

Azioni di gruppo.

- 1) Si consideri l'azione naturale di \mathcal{S}_n su $I_n = \{1, \dots, n\}$.
Dimostrare che si tratta di un'azione transitiva e determinare gli stabilizzatori di tutti gli elementi.
- 2) Sia $\mathcal{S}_n \curvearrowright I_n = \{1, \dots, n\}$ l'azione naturale e si considerino le seguenti azioni indotte su $I_n \times I_n$: $\rho_1(\sigma)(i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$, $\rho_2(\sigma)(i, j) = (\sigma(i), j)$.
 - i) Determinare le orbite di queste azioni e dire se si tratti di azioni transitive.
 - ii) Determinare gli stabilizzatori di tutti gli elementi.
 - iii) $(I_n \times I_n, \rho_1)$ e $(I_n \times I_n, \rho_2)$ sono \mathcal{S}_n -insiemi isomorfi?
- 3) Si provi che l'azione naturale di \mathcal{S}_n su $I_n = \{1, \dots, n\}$ induce un'azione su $\mathcal{P}(I_n)$.
 - i) Determinare le orbite di $\mathcal{S}_n \curvearrowright \mathcal{P}(I_n)$: \mathcal{S}_n agisce transitivamente su $\mathcal{P}(I_n)$?
 - ii) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{P}_2(I_n) = \{A \in \mathcal{P}(I_n) | \#A = 2\}$ è stabile rispetto all'azione di \mathcal{S}_n e dire se l'azione di \mathcal{S}_n su $\mathcal{P}_2(I_n)$ sia transitiva.
 - iii) Determinare gli stabilizzatori di tutti gli elementi di $\mathcal{P}(I_n)$.
- 4) Siano $k \leq n$ e si considerino le azioni di \mathcal{S}_n indotte su I_n^k e su $\mathcal{P}(I_n)$ dall'azione naturale su $I_n = \{1, \dots, n\}$.
 - i) Dimostrare che la funzione $f : I_n^k \rightarrow \mathcal{P}(I_n)$ data da $(i_1, \dots, i_k) \mapsto \{i_1, \dots, i_k\}$ è un morfismo di \mathcal{S}_n -insiemi.
 - ii) Determinare l'immagine di f .
 - iii) Confrontare lo stabilizzatore di $(1, \dots, k) \in I_n^k$ con lo stabilizzatore di $\{1, \dots, k\} \in \mathcal{P}(I_n)$.
- 5) Si consideri l'azione naturale di $GL_n(K)$ su K^n : $A.v = Av$.
 - i) Determinare le orbite.
 - ii) Dimostrare che $K^n \setminus \{0\}$ è un sottoinsieme $GL_n(K)$ -stabile di K^n : $GL_n(K)$ agisce transitivamente su $K^n \setminus \{0\}$?
 - iii) Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di e_1 .
 - iv) Sia K un campo finito e sia $q = \#K$. Utilizzare il punto iii) per calcolare $\#GL_n(K)$.
- 6) Si consideri l'azione $GL_n(K) \curvearrowright K^n \times K^n$ definita da $A.(v, w) = (Av, Aw)$. Determinare le orbite.
- 7) Sia $\alpha : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\alpha(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \lambda^2 y)$.

- i) Provare che α definisce un'azione di \mathbb{R}^* su \mathbb{R}^2 .
 - ii) Determinare le orbite di α .
 - iii) Determinare $Stab_{\mathbb{R}^*}(x, y)$ al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 8) Sia G un gruppo e sia $i : G \rightarrow G$ definita $i(g) = g^{-1}$.
- i) Provare che i determina un'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(\cong \mathbb{Z}^*)$ su G .
 - ii) Sotto quali condizioni $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agisce per automorfismi di G ?
 - iii) Sotto quali condizioni questa azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su G è banale?
- 9) Siano G un gruppo e $f : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ la funzione definita da $f(r, g) = g^r$.
- i) f è un'azione di \mathbb{Z} su G ?
- Sia G finito di cardinalità $n > 1$.
- ii) Dimostrare che la funzione f determina un'azione $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \curvearrowright G$.
 - iii) Trovare il minimo $m > 1$ tale che f determina un'azione di $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ su G nei casi $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$, G abeliano finito, $G = \mathcal{S}_3$, $G = \mathcal{S}_4$, $G = D_n$.
 - iv) In generale sotto quali condizioni su $m \in \mathbb{N}$ la funzione f determina un'azione $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \curvearrowright G$?
- 10) Siano H, K due gruppi e sia X un $(H \times K)$ -insieme.
- i) Notare che $H \times K \curvearrowright X$ induce su X un'azione di H e un'azione di K .
 - ii) Dimostrare che H agisce su X per morfismi di K -insiemi.
 - iii) Dimostrare che l'azione di H su X indotta da $H \times K \curvearrowright X$ passa al quoziente per K , cioè induce un'azione $H \curvearrowright X/K$.
 - iv) È vero che $(X/K)/H \cong X/(H \times K)$?
 - v) K agisce su X per morfismi di K -insiemi?
- 11) Siano X un insieme, $n \in \mathbb{N}$.
- i) Osservare che l'insieme $X^n(\cong X^{I_n})$ eredita da I_n una azione di \mathcal{S}_n e descrivere esplicitamente $\sigma.(x_1, \dots, x_n)$.
 - ii) Verificare che la funzione

$$\mathcal{S}_n \times X^n \ni (\sigma, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in X^n$$

non definisce una azione di \mathcal{S}_n su X^n .

iii) Sia G un gruppo e sia X dotato di un'azione di G . Dimostrare che l'azione di G su X^n e quella di \mathcal{S}_n definita al punto i) commutano, ed inducono un'azione di $G \times \mathcal{S}_n$ su X^n . Descrivere esplicitamente tale azione.

12) Sia G un gruppo e si consideri l'azione (L, R) di $G \times G$ su G definita da $(L, R)_{(g_1, g_2)}(x) = g_1 x g_2^{-1}$.

i) Dimostrare che l'azione (L, R) è ben definita (è un'azione) e che $(L, R)_{(g_1, g_2)} = L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1}$, dove L e R sono rispettivamente l'azione sinistra e l'azione destra di G su G .

ii) Descrivere lo stabilizzatore di e e più in generale lo stabilizzatore di $x \in G$ per l'azione (L, R) .

iii) Sia $H \leq G$ e si denoti con $G/R|_H$ il quoziente di G per l'azione destra ristretta ad H ($R|_H : H \ni h \mapsto (x \mapsto xh^{-1}) \in \mathcal{S}_G$); dimostrare che L dota $G/R|_H$ di una struttura di G -insieme e che $G/R|_H = G/H$; descrivere esplicitamente tale azione di G su G/H .

iv) Dimostrare che se $\iota : G \rightarrow G \times G$ è l'immersione nella diagonale ($\iota(g) = (g, g)$ per ogni $g \in G$) allora $(L, R) \circ \iota$ è il coniugio.

13) Siano G un gruppo, X un G -insieme, $x_0 \in X$, $\mathcal{O}(x_0)$ l'orbita di x_0 . Dimostrare che la funzione $G \ni g \mapsto g.x_0 \in X$ induce un isomorfismo di G -insiemi

$$G/Stab_G(x_0) \cong \mathcal{O}(x_0).$$

14) È sempre vero (oppure: sotto quali condizioni è vero) che un'azione di H su X e un'azione di K su X inducono un'azione di $H \times K$ su X ?