

*** II ***

RICHIAMI

Definizione 1: Sia X un insieme; si chiama *ordinamento totale su X* una relazione $\leq$ ($\subseteq X \times X$), con le seguenti proprietà:

- i) $\leq$ è *riflessiva*: per ogni $a \in X$ si ha $a \leq a$;
- ii) $\leq$ è *antisimmetrica*: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;
- iii) $\leq$ è *transitiva*: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
- iv) $\leq$ è *totale*: per ogni $a, b \in X$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

$(X, \leq)$ si chiama *insieme totalmente ordinato*.

Notazione: $a \leq b$ si scrive anche $b \geq a$.

Osservazione: Se $\leq$ è un ordinamento totale anche $\geq$ è un ordinamento totale.

Definizione 2: Si chiama *anello ordinato* il dato $(A, +, \cdot, \geq)$ dove:

- i) $(A, +, \cdot)$ è un anello;
- ii) $(A, \geq)$ è un insieme totalmente ordinato;
- iii) $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$;
- iv) $a, b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.

Definizione 3: Si chiama *campo ordinato* il dato $(K, +, \cdot, \geq)$ dove:

- i) $(K, +, \cdot)$ è un campo;
- ii) $(K, +, \cdot, \geq)$ è un anello ordinato.

ESERCIZI sulle PROPRIETÀ ELEMENTARI di anelli e campi ordinati

1) Sia $(A, +, \cdot, \geq)$ un anello ordinato e siano $a, b, c \in A$.

Dimostrare che:

- i) $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$;
- ii) $a \geq b \Rightarrow -b \geq -a$;
- iii) $a \geq b$ e $c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$ e $ca \geq cb$;
- iv) $a^2 \geq 0$;
- v) $1 \geq 0$ (quindi $1 \geq 0 \geq -1$);
- vi) se a è invertibile allora $a \geq 0 \Leftrightarrow a^{-1} \geq 0$ e $a \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq a^{-1} \geq 0$;
- vii) se $0 \neq 1$ allora non esiste $m \in A$ tale che $m \geq a \forall a \in A$.

2) Sia $(K, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato.

Dimostrare che l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non è risolubile.

Concludere che per risolvere le equazioni algebriche (polinomiali) di grado maggiore di 1 è necessario liberare il concetto di numero da quello di misura e confronto (ordine) tra grandezze.