

Moduli su anelli

1) Siano A un anello unitario, $B \subseteq A$ un sottoanello (unitario) e sia M un A -modulo. Osservare che la struttura di A -modulo induce su M anche una struttura di B -modulo.

Siano A e B due anelli unitari, M un A -modulo e $f : B \rightarrow A$ un omomorfismo di anelli unitari. Dimostrare che la struttura di A -modulo induce su M , tramite f , una struttura di B -modulo, e descriverla.

2) Osservare che \mathbb{Q} è un \mathbb{Q} -modulo (cioè un \mathbb{Q} -spazio vettoriale) ed è anche un \mathbb{Z} -modulo.

Dimostrare che \mathbb{Q} è un \mathbb{Q} -modulo ciclico ed è un \mathbb{Z} -modulo non finitamente generato.

Dimostrare che tutti gli \mathbb{Z} -sottomoduli finitamente generati di \mathbb{Q} sono ciclici. Dire se \mathbb{Q} sia un \mathbb{Z} -modulo libero.

3) Siano A un anello unitario e $A[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A . Osservare che $A[x]$ è un $A[x]$ -modulo ed è anche un A -modulo.

Dimostrare che $A[x]$ è un $A[x]$ -modulo ciclico ed è un A -modulo non finitamente generato (quindi non ciclico).

Dimostrare che $A[x]$ è un $A[x]$ -modulo libero ed è un A -modulo libero e determinare una base di $A[x]$ come $A[x]$ -modulo e una base di $A[x]$ come A -modulo.

4) Dimostrare che \mathbb{C} è un \mathbb{C} -modulo ciclico ed è un \mathbb{R} -modulo finitamente generato ma non ciclico.

5) Sia p un numero primo e sia $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Studiare la struttura degli A -moduli finitamente generati.

6) Siano p, q primi distinti. Questo esercizio è dedicato allo studio della struttura degli $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ -moduli. Si ponga $A = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

i) Osservare che gli A -moduli sono i gruppi abeliani M in cui $o(x)|pq$ per ogni $x \in M$.

ii) Per quali $m \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è un A -modulo?

iii) Dimostrare che $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ sono A -moduli ciclici (non isomorfi tra loro). Esistono altri A -moduli ciclici?

iv) Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e U uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Dimostrare che $V \oplus U$ (somma diretta di gruppi abeliani) ha una struttura naturale di A -modulo.

v) Sia M un A -modulo e siano

$$M_p = \{x \in M \mid px = 0\}, \quad M_q = \{x \in M \mid qx = 0\}.$$

Dimostrare che M_p e M_q sono A -sottomoduli di M e che $M = M_p \oplus M_q$. Dimostrare inoltre che M_p è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e che M_q è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Concludere che per ogni A -modulo M esistono V spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e U spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tali che $M \cong V \oplus U$ come A -moduli.

vi) È vero che se V, V' sono spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e U, U' sono spazi vettoriali su $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ allora

$V \oplus U \cong V' \oplus U'$ come A -modulo $\Leftrightarrow V \cong V'$ e $U \cong U'$ come spazi vettoriali?

7) Siano K un campo e $A = K[x]$. Osservare che un A -modulo è un K -spazio vettoriale V con un endomorfismo $f \in \text{End}_K(V)$; si denoti tale A -modulo con (V, f) .

i) Determinare tutte le strutture di A -modulo su K a meno di isomorfismo.

ii) Sia (V, f) un A -modulo. Determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché (V, f) sia somma diretta di A -moduli di dimensione 1 su K .

8) Sia A un anello e si consideri la struttura naturale di A -modulo su A (per moltiplicazione a sinistra). Studiare l'anello $\text{End}_A(A)$ e confrontarlo con l'anello A (nel caso A commutativo e nel caso A non commutativo).

9) Siano K un campo e $A = K[x]$. Studiare l' A -modulo (V, f) (cioè studiarne i sottomoduli, dire se sia un modulo ciclico, dimostrare che è finitamente generato, descriverlo come quoziente di A^n per qualche n) nei casi seguenti:

$$V = K^2: \quad f = id_{K^2}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$V = K^3: \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10) Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$. Osservare che un A -modulo è un \mathbb{Q} -spazio vettoriale V con un endomorfismo $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ tale che $f^2 = id_V$; si denoti tale A -modulo con (V, f) .

- i) Osservare che (\mathbb{Q}, id) e $(\mathbb{Q}, -id)$ sono A -moduli (si indichino tali moduli rispettivamente con \mathbb{Q}_1 e \mathbb{Q}_{-1}) e dimostrare che $\mathbb{Q}_1 \not\cong \mathbb{Q}_{-1}$.
- ii) Si consideri l' A -modulo A . Determinare tutti gli A -sottomoduli di A e dimostrare che $A \cong \mathbb{Q}_1 \oplus \mathbb{Q}_{-1}$.

11) Siano K un campo e $A = K[x]/(x^2)$. Osservare che un A -modulo è un K -spazio vettoriale V con un endomorfismo $f \in \text{End}_K(V)$ tale che $f^2 = 0$. Dimostrare che esiste un'unica struttura di A -modulo su K e che, a meno di isomorfismo, esistono due strutture di A -modulo su K^2 .

Quali di questi A -moduli sono ciclici?

