Ilaria Damiani - Flaminio Flamini: Corso di Algebra 1 - a.a. 2024/25

PROGRAMMA

Insiemi

Insiemi, appartenenza, sottoinsiemi. Il paradosso di Russell. Intersezione e unione; insieme delle parti; prodotto cartesiano; relazioni e funzioni. Funzioni iniettive, funzioni suriettive, funzioni biunivoche. Il concetto di cardinalità. Insiemi finiti e insiemi infiniti.

Numeri naturali, assiomi di Peano, principio di induzione. Insiemi numerabili.

Combinatoria: calcolare la cardinalità di insiemi finiti. Coefficienti binomiali. Principio di inclusione-esclusione (cardinalità dell'unione).

Insiemi infiniti. Cardinalità: primo teorema di Cantor (insieme delle parti); secondo teorema di Cantor (prodotto di due insiemi numerabili); teorema di Cantor-Bernstein-Schröder ($\#X \leq \#Y \leq \#X \Rightarrow \#X = \#Y$). Prodotti infiniti e assioma della scelta.

Categorie

Oggetti, morfismi, composizione, identità; isomorfismi.

Le categorie degli insiemi, dei K-spazi vettoriali, degli anelli (unitari), dei gruppi, dei gruppi abeliani, degli insiemi con una relazione.

Proprietà universali: unicità a meno di unico isomorfismo; esempi: oggetto iniziale, oggetto finale, prodotto.

Relazioni d'ordine

Proprietà riflessiva, proprietà antisimmetrica, proprietà transitiva. Ordinamenti parziali e ordinamenti totali. Morfismi; isomorfismi.

Ordinamento inverso; ordinamento indotto su un sottoinsieme; ordinamento prodotto; ordinamenti lessicografici.

Nozione di massimo e minimo, massimale e minimale, maggiorante e minorante. Diagrammi di Hasse.

Il lemma di Zorn (senza dimostrazione).

Raffinamenti; ogni ordinamento è raffinabile ad un ordinamento totale.

Insiemi ben ordinati. Il principio di buon ordinamento (enunciato) e sua equivalenza al lemma di Zorn e all'assioma della scelta (senza dimostrazione); confronto tra le cardinalità di due insiemi.

Relazioni di equivalenza

Proprietà riflessiva, proprietà simmetrica, proprietà transitiva. Classi di equivalenza. Partizioni.

L'equivalenza indotta da una funzione: fibre. L'equivalenza indotta dall'azione di un gruppo su un insieme: orbite. Intersezione e prodotto tra due relazioni di equivalenza.

Il quoziente: proprietà universale e unicità a meno di unico isomorfismo; esistenza: l'insieme delle classi di equivalenza. Insiemi di rappresentanti.

Funzioni che conservano le relazioni di equivalenza: la funzione indotta tra i quozienti.

Operazioni compatibili con una relazione di equivalenza: l'operazione indotta sul quoziente.

Anelli

Definizione di anello (unitario), di anello commutativo, di dominio di integrità, di campo; (omo)morfismi di anelli.

Immagine e nucleo di un omomorfismo di anelli: sottoanelli e ideali. Immagini e controimmagini tramite un omomorfismo. Insiemi di generatori di anelli e ideali; ideali principali. Ideali massimali e ideali primi.

La caratteristica di un anello.

Il prodotto di anelli.

Il quoziente di un anello per un ideale. Il teorema di omomorfismo (proprietà universale del quoziente) e i tre teoremi di isomorfismo per anelli.

Il teorema cinese dei resti.

Il campo dei quozienti di un dominio di integrità. I domini di integrità finiti sono campi.

La relazione "essere uguali a meno di invertibili".

Domini di integrità: divisibilità, fattorizzazione, elementi irriducibili, elementi primi.

Domini a ideali principali: l'identità di Bézout per il massimo comun divisore; gli irriducibili sono primi; divisori e catene ascendenti di ideali (principali).

Domini a fattorizzazione unica. I domini a ideali principali sono a fattorizzione unica. L'anello dei polinomi a coefficienti in un dominio a fattorizzazione unica è a fattorizzazione unica: il contenuto, il lemma di Gauss, i primi.

Domini euclidei: la divisione con resto e l'algoritmo euclideo. Valutazione euclidea ed elementi invertibili. I domini euclidei sono a ideali principali.

L'anello degli interi. Equazioni diofantee. Il campo dei numeri razionali.

L'anello degli interi modulo n. Elementi invertibili e funzione di Eulero; divisori dello zero; elementi nilpotenti. Il campo degli interi modulo un primo. Congruenze e sistemi di congruenze. Il piccolo teorema di Fermat.

L'anello dei polinomi a coefficienti in un campo. Classificazione degli irriducibili in $\mathbb{C}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$. Criteriio di Eisenstein di irriducibilità in $\mathbb{Q}[x]$. Il campo delle funzioni razionali.

L'anello dei polinomi a coefficienti in un anello qualsiasi e l'anello dei polinomi in un insieme qualsiasi di variabili.

L'anello dei polinomi di Laurent; l'anello delle serie di potenze formali.

Il campo dei numeri complessi.

L'anello degli interi di Gauss. Numeri primi che sono somma di due quadrati e descrizione degli interi di Gauss irriducibili.

