Esercizi di Algebra 2 - a.a. 2025/26

Gruppi e coniugio

1) Siano $H, K \leq G$ due sottogruppi di G.
Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
  i) $HK = KH$.
  ii) HK è un sottogruppo di G.
  iii) KH è un sottogruppo di G.
Dimostrare che se K è normale in G allora le condizioni i), ii) e iii) sono soddisfatte.
Osservare che se $H = K$ allora le condizioni i), ii) e iii) sono soddisfatte anche se H non è normale in G.
Esibire un esempio di un gruppo G e di due sottogruppi $H \neq K$ non normali in G tali che le condizioni i), ii) e iii) siano soddisfatte.

2) Siano G un gruppo, $X, Y \subseteq G$ sottoinsiemi, $H \leq G$ un sottogruppo. Si chiama centralizzatore di X l'insieme

$$C_G(X) = \{g \in G | gx = xg \ \forall x \in X\}.$$

Dimostrare che:
  i) $C_G(X) \leq G$ (è un sottogruppo di G).
  ii) $Y \subseteq C_G(X) \Leftrightarrow X \subseteq C_G(Y)$.
  iii) $X \subseteq C_G(C_G(X))$.
  iv) $X \subseteq Y \Rightarrow C_G(Y) \leq C_G(X)$.
  v) X stabile per coniugio $\Rightarrow C_G(X) \trianglelefteq G$.
  vi) $C_G(G) = Z(G)$; $C_G(Z(G)) = G$; $Z(G) \leq C_G(X) \leq G$.
  vii) $H \leq C_G(H) \Leftrightarrow H$ abeliano. $H \trianglelefteq G \Rightarrow C_G(H) \trianglelefteq G$.

3) Siano K un campo, $G = GL_n(K)$ il gruppo generale lineare e si considerino i seguenti sottoinsiemi di G:
i) $Diag_n = \{$matrici diagonali invertibili$\}$;
ii) $K^* \cong \{$matrici scalari non nulle$\}$;
iii) $SL_n = \{A \in G | det(G) = 1\}$;
iv) $O_n = \{A \in G | A^t A = I\}$;
v) $SO_n = O_n \cap SL_n$;
vi) $T_n = \{$matrici triangolari superiori$\}$;
vii) $U_n = \{$matrici triangolari superiori con unico autovalore 1$\}$.

viii) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & & a_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & a_i \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \middle| a_1, ..., a_{n-1} \in K \right\}$ dove i coefficienti non indicati neanche con i puntini sono tutti uguali a zero.

Dimostrare che questi sottoinsiemi sono tutti sottogruppi di G.

Dire quali di questi sottogruppi sono normali in G.

Studiare le relazioni di inclusione e di normalità tra questi sottogruppi.

Dimostrare che $T_n = Diag_n U_n$.

Dimostrare che $H \cong (K^{n-1}, +)$.

4) Siano K un campo e $n \in \mathbb{N}$, e si denoti con $\mathcal{A}ff_n$ il gruppo delle affinità di K^n, cioè l'insieme

$$\{f : K^n \to K^n | \exists \varphi \in GL_n \text{ tale che } f(v) - f(w) = \varphi(v - w)\ \forall v, w \in K^n\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{A}ff_n$ è un gruppo (un sottogruppo di $\mathcal{S}_{K^n}$).

Dimostrare che con le notazioni della definizione la funzione $f \mapsto \varphi$ è un ben definito omomorfismo di gruppi e determinarne l'immagine e il nucleo.

Sia $v_0 \in K^n$ e si denoti con $\mathcal{A}ff_n(v_0)$ l'insieme delle affinità di K_n che fissano v_0. Dimostrare che $\mathcal{A}ff_n(v_0)$ è un sottogruppo di $\mathcal{A}ff_n$.

Descrivere i coniugati di $\mathcal{A}ff_n(v_0)$. Determinare $\mathcal{A}ff_n(0)$.

5) Sia $n \in \mathbb{N}$; una permutazione τ di $\{1, ..., n\}$ si chiama *trasposizione* se esistono $i \neq j$ tali che $\tau(k) = \begin{cases} j & \text{se } k = i \\ i & \text{se } k = j \\ k & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Si consideri l'insieme $T = \{\sigma \in \mathcal{S}_n | \sigma \text{ trasposizione}\}$.

Dimostrare che T non è un sottogruppo di $\mathcal{S}_n$.

Dimostrare che T è un sottoinsieme di $\mathcal{S}_n$ stabile per coniugio.

6) Siano $n \in \mathbb{N}$ e si denoti con O_n il gruppo delle matrici ortogonali, cioè il sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ delle matrici A tali che $A^t A = I$. Data $A \in O_n$ sia $Fix(A)$ l'insieme dei punti fissi di A (l'autospazio per A di autovalore 1), cioè l'insieme

$$Fix(A) = \{v \in K^n | Av = v\}.$$

A si dice *riflessione* se $dim_K(Fix(A)) = n - 1$.

Dimostrare che una riflessione è determinata dall'insieme dei suoi punti fissi.

Dimostrare che l'insieme delle riflessioni è stabile per coniugio.