12) Siano K un campo, $A = K[x, y]$, $M = (x, y)$ l'ideale (o A -sottomodulo) di A generato da x e da y .

Dimostrare che M non è un A -modulo ciclico, è un A -modulo finitamente generato privo di torsione, non è un A -modulo libero.

13) Si consideri lo $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ -modulo $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Dire quali tra i seguenti elementi di $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ generano uno $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ -modulo libero: 1, 2, 3, 5.

14) Siano M uno \mathbb{Z} -modulo, $m_1, m_2 \in M$ tali che il nucleo dell'omomorfismo di \mathbb{Z} -moduli $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni e_i \mapsto m_i \in M$ ($i = 1, 2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$) sia lo \mathbb{Z} -sottomodulo di $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da $\{(1, 3), (2, 4)\}$.

Dire se m_1 ed m_2 sono di torsione.

Sia N lo \mathbb{Z} -sottomodulo di M generato da $\{m_1, m_2\}$: determinare $\text{Ann}(N)$, dimostrare che N è ciclico ed esibire un generatore di N .

15) Siano M uno \mathbb{Z} -modulo e $\{m_1, m_2\} \subseteq M$ insieme di generatori di M tale che il nucleo dell'omomorfismo di \mathbb{Z} -moduli $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni e_i \mapsto m_i \in M$ ($i = 1, 2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$) sia lo \mathbb{Z} -sottomodulo N di $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da $\{(8, 16), (6, 12)\}$.

Trovare gli annullatori dei seguenti elementi di M :

$$m_1, \quad m_1 + m_2, \quad m_1 + 2m_2, \quad m_1 + 3m_2.$$

Descrivere M come somma diretta di due suoi sottomoduli ciclici.

Dimostrare che N è uno \mathbb{Z} -modulo ciclico.

16) Siano $\{e_1, e_2\}$ la base canonica di \mathbb{Z}^2 , N lo \mathbb{Z} -sottomodulo di \mathbb{Z}^2 generato da $\{2e_1 + 2e_2, 2e_1 - 2e_2\}$, $M = \mathbb{Z}^2/N$, $m_i = e_i + N \in M$.

Calcolare $\text{Ann}(m_1)$ e $\text{Ann}(m_2)$.

Trovare $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2 \in M$ tali che $M = \mathbb{Z}\text{-span}(\tilde{m}_1) \oplus \mathbb{Z}\text{-span}(\tilde{m}_2)$.

Determinare $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $M \cong \mathbb{Z}/(d_1) \oplus \mathbb{Z}/(d_2)$.

17) Dimostrare che un \mathbb{C} -spazio vettoriale è un \mathbb{R} -spazio vettoriale V dotato di un endomorfismo $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tale che $f^2 + id_V = 0$.

Concludere che se V è un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione dispari allora non esiste $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tale che $f^2 + id_V = 0$.

18) Siano K un campo, $A = K[x]$, (V, f) , (U, g) due A -moduli.

i) Dimostrare che $\varphi : V \rightarrow U$ è un omomorfismo di A -moduli se e solo se è un omomorfismo di K spazi vettoriali e $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

ii) Dimostrare che $(V, f) \cong (U, g) \Leftrightarrow$ le matrici che rappresentano f e g sono “simili”.

iii) Dimostrare che se $(V, f) \cong (K^n, B_1)$ e $(U, g) \cong (K^m, B_2)$ (B_1 e B_2 matrici a coefficienti in K) allora

$$(V, f) \oplus (U, g) \cong \left(K^{n+m}, \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \right).$$

19) Siano K un campo, $A = K[x]$.

Dimostrare che gli A -sottomoduli di un A -modulo (V, f) sono i sottospazi vettoriali di V che sono f -stabili.

20) Siano K un campo, $A = K[x]$, $n \in \mathbb{N}$ e si consideri l' A -modulo

$$M = (K^n, J_{0,n}), \quad \text{dove } J_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è il blocco di Jordan $n \times n$ di autovalore zero.

i) Determinare tutti gli A -sottomoduli di M ; quanti sono?

ii) Confrontare gli A -sottomoduli di M con gli A -sottomoduli di $K[x]/(x^n)$.

iii) Dimostrare che $M \cong K[x]/(x^n)$ e descrivere esplicitamente un isomorfismo.

21) Siano K un campo, $A = K[x]$, $a, b, c \in K$. Dimostrare che gli A -moduli

$$\left(K^3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad K[x]/(x^3 - cx^2 - bx - a)$$

sono isomorfi.

22) Siano V un K -spazio vettoriale di dimensione finita, $f \in \text{End}_K(V)$, $p, q \in K[x]$ definiti nel modo seguente:

$$p(x) = \det(x \cdot \text{id}_V - f), \quad (q(x)) = \ker(K[x] \ni x \mapsto f \in \text{End}_K(V))$$

($q(x)$ si chiama polinomio minimo di f ; $p(x)$ è il suo polinomio caratteristico).

Osservare che l'ideale generato da $q(x)$ è l'annullatore del $K[x]$ -modulo (V, f) .

Dimostrare che $q(x) | p(x)$ e che (V, f) è un $K[x]$ -modulo ciclico se e solo se $q(x) = p(x)$.

Determinare condizioni necessarie e sufficienti su $q(x)$ affinché f sia diagonalizzabile.