L'anello delle matrici quadrate a coefficienti in un campo e i suoi ideali.

Gruppi

Definizione di gruppo e di gruppo abeliano; (omo)morfismi di gruppi.

Immagine e nucleo di un omomorfismo di gruppi: sottogruppi e sottogruppi normali; il caso abeliano. Immagini e controimmagini tramite un omomorfismo. Il sottogruppo generato da un sottoinsieme; insiemi di generatori.

Il prodotto di gruppi. La somma diretta di gruppi abeliani.

Il quoziente di un gruppo per un sottogruppo: classi laterali e teorema di Lagrange. L'ordine di un elemento.

Il quoziente di un gruppo per un sottogruppo normale. Il teorema di omomorfismo (proprietà universale del quoziente) e i tre teoremi di isomorfismo per gruppi.

Gruppi ciclici: classificazione; sottogruppi e quozienti; omomorfismi.

Gruppi abeliani. Gli elementi di ordine finito; gli elementi che hanno ordine la potenza di un primo; p-gruppi. Il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti tramite potenze di primi e tramite divisori elementari.

Il gruppo additivo e il gruppo moltiplicativo di un anello. Il gruppo moltiplicativo degli interi modulo n.

I sottogruppi finiti del gruppo moltiplicativo di un campo.

Il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico.

Il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e gli elementi idempotenti.

Esempi di gruppi abeliani infiniti e di gruppi non abeliani.

Bibliografia

Durante le lezioni e le esercitazioni sono stati trattati tutti gli argomenti riportati nel programma. Tuttavia è importante imparare a cimentarsi anche con il testo scritto e avere riferimenti bibliografici per ulteriori chiarimenti, per lezioni non frequentate, come spunto per autonomi approfondimenti.

Di seguito si forniscono riferimenti puntuali per gli argomenti affrontati nel corso: sono testi di introduzione all'algebra e, benché non siano completamente sovrapponibili, presentano ovviamente ampie intersezioni. Le autrici/autori trattano però la materia con stili e impostazioni diverse.

NB sui quozienti di gruppi. Poiché durante le lezioni sulla teoria dei gruppi l'attenzione è stata concentrata sui gruppi abeliani (la trattazione dei gruppi non abeliani è rimandata al secondo corso di algebra), la nozione di sottogruppo normale non è stata approfondita; in particolare i sottogruppi normali sono stati definiti come i sottogruppi che sono nuclei di omomorfismi e non caratterizzati tramite l'azione di coniugio; viceversa, in tutti i testi i sottogruppi normali sono definiti tramite l'azione di coniugo. Per segnalare questa differenza sono stati indicati con un asterisco i capitoli/paragrafi relativi al quoziente di gruppi.

1) **Piacentini Cattaneo - Algebra, un approccio algoritmico**:

Capitolo 1, Gli insiemi
Capitolo 2, I numeri: tranne i paragrafi 2.5 e 2.9
Capitolo 3, I polinomi: paragrafi 3.1, 3.2, 3.3
Capitolo 4, Gli anelli
Capitolo 5, I gruppi: paragrafi 5.1 (senza esempi 5.1.22, 5.1.23, 5.1.24), 5.5, 5.7, 5.8*, 5.9 (senza 5.9.4 e 5.9.5), 5.10, 5.14 (solo punti 5.14.1, 5.14.2, 5.14.3, 5.14.3. 5.14.14, 5.14.15), 5.17

2) **Schoof e van Geemen - Algebra (note)**:

Capitolo 1, Numeri interi
Capitolo 2, Gruppi: tranne i paragrafi 2.17, 2.18, 2.19
Capitolo 3, Sottogruppi, omomorfismi, prodotti
Capitolo 4, Permutazioni: solo paragrafi 4.1-4.4
Capitolo 5, Generatori, ordine e indice
Capitolo 6*, Sottogruppi normali e gruppi quoziente
Capitolo 7, Teoremi di isomorfismo
Capitolo 8, Anelli
Capitolo 9, Omomorfismi ed ideali
Capitolo 10, Zeri di polinomi: tranne paragrafi 10.13-10.17
Capitolo 11, Ideali primi e massimali
Capitolo 12, Fattorizzazione
Capitolo 13, Fattorizzazione di polinomi

3) **Herstein - Algebra**

Chapter 1, Preliminary notions
Chapter 2, Group theory: sections 2.1-2.4, 2.6*, 2.7

Chapter 3, Ring theory

4) **Lang - Algebra**:

Logical prerequisites

Chapter I, Groups: sections I.2, I.4, I.8 (solo teoremi I.8.1 e I.8.2 e lemma I.8.3), I.11 (solo definizione di categoria e di prodotto)

Chapter II, Rings: sections II.1, II.2, II.3 (senza “The group ring or monoid ring”), II.5,

Chapter IV, Polynomials: sections IV.1 (tranne le propositions IV.1.11 e IV.1.12), IV.2, IV.3, IV.9 (solo la definizione)

5) **Artin - Algebra**:

Capitolo 10, Anelli: paragrafi 10.1-10.7 fino al teorema 7.6 escluso

Capitolo 11, Fattorizzazione: paragrafi 11.1-11.5