii) Dimostrare che se $\varphi \in Aut(\mathcal{S}_n)$ allora $\varphi(T)$ è la classe di coniugio di una permutazione dispari di ordine 2.
iii) Dimostrare che se $n \neq 6$ e $\varphi \in Aut(\mathcal{S}_n)$ allora $\varphi(T) = T$.
iv) Dimostrare che se $n \neq 6$ allora $Aut(\mathcal{S}_n) = Int(\mathcal{S}_n)$.
v) Dimostrare che se $n \neq 2, 6$ allora $Aut(\mathcal{S}_n) = Int(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n$.