ESERCIZI - Algebra 1, a.a. 2024/25 (Ilaria Damiani/Flaminio Flamini)

***** VII *****

RICHIAMI

Definizione 1
Una relazione $R \subseteq X \times X$ si dice:

i) relazione d'ordine, o ordinamento, se R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva;

ii) relazione d'ordine totale, o ordinamento totale, se è un ordinamento e inoltre $\forall a, b \in X$ si ha aRb oppure bRa.

Se $R \subseteq X \times X$ è un ordinamento (X, R) si dice insieme ordinato; se inoltre R è un ordinamento totale (X, R) si dice insieme totalmente ordinato;

Definizione 2
Siano (X, R), (Y, S) insiemi ordinati.
Una funzione $f : X \to Y$ si chiama morfismo di insiemi ordinati (e si scrive anche $f : (X, R) \to (Y, S)$) se $x_1 R x_2 \Rightarrow f(x_1) S f(x_2)$.
Un morfismo di insiemi ordinati $f : (X, R) \to (Y, S)$ si dice isomorfismo (di insiemi ordinati) se esiste $g : (Y, S) \to (X, R)$ tale che $g \circ f = id_{(X,R)}$ e $f \circ g = id_{(Y,S)}$.
(X, R) e (Y, S) si dicono isomorfi (e si scrive $(X, R) \cong (Y, S)$) se esiste un isomorfismo $f : (X, R) \to (Y, S)$.

Definizione 3
Siano (X, R) un insieme ordinato e R^σ la relazione inversa di R, cioè la relazione definita nel modo seguente:

$$aR^\sigma b \Leftrightarrow bRa.$$

R^σ è un ordinamento su X e si chiama ordinamento inverso di R.

Definizione 4
Siano (X, R) un insieme ordinato, $Y \subseteq X$ un sottoinsieme; la relazione $R \cap (Y \times Y)$ è un ordinamento su Y che si chiama ordinamento indotto su Y da R (o da X, o da (X, R)).

Definizione 5
Siano (X, R) un insieme ordinato, $C \subseteq X$ un sottoinsieme.
C si dice catena (o R-catena) se C è totalmente ordinato con l'ordinamento indotto da R.

Definizione 6
Siano (X, R), (Y, S) insiemi ordinati; allora:
i) La relazione P definita su $X \times Y$ nel modo seguente:

$$(x_1, y_1)P(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 R x_2 \text{ e } y_1 S y_2$$

è un ordinamento e si chiama ordinamento prodotto; si scrive anche

$$(X \times Y, P) = (X, R) \times (Y, S).$$

ii) La relazione L definita su $X \times Y$ nel modo seguente:

$$(x_1, y_1)L(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 R x_2 \text{ e } x_1 \neq x_2) \text{ oppure } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 S y_2$$

è un ordinamento e si chiama ordinamento lessicografico indotto su $X \times Y$ da R e da S.

Definizione 7
Siano R e S due ordinamenti su X.
S si dice raffinamento di R se $R \subseteq S$, cioè se $x_1 R x_2 \Rightarrow x_1 S x_2$.

Definizione 8
Sia $R \subseteq X \times X$ un ordinamento; un elemento $a \in X$ si dice:
i) massimo di (X, R) se $\forall b \in X$ si ha bRa; in tal caso si scrive $a = max_R(X)$;
ii) minimo di (X, R) se $\forall b \in X$ si ha aRb; in tal caso si scrive $a = min(X)$;
iii) massimale in X se $(aRb \Rightarrow b = a)$;
iv) minimale in X se $(bRa \Rightarrow b = a)$.

Definizione 9
Siano $R \subseteq X \times X$ un ordinamento e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Un elemento $a \in X$ si dice:
i) maggiorante di Y se $\forall y \in Y$ si ha yRa;
ii) minorante di Y se $\forall y \in Y$ si ha aRy.

Definizione 10
Sia (X, R) un insieme ordinato.
(X, R) si dice ben ordinato se per ogni $Y \subseteq X$ tale che $Y \neq \emptyset$ esiste $min_R(Y)$.

ESERCIZI

1) Dimostrare che gli insiemi totalmente ordinati $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \geq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sono a due a due non isomorfi.

2) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \leq) \cong (\mathbb{Z}, \geq)$.

3) Dimostrare che $(\mathbb{N}, \leq)$ è ben ordinato e che $(\mathbb{N}, \geq)$ e $(\mathbb{Z}, \leq)$ non sono ben ordinati.

4) Siano $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $\mathbb{R}_\geq = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.
Dire se $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{R}_+, \leq)$ e $(\mathbb{R}_\geq, \leq)$ siano ben ordinati. Cè qualche isomorfismo tra loro?

5) Sia R la relazione definita su $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nel modo seguente:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \leq b) \text{ oppure } b = \infty.$$

Dimostrare che $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, R)$ è un insieme ben ordinato e dire se sia isomorfo a $(\mathbb{N}, \leq)$.

6) Sia R la relazione definita su $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ nel modo seguente:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \leq b) \text{ oppure } a = -\infty.$$

Dimostrare che $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, R)$ è un insieme ben ordinato e dire se sia isomorfo a $(\mathbb{N}, \leq)$.

