Esercizi di algebra elementare (Ilaria Damiani)

V. Relazioni di equivalenza e quozienti

1) Una relazione $\rho \subseteq X \times X$ si dice di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva. Osservare che l'uguaglianza è una relazione di equivalenza.

2) Dire quali delle seguenti relazioni $\rho \subseteq X \times X$ sono di equivalenza:
i) $(X, \rho) = (X, \neq)$;
ii) $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \geq)$, $(\mathbf{Z}, \leq \cap \geq)$;
iii) $(X, \rho) = (\mathbf{N}, |)$, $(\mathbf{Z}, |)$, $(\mathbf{Q}, |)$, $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, |)$, dove $|$ è la divisibilità, cioè $n|m \Leftrightarrow \exists k \in X$ tale che $m = nk$;
iv) $X = \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$, ρ è la relazione definita da $a\rho b \Leftrightarrow |a| = |b|$;
v) $X = \mathcal{L}^+_{\mathbf{R}} = \{a : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \exists l \in \mathbf{R}$ tale che $a_n \leq l \ \forall n \in \mathbf{N}\}$, ρ è la relazione definita da $a\rho b \Leftrightarrow sup\{a_n | n \in \mathbf{N}\} = sup\{b_n | n \in \mathbf{N}\}$;
vi) $X = \mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \{a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$, ρ è la relazione definita da $a\rho b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}$ tale che $a_n = b_n$;
vii) $X = \mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \{a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$, ρ è la relazione definita da $a\rho b \Leftrightarrow a_n \leq b_n \forall n \in \mathbf{N}$.

3) Sia $\rho \subseteq X \times X$ una relazione simmetrica e transitiva.
i) Provare che se $a\rho b$ con $a, b \in X$ allora $a\rho a$;
ii) è vero che ρ è riflessiva?
iii) fare un esempio di una relazione simmetrica e transitiva che non sia di equivalenza.

4) Siano X un insieme, $\rho \subseteq X \times X$ una relazione di equivalenza su X, $Y \subseteq X$. Dire se la relazione indotta da ρ su Y (cioè la relazione $\rho \cap (Y \times Y)$) sia di equivalenza.

5) Sia $n \in \mathbf{Z}$ e sia $\equiv_n$ la relazione su $\mathbf{Z}$ definita da $a \equiv_n b \Leftrightarrow n|a - b$.
i) Dimostrare che $\equiv_n$ è una relazione di equivalenza ($\equiv_n$ si chiama congruenza modulo n);
ii) provare che $\equiv_0$ è l'uguaglianza e che $\equiv_1$ è la relazione banale $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$;
iii) sia $m \in \mathbf{Z}$; sotto quali condizioni su m e n si ha che $\equiv_n$ è uguale a $\equiv_m$?

6) Si considerino l'insieme $\mathcal{S}_{\mathbf{C}} = \{a : \mathbf{N} \to \mathbf{C}\}$ e la relazione $\sim$ definita da $a \sim b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbf{Q}, \varepsilon > 0$ (cioè $\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}_+$) $\exists N \in \mathbf{N}$ tale che $|a_r - b_r| < \varepsilon \ \forall r > N$. Dimostrare che:
i) $\sim$ è una relazione di equivalenza;
ii) se $\exists lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbf{C}$ ed $\exists lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbf{C}$ allora $a \sim b \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n$;
iii) se $\exists lim_{n\to\infty} a_n$ e $b \sim a$ allora $\exists lim_{n\to\infty} b_n$;
iv) siano $a, b : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ tali che $\exists lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ed $\exists lim_{n\to\infty} b_n = \infty$; è vero che $a \sim b$?

7) Siano $Y \subseteq X$ e Z insiemi, $\sim \subseteq Z^X \times Z^X$ la relazione definita da $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi|_Y = \psi|_Y$; provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

8) Siano X e Y due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione; si definisca su X la relazione $\sim_f$ nel modo seguente : $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Dimostrare che

$\sim_f$ è una relazione di equivalenza (detta la relazione di equivalenza indotta da f su X).

9) Per ciascuna delle relazioni di equivalenza (X, ρ) viste nell'esercizio 2) cercare un insieme Y e una funzione $f : X \to Y$ tale che ρ sia $\sim_f$.

10) Sia X un insieme; determinare il quoziente di $(X, =)$.

11) Determinare il quoziente $(X/\rho, \pi)$ nelle relazioni di equivalenza (X, ρ) dell'esercizio 2).

12) Sia $(X, \sim)$ un insieme con relazione di equivalenza; dato $a \in X$ si chiama classe (di equivalenza) di a il sottoinsieme $[a]$ di X definito da $[a] = \{b \in X | b \sim a\}$. Dimostrare che $\sim = \bigcup_{a \in X} [a] \times [a]$.

