ESERCIZI - Algebra 1, a.a. 2024/25 (Ilaria Damiani/Flaminio Flamini)

***** VIII *****

RICHIAMI

Definizione 1
Una relazione $\sim \subseteq X \times X$ si dice relazione di equivalenza in X, o semplicemente equivalenza, se $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione 2
Siano X, Y insiemi ed $\sim_X$, $\sim_Y$ equivalenze rispettivamente in X e in Y.
Si dice che una funzione $f : X \to Y$ è compatibile con le equivalenze, o che è un morfismo di insiemi con relazione di equivalenza, (e si scrive anche $f : (X, \sim_X) \to (Y, \sim_Y)$) se $x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \sim_Y f(x_2)$.

Definizione 3
Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in X e sia $a \in X$.
Si chiama classe di equivalenza di a l'insieme $[a] = [a]_\sim = \{b \in X | b \sim a\}$.

Definizione 4
Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in X. Un sottoinsieme $R \subseteq X$ si dice insieme di rappresentanti per $\sim$ se $\forall a \in X \ \#([a] \cap R) = 1$, cioè se la funzione $R \ni r \mapsto [r] \in \{[a] | a \in X\}$ è biunivoca.

Definizione 5
Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in X. Si chiama quoziente di X per $\sim$ una coppia $(X/\sim, \pi)$ dove $X/\sim$ è un insieme e $\pi : X \to X/\sim$ è una funzione con le seguenti proprietà:
i) $x_1 \sim x_2 \Rightarrow \pi(x_1) = \pi(x_2)$;
ii) $\forall (Y, f)$ con Y insieme ed $f : X \to Y$ funzione tale che

$$x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$\exists! \bar{f} : X/\sim \to Y$ tale che $\bar{f} \circ \pi = f$.
La funzione $\bar{f}$ si chiama funzione indotta da f sul quoziente, e si dice che f passa al quoziente.

Teorema
1) Il quoziente di X per $\sim$ esiste ed è unico a meno di unico isomorfismo.
2) Siano $\bar{X}$ un insieme e $p : X \to \bar{X}$ una funzione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) $(\bar{X}, p)$ è quoziente di X per $\sim$;

ii) $\exists \varphi : \{[a] | a \in X\} \to \bar{X}$ biunivoca e $p(a) = \varphi([a])$ $\forall a \in X$;

iii) $\exists R$ insieme di rappresentanti e $\varphi : \bar{X} \to R$ biunivoca tale che $\{\varphi(p(a))\} = [a] \cap R$;

iv) $(x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow p(x_1) = p(x_2))$ e p suriettiva.

Teorema

Siano $(X, \sim_X)$ e $(Y, \sim_Y)$ due insiemi con equivalenza e siano $(X/\sim_X, \pi_X)$, $(Y/\sim_Y, \pi_Y)$ i loro quozienti.

Per ogni $f : (X, \sim_X) \to (Y, \sim_Y)$ (cioè per ogni $f : X \to Y$ compatibile con le equivalenze) $\exists! \bar{f} : X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ tale che $\bar{f} \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$.

La funzione $\bar{f}$ si chiama funzione indotta da f sul quoziente, e si dice che f passa al quoziente.

Osservare che la funzione $\bar{f}$ definita nella Definizione 5 si ottiene quando $\sim_Y$ è la relazione di uguaglianza.

ESERCIZI

1) Sia $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione definita nel modo seguente:

$$m \sim n \Leftrightarrow m = n \text{ oppure } m = -n.$$

Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{Z}/\sim$.

2) Sia X un insieme finito e sia $\sim \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ la relazione definita nel modo seguente:

$$A \sim B \Leftrightarrow \#A = \#B.$$

Dimostrare che $\sim$ è un'equivalenza e descrivere $\mathcal{P}(X)/\sim$.

3) Siano X, Y insiemi, $f : X \to Y$ e $\sim_f$ la relazione definita da

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Dimostrare che $\sim_f$ è un'equivalenza e che $(Im(f), f) = (X/\sim_f)$.

4) Sia $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione definita nel modo seguente:

$$m \sim n \Leftrightarrow m \text{ e } n \text{ sono entrami pari o entrambi dispari.}$$

Siano inoltre $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da $f(n) = n + 1$ e $g(n) = 2n$.

i) Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{Z}/\sim$.

ii) Dimostrare che f e g sono compatibili con $\sim$ e determinare $\bar{f}$ e $\bar{g}$.

5) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbb{R}$ nel modo seguente: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e studiare il quoziente $\mathbb{R}/\sim$. Dimostrare che la somma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è compatibile con $\sim$ e induce un'operazione $+'$ sul quoziente; dedurne che $\mathbb{R}/\sim$ eredita da $\mathbb{R}$ una struttura di gruppo e descrivere il gruppo $(\mathbb{R}/\sim, +')$.

6) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbb{R}$ nel modo seguente: $x \sim y \Leftrightarrow x$ e y hanno la stessa parte intera, cioè se

$$max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq y\}.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e studiare il quoziente $\mathbb{R}/\sim$.

7) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{R}/\sim$.

8) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\sim$.

9) Siano $S^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ e n un intero positivo. Sia $\sim \subseteq S^1 \times S^1$ la relazione definita da $z \sim w \Leftrightarrow z^n = w^n$.
Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $S^1/\sim$.

10) Sia $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la relazione definita da

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{R}^2/\sim$.

11) Sia $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la relazione definita da $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^*$ tale che $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$.
Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{R}^2/\sim$ e il quoziente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\sim$.

12) Sia $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la relazione definita da $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^*$ tale che $y_1 = ax_1$, $x_2 = ay_2$.

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{R}^2/\!\sim$.

13) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nel modo seguente:

$$f \sim g \Leftrightarrow f\big|_{[0,1]} = g\big|_{[0,1]}.$$

Si considerino inoltre le seguenti funzioni $\varphi, \psi, \chi, ev_a : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $(a \in \mathbb{R})$:

$$\varphi(f)(x) = f(x{+}1),\ \psi(f)(x) = f(x){+}1,\ \chi(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right),\ ev_a(f)(x) = f(a).$$

Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\!\sim$. Dire inoltre quali tra le funzioni $\varphi, \psi, \chi, ev_a$ passano al quoziente e tra queste quali funzioni indotte sul quoziente siano invertibili.

14) Sia ρ una relazione riflessiva e transitiva su X e sia $\sim = \rho \cap \rho^{-1}$. Dimostrare che:

i) $\sim$ è una relazione di equivalenza;

ii) ρ è compatibile con $\sim$, cioè se $a \sim b$ e $c \sim d$ allora $(a\rho c \Leftrightarrow b\rho d)$;

iii) ρ induce una relazione $\preceq$ su $X/\!\sim$;

iv) $(X/\!\sim, \preceq)$ è un insieme ordinato.

15) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente:

$$(x_1, x_2)\rho(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1.$$

Osservare che ρ è una relazione riflessiva e transitiva: con le notazioni dell'esercizio 14) determinare e descrivere l'insieme ordinato $(\mathbb{R}^2/\!\sim, \preceq)$.

16) Siano A un insieme, $X = \mathscr{P}(A)$ e $\rho \subseteq X \times X$ la relazione definita nel modo seguente: $B\rho C \Leftrightarrow \#B \leq \#C$.

i) Osservare che ρ è una relazione riflessiva e transitiva: con le notazioni dell'esercizio 14) determinare e descrivere l'insieme ordinato $(X/\!\sim, \preceq)$.

ii) Dire se $(X/\!\sim, \preceq)$ sia totalmente ordinato.

17) Si consideri l'azione del gruppo $\{\pm 1\} = \mathbb{Z}^*$ su $\mathbb{Z}$ indotta dal prodotto $(\varepsilon.n = \varepsilon n)$ e la relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$n \sim m \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \text{ tale che } m = \varepsilon n.$$

Descrivere le orbite.

Dimostrare che $(\mathbb{N}, \mathbb{Z} \ni n \mapsto |n|)$ è il quoziente di $\mathbb{Z}$ per $\sim$.

18) Sia K un campo e sia $\sim$ la relazione definita su $K[x]$ nel modo seguente:

$$p(x) \sim q(x) \Leftrightarrow \exists a \in K^* \text{ tale che } q(x) = ap(x).$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere il quoziente $K[x]/\sim$.

19) Siano $m, n \in \mathbb{N}$, K un campo e $\sim$ la relazione definita su $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ nel modo seguente:

$$A \sim A' \Leftrightarrow \exists B_1 \in GL(m, K), B_2 \in GL(n, K) \text{ tali che } A' = B_1AB_2.$$

Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
Determinare $\mathcal{M}_{m\times n}(K)/\sim$ e calcolarne la cardinalità.

20) Dato $n \in \mathbb{Z}$ si consideri la relazione $\equiv_n$ definita su $\mathbb{Z}$ nel modo seguente:

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow n|a - b.$$

Dimostrare che $\equiv_n$ è una relazione di equivalenza, descrivere $\mathbb{Z}/\equiv_n$ e calcolarne la cardinalità.

i) Per quali $n, m \in \mathbb{Z}$ la funzione $id_{\mathbb{Z}}$ è un morfismo tra $(\mathbb{Z}, \equiv_n)$ e $(\mathbb{Z}, \equiv_m)$? Dimostrare che se $id_{\mathbb{Z}}$ passa al quoziente la funzione indotta è suriettiva ma non necessariamente iniettiva.

ii) Per quali $m, n, k \in \mathbb{Z}$ la funzione $\mathbb{Z} \ni a \mapsto ka \in \mathbb{Z}$ è un morfismo tra $(\mathbb{Z}, \equiv_n)$ e $(\mathbb{Z}, \equiv_m)$?

