ESERCIZI - Algebra 1, a.a. 2024/25 (Ilaria Damiani/Flaminio Flamini)

***** IV *****

ESERCIZI sugli INTERI

1) Determinare il massimo comun divisore d di 45 e 7 e trovare una coppia (a, b) di numeri interi tali che $d = 45a + 7b$.

2) Determinare il massimo comun divisore d di 125 e 13 e trovare una coppia (a, b) di numeri interi tali che $d = 125a + 13b$.

3) Siano $a = ma'$, $b = mb'$, $d = MCD(a, b)$, $d' = MCD(a', b')$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $d = md'$. Osservare che $d = ax + by \Leftrightarrow d' = a'x + b'y$.

4) Fattorizzare i numeri 10001 e 2701, trovarne il MCD e scriverlo nella forma 10001a+2701b.

5) Fattorizzare i numeri 1927 e 2993, trovarne il MCD e scriverlo nella forma 1927a+2993b.

6) Siano $k \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ la successione definita nel modo seguente:

$$a_n = \begin{cases} k & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + MCD(202, a_{n-1}) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Dimostrare che esiste $n_0 \geq 1$ tale che $202|a_n$ per ogni $n \geq n_0$.

7) Sia $a \in \mathbb{Z}$ un numero primo con 3 e sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita nel modo seguente:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a & \text{se } n = 1 \\ 5a_{n-1} + 3a_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Dimostrare che $(a_n, a_{n+1}) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

8) Trovare le soluzioni intere delle seguenti equazioni:
- i) $441x + 119y = 35$;
- ii) $899x + 1073y = 30$;
- iii) $899x + 1073y = 29$;
- iv) $731x + 529y = a$ $(a \in \mathbb{Z})$;
- v) $729x + 225y + 300z = 3$.

9) Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita nel modo seguente:

$$f(a, b) = 57a + 111b.$$

i) Determinare l'immagine di f;
ii) $12 \in Im(f)$? $64 \in Im(f)$?;
iii) determinare $f^{-1}(0)$;
iv) per ogni $r \in \mathbb{Z}$ determinare $f^{-1}(r)$.

10) Siano $m, n, l \in \mathbb{Z}$ e si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definita nel modo seguente: $f(a, b, c) = am + bn + cl$.
i) Qual è l'immagine di f?
ii) f è iniettiva?
Osservare che su $\mathbb{Z}^3$ sono definite le seguenti operazioni:
somma: $(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$;
prodotto: $(a, b, c)(a', b', c') = (aa', bb', cc')$;
prodotto per numeri interi: $r(a, b, c) = (ra, rb, rc)$.
iii) f conserva la somma?
iv) f conserva il prodotto?
v) f conserva il prodotto per numeri interi?
Cioè: è vero che $\forall x, y \in \mathbb{Z}^3$ e $\forall r \in \mathbb{Z}$ si ha

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y),\ f(rx) = rf(x)?$$

11) Sia n un intero positivo. Dimostrare che:
i) esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $b \geq a+n$ e $MCD(a+i, b+i) = 1\ \forall i = 1, ..., n$;
ii) esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $b \geq a+n$ e $MCD(a+i, b+i) > 1\ \forall i = 1, ..., n$.

12) Sia $n \geq 3$ un intero. Dimostrare che esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(a_i, a_j) > 1$ per ogni i, j e $MCD(a_i, a_j, a_h) = 1$ per ogni i, j, h distinti.

13) Risolvere le equazioni diofantee

$$x^2 - y^2 = 144 \quad \text{e} \quad x^2 - y^2 = 12,$$

cioè trovarne le soluzioni intere.

14) Determinare tutti i numeri interi positivi p, n, m tali che p sia primo e

$$p^n + 144 = m^2.$$

15) Siano $a, p, q \in \mathbb{Z}$ con p, q primi e $p + q^2 = a^2$.
Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione $x^2 = p^2 + q^n$ non ha soluzioni intere, cioè $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto.

16) Sia n un intero positivo e si consideri la proprietà

$$(*) \qquad \exists\ 1 < a_1 < ... < a_k = n \ \text{ tali che } \ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1.$$

Dimostrare che:

i) se n è la potenza di un primo allora n non ha la proprietà $(*)$;

ii) esistono numeri che hanno la proprietà $(*)$;

iii) se n e m hanno la proprietà $(*)$ anche nm ha la proprietà $(*)$;

iv) se n ha la proprietà $(*)$ anche $2n$ ha la proprietà $(*)$;

v) se n ha la proprietà $(*)$ anche $3n$ ha la proprietà $(*)$;

vi) per ogni $n > 1$ dispari $\exists r \geq 0$ tale che $2^r n$ ha la proprietà $(*)$;

vii) con le notazioni del punto vi) trovare il minimo r per i numeri $n = 3$, $n = 5$, $n = 15$.

17) Per quali numeri interi $b > 6$ il numero che in base b si scrive 5654 è la potenza di un numero primo?

18) Sia $s > 0$. Dimostrare che

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p>0 \text{ primo}} \frac{1}{1-p^s}.$$