

*** I ***

RICHIAMI

Definizione 1: Si chiama *gruppo* il dato $(G, *)$ dove G è un insieme e $*$: $G \times G \rightarrow G$ è un'operazione, con le seguenti proprietà:

- i) $*$ è associativa;
- ii) esiste $e \in G$ tale che $e * g = g = g * e$ per ogni $g \in G$;
- iii) per ogni $g \in G$ esiste $h \in G$ tale che $h * g = e = g * h$.

Il gruppo $(G, *)$ si dice *gruppo commutativo* o *gruppo abeliano* se $*$ è commutativa.

Definizione 2: Si chiama *anello* il dato $(A, +, \cdot)$ dove A è un insieme e $+$: $A \times A \rightarrow A$, $\cdot$: $A \times A \rightarrow A$ sono due operazioni, con le seguenti proprietà:

- i) $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
- ii) $*$ è associativa;
- iii) esiste $1_A \in A$ tale che $1_A \cdot a = a = a \cdot 1_A$ per ogni $a \in A$;
- iv) $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$.

ESERCIZI sulle PROPRIETÀ ELEMENTARI di gruppi e anelli

1) Siano X un insieme, $*$: $X \times X \rightarrow X$ un'operazione associativa, $e, e' \in X$ tali che per ogni $a \in X$ si abbia

$$e * a = a, \quad a * e' = a.$$

Dimostrare che $e = e'$.

Concludere che:

- i) l'elemento neutro di un gruppo è unico;
- ii) l'elemento neutro della somma in un anello è unico;
- iii) l'elemento neutro del prodotto in un anello è unico.

2) Siano $(G, *)$ un gruppo, $e \in G$ l'elemento neutro, $g, h, h' \in G$ tali che

$$h * g = e = g * h'.$$

Dimostrare che $h = h'$.

Concludere che l'inverso di un elemento di un gruppo è unico.

3) Sia $(G, *)$ un gruppo con elemento neutro e . Per ogni $g \in G$ si denoti con g^{-1} l'inverso di g .

Dati $g, h, k \in G$ dimostrare che:

- i) $(g^{-1})^{-1} = g$;
- ii) la funzione $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ è iniettiva e suriettiva;
- iii) $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$;
- iv) $g * k = h * k \Rightarrow g = h$;
- v) $k * g = k * h \Rightarrow g = h$;
- vi) $e^{-1} = e$; è vero che se $g^{-1} = g$ allora $g = e$?

4) Siano $(A, +, \cdot)$ un anello, $0 \in A$ l'elemento neutro di $(A, +)$, $1 \in A$ l'elemento neutro di $(A, \cdot)$ e, per ogni $a \in A$, $-a$ l'inverso di a rispetto a $+$ (cioè l'opposto di a). Sia inoltre

$$A^* = \{u \in A \mid \exists v \in A \text{ tale che } v \cdot u = 1 = u \cdot v\}$$

l'insieme degli elementi *invertibili* di A .

[Queste notazioni sono standard e saranno utilizzate senza ulteriore esplicitazione; talvolta per evitare ambiguità l'elemento neutro della somma sarà denotato con 0_A e l'elemento neutro del prodotto sarà denotato con 1_A .]

Dimostrare che:

- i) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ per ogni $a \in A$;
- ii) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ per ogni $a, b \in A$; dedurre che $(-a)(-b) = ab$;
- iii) $0 = 1 \Leftrightarrow A = \{0\}$;
- iv) $(A^*, \cdot)$ è un gruppo; determinarne l'elemento neutro.

Definizione 3: Si chiama *campo* il dato $(K, +, \cdot)$ dove:

- i) $(K, +, \cdot)$ è un anello commutativo;
- ii) $K^* = K \setminus \{0\}$ (equivalentemente $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo (abeliano)).

Osservazione: In un campo si ha sempre $0 \neq 1$.

ESERCIZI di RILETTURA delle proprietà in termini di EQUAZIONI

5) Sia $(G, *)$ un gruppo e siano $g, h \in G$.

- i) Dimostrare che l'equazione $x * g = h$ è sempre risolubile e determinarne le soluzioni: quante sono?
- ii) Dimostrare che l'equazione $g * x = h$ è sempre risolubile e determinarne le soluzioni: quante sono?
- iii) Discutere se/quando le equazioni $x * g = h$ e $g * x = h$ hanno le stesse soluzioni.

6) Sia $(A, +, \cdot)$ un anello e siano $a, b \in A$.

- i) Dimostrare che l'equazione $x + a = b$ è sempre risolubile, e risolverla.
- ii) Discutere la risolubilità e le soluzioni delle equazioni $0 \cdot x = b$ e $x \cdot 0 = b$.

- iii) Dimostrare che se $a \in A^*$ allora l'equazione $a \cdot x = b$ è sempre risolubile, e risolverla: quante soluzioni esistono? e per l'equazione $x \cdot a = b$?
- iv) Sia $a \neq 0$: osservare che le equazioni $a \cdot x = b$ e $x \cdot a = b$ non sono sempre risolubili; che cosa si può dire nel caso in cui $(A, +, \cdot)$ sia un campo?
- v) Dimostrare che se $a \cdot b = 0$ e $b \neq 0$ allora l'equazione $x \cdot a = 1$ non è risolubile e l'equazione $a \cdot x = a \cdot c$ ha più di una soluzione per ogni $c \in A$.
- vi) Si supponga che se $a \neq 0$ l'equazione $x \cdot a = b$ sia sempre risolubile; se ne può dedurre che l'equazione $a \cdot x = b$ è sempre risolubile? se ne può dedurre che A è un campo?

Concludere che i campi sono l'ambiente in cui si possono risolvere (quasi) tutte le equazioni di grado 1, e sono quindi l'ambiente in cui tentare di risolvere anche le equazioni di grado maggiore di 1.

ESERCIZI di OSSERVAZIONE delle definizioni

7) Siano G un insieme, $*$: $G \times G \rightarrow G$ un'operazione associativa, $e \in G$ con le seguenti proprietà:

- i) per ogni $g \in G$ si ha $e * g = g$;
- ii) per ogni $g \in G$ esiste $x \in G$ tale che $x * g = e$.

Dimostrare che $(G, *)$ è un gruppo.

8) Trovare un insieme X dotato di un'operazione associativa $*$: $X \times X \rightarrow X$ tale che:

- i) esiste $e \in X$ tale che $e * a = a$ per ogni $a \in X$;
- ii) per ogni $a \in X$ esiste $b \in X$ tale che $a * b = e$;
- iii) $(X, *)$ non è un gruppo.

Confrontare con il risultato dell'esercizio precedente.

9) Siano $(A, \oplus)$ un gruppo e $*$: $A \times A \rightarrow A$ un'operazione associativa, tali che:

- i) esiste $1 \in A$ tale che $1 * x = x = x * 1$ per ogni $x \in A$;
- ii) $*$ è distributiva rispetto a $\oplus$.

Dimostrare che $(A, \oplus, *)$ è un anello.