21) Questo esercizio presenta un modo per costruire l'anello Z.
Siano $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e si definiscano:

i) $+ : X \times X \to X$: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

ii) $\cdot : X \times X \to X$: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$;

iii) $\rho \subseteq X \times X$: $(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a + d \leq c + b$.

iv) $\sim \subseteq X \times X$: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a, b)\rho(c, d)$ e $(c, d)\rho(a, b)$.

Dimostrare che:

a) $+$ è un'operazione associativa, commutativa, con elemento neutro.

b) $\cdot$ è un'operazione associativa, commutativa, con elemento neutro.

c) $\forall x, y, z \in X$ si ha $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

d) $x\rho y \Leftrightarrow (x + z)\rho(y + z)$ $\forall z \in X$.

e) $(0, 0)\rho x$ e $(0, 0)\rho y \Rightarrow (0, 0)\rho(x \cdot y)$.

f) La funzione $f : (\mathbb{N}, +, \cdot, \leq) \to (X, +, \cdot, \rho)$ definita da $f(n) = (n, 0)$ conserva somma, prodotto, elemento neutro e relazione. Che cosa si può dire della funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $g(n) = (0, n)$?

g) ρ è riflessiva e transitiva.

h) $\sim$ è una relazione di equivalenza (con quoziente $(X/\!\sim, \pi)$), e si ha $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$.

i) Prima di affrontare i prossimi punti, cioè lo studio della struttura su $X/\!\sim$ indotta, tramite π, dalla struttura su X, determinare e visualizzare le classi di equivalenza e un insieme di rappresentanti di $(X, \sim)$.

l) ρ induce un ordinamento totale $\leq$ su $X/\!\sim$.

m) $+$ è compatibile con $\sim$ e induce una somma $+ : X/\!\sim \times X/\!\sim \to X/\!\sim$ associativa, commutativa e con elemento neutro; inoltre $(X/\sim, +)$ è un gruppo: determinare $-\pi((a, b))$.

n) $\cdot$ è compatibile con $\sim$ e induce un prodotto $\cdot : X/\!\sim \times X/\!\sim \to X/\!\sim$ associativo, commutativo e con elemento neutro.

o) $(X/\!\sim, +, \cdot, \leq)$ è un anello ordinato.

p) La funzione $j = \pi \circ f : \mathbb{N} \to X$ è iniettiva e conserva somma, prodotto, elemento neutro e relazione.

q) Tramite l'identificazione di $\mathbb{N}$ con $j(\mathbb{N})$ si ha

$$X/\!\sim = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \text{ e } \mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}) = \{0\}.$$

r) $\pi((a, b))$ è la soluzione dell'equazione $a = x + b$. Qual è la soluzione dell'equazione $\pi((a, b)) = x + \pi((c, d))$?

s) Per ogni $(G, *)$ gruppo con elemento neutro e e per ogni $g \in G$ esiste un unico morfismo di gruppi $(X/\!\sim, +) \to (G, *)$ tale che $1 \mapsto g$.
[Ricordare che esiste un'unica funzione $\gamma : \mathbb{N} \to G$ tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(n + 1) = \gamma(n) * g$.]

t) Per ogni anello A esiste un unico morfismo di anelli $X/\!\sim \to A$.

u) $(X/\!\sim, +, \cdot)$ è l'anello $\mathbb{Z}$ (cioè l'oggetto iniziale della categoria degli anelli unitari).

v) Descrivere esplicitamente la proiezione sul quoziente

$$\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} = X \to X/\!\sim = \mathbb{Z}.$$

z) **In conclusione questo esercizio dimostra che**:

-) Esiste l'oggetto iniziale della categoria degli anelli unitari, oggetto (anello unitario) che denotiamo con $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

-) $\mathbb{Z}$ contiene $\mathbb{N}$ (e le operazioni in $\mathbb{Z}$ estendono quelle in $\mathbb{N}$) ed è la minima estensione di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ in cui l'equazione $x + a = b$ sia sempre risolubile.

-) $\mathbb{Z}$ è l'anello degli interi a noi familiare, cioè $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\}$.

-) Il gruppo additivo di $\mathbb{Z}$ soddisfa un'altra proprietà universale:
$(\mathbb{Z}, +, 1)$ è l'elemento iniziale della categoria così definita:
Oggetti: $(G, *, g)$ tale che $(G, *)$ gruppo, $g \in G$;
Morfismi: $f : (G, *, g) \to (H, \star, h) \Leftrightarrow f : G \to H$ omomorfismo di gruppi e $f(g) = h$.