7) Sia $|$ la relazione definita su $\mathbb{Z}$ nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = km.$$

Dimostrare che $(\mathbb{Z}, |)$ non è un insieme ordinato.

8) Sia $|$ la relazione definita su $\mathbb{N}$ nel modo seguente:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = km.$$

Dimostrare che $(\mathbb{N}, |)$ è un insieme ordinato, non totalmente ordinato.
Dimostrare che esistono $min_| \mathbb{N}$ e $max_| \mathbb{N}$.
Determinare, se esistono, massimali e minimali di $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$.

9) Sia X un insieme.
Dimostrare che $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ è un insieme ordinato.
Determinare, se esistono, minimo e massimo di $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$.

Determinare, se esistono, minimali e massimali di $(\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}, \subseteq)$.
Sia $A \subseteq \mathscr{P}(X)$. Determinare maggioranti e minoranti di A.
Se $\#X = 3$ dimostrare che per ogni $\subseteq$-catena $C \subseteq \mathscr{P}(X)$ esiste una $\subseteq$-catena $C' \supseteq C$ tale che $\#C' = 4$. Quante sono le catene con 4 elementi?

10) Dimostrare che esiste $(\mathbb{Q}, \leq) \to (\mathbb{Z}, \leq)$ morfismo suriettivo di insiemi ordinati.

11) Siano $(X, \leq')$, $(Y, \leq'')$ insiemi ordinati e $\leq$ l'ordinamento lessicografico indotto da $\leq'$ e $\leq''$ su $X \times Y$.
Dimostrare che:
i) $\leq$ è un ordinamento totale se e solo se $\leq'$ e $\leq''$ sono ordinamenti totali;
ii) $\leq$ è un buon ordinamento se e solo se $\leq'$ e $\leq''$ sono buoni ordinamenti.

12) Sia $\preceq$ la relazione su $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definita nel modo seguente:

$$f \preceq g \Leftrightarrow f(n) \leq g(n) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che:
i) $\preceq$ è una relazione d'ordine;
ii) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ è isomorfo a un sottoinsieme di $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$.

13) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme $I_n = \{r \in \mathbb{N} | r < n\}$ con l'ordinamento $\leq$ indotto da $\mathbb{N}$ e sia $\preceq$ l'ordinamento lessicografico su $I_n \times I_m$.
Dimostrare che $(I_n \times I_m, \preceq) \cong (I_{nm}, \leq)$.
Costruire un isomorfismo esplicito tra $(I_n \times I_m, \preceq)$ e $(I_{nm}, \leq)$.

14) Sia $\preceq$ l'ordinamento lessicografico su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Dimostrare che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq) \not\cong (\mathbb{N}, \leq)$.

15) Esibire due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ tali che

$$(X \times Y, L_1) \not\cong (Y \times X, L_2)$$

dove L_1 e L_2 sono gli ordinamenti lessicografici indotti da $\leq_X$ e $\leq_Y$ rispettivamente su $X \times Y$ e su $Y \times X$.

16) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e siano $a, b \in X$ tali che $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$.
Esibire un raffinamento $\preceq$ di $\leq$ tale che $a \preceq b$.

17) Siano $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ due insiemi ordinati e siano P, L, L' gli ordinamenti su $X \times Y$ definiti nel modo seguente:
i) P è l'ordinamento prodotto;
ii) L è l'ordinamento lessicografico indotto da $\leq_X$ e $\leq_Y$ su $X \times Y$;

iii) L' è l'ordinamento definito da $(x_1, y_1)L'(x_2, y_2) \Leftrightarrow (y_1, x_1)L_2(y_2, x_2)$ dove L_2 è l'ordinamento lessicografico indotto da $\leq_Y$ e $\leq_X$ su $Y \times X$.
Dimostrare che $P = L \cap L'$.

18) Siano X un insieme e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme e si consideri l'insieme ordinato $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$.
Dire se la funzione $\mathscr{P}(X) \ni A \mapsto Y \cap A \in \mathscr{P}(X)$ sia un morfismo di insiemi ordinati.

19) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e sia $f : X \to \mathscr{P}(X)$ la funzione definita da $f(a) = \{b \in X | b \leq a\}\ \forall a \in X$.
Dimostrare che $f : (X, \leq) \to (\mathscr{P}(X), \subseteq)$ è un morfismo di insiemi ordinati e che f è iniettiva; è vero che f è un isomorfismo (di insiemi ordinati) sull'immagine?

20) Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e sia $f : X \to \mathscr{P}(X)$ la funzione definita da $f(a) = \{b \in X | b < a\}\ \forall a \in X$.
Dimostrare che $f : (X, \leq) \to (\mathscr{P}(X), \subseteq)$ è un morfismo di insiemi ordinati e che se $\leq$ è totale allora f è iniettiva.
Esibire un esempio di ordinamento non totale $\leq$ con f non iniettiva.
Esibire un esempio di ordinamento non totale $\leq$ con f iniettiva.