13) Per ciascuna delle relazioni di equivalenza (X, ρ) viste nell'esercizio 2) studiare le classi di equivalenza, cioè determinare $[a]$ $\forall a \in X$.

14) Con le notazioni dell'esercizio 6) determinare la classe di equivalenza della successione $n \mapsto z$ $\forall n \in \mathbf{N}$, dove $z \in \mathbf{C}$ è fissato.

15) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbf{C}^n$ nel modo seguente: $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow \exists \sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ biunivoca tale che $(b_1, ..., b_n) = (a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$.

i) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza;

ii) $\forall a \in \mathbf{C}^n$ determinare la sua classe di equivalenza $[a]$;

iii) $\forall a \in \mathbf{C}^n$ calcolare $\#[a]$.

16) Negli esempi seguenti si considerino l'insieme X e il sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dire se $\mathcal{U}$ sia una partizione di X; in caso affermativo descrivere la corrispondente relazione di equivalenza ρ su X:

i) $X = \mathbf{Z}, \mathcal{U} = \{\{n, -n\} | n \in \mathbf{N}\}$;

ii) $X = \mathbf{Z}, \mathcal{U} = \{\{m \geq n\} | n \in \mathbf{Z}\}$;

iii) $X = \mathbf{R}, \mathcal{U} = \{[a, a+1] | a \in \mathbf{Z}\}$;

iv) $X = \mathbf{R}, \mathcal{U} = \{[a, a+1[| a \in \mathbf{Z}\}$;

v) $X = \mathbf{R}, \mathcal{U} = \{[a, a+1[| a \in \mathbf{R}\}$;

vi) $X = \mathbf{R}, \mathcal{U} = \{a + \mathbf{Z} | a \in \mathbf{R}\}$;

vii) $X = \{\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\}, \mathcal{U} = \{\{\varphi \in X | \varphi(0) = a\} | a \in \mathbf{Z}\}$;

viii) $X = \{\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\}, \mathcal{U} = \{\{\varphi \in X | \varphi(0) = \varphi(1) = a\} | a \in \mathbf{Z}\}$;

ix) $X = \{\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\}, \mathcal{U} = \{\{\varphi \in X | \varphi(0) = a, \varphi(1) = b\} | a, b \in \mathbf{Z}\}$;

x) $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mathcal{U} = \{\{(m+k, n+k) | k \in \mathbf{N}\} | m, n \in \mathbf{N}\}$;

xi) $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mathcal{U} = \{\{(a, b) | a + n = b + m\} | m, n \in \mathbf{N}\}$;

xii) $X = \mathbf{Q}, \mathcal{U} = \{\{\alpha\beta^2 | \beta \in \mathbf{Q}\} | \alpha \in \mathbf{Q}\}$.

17) Siano $(X, \sim)$ un insieme con relazione di equivalenza, $(X/_\sim, \pi)$ il suo quoziente, $Y \subseteq X$; dimostrare che:

i) $\pi|_Y$ è suriettiva $\Leftrightarrow Y \cap [a] \neq \emptyset$ $\forall a \in X$;

ii) $\pi|_Y$ è iniettiva $\Leftrightarrow \#(Y \cap [a]) \leq 1$ $\forall a \in X$;

iii) $\pi|_Y$ è biunivoca $\Leftrightarrow \#(Y \cap [a]) = 1$ $\forall a \in X$.

18) Siano $(X,\sim)$ un insieme con relazione di equivalenza, $(X/_{\sim},\pi)$ il suo quoziente, $\mathcal{R}\subseteq X$ un insieme di rappresentanti per $\sim$, cioè un sottoinsieme di X tale che $\#(\mathcal{R}\cap[a])=1$ $\forall a\in X$, $j:\mathcal{R}\hookrightarrow X$ l'inclusione. Dimostrare che:
i) $\exists! p: X\to\mathcal{R}$ tale che $x\sim x'\Rightarrow p(x)=p(x')$ e $p\circ j=id_{\mathcal{R}}$;
ii) la funzione p di i) è $(\pi|_{\mathcal{R}})^{-1}\circ\pi$ (osservare che per definizione $\pi|_{\mathcal{R}}=\pi\circ j$);
iii) $\forall a\in X$ $(j\circ p)(a)=b$ dove $\{b\}=[a]\cap\mathcal{R}$;
iv) $(\mathcal{R},p)$ è il quoziente di $(X,\sim)$.

19) Per ciascuna delle relazioni di equivalenza (X,ρ) studiate negli esercizi 2) e 16) trovare un insieme di rappresentanti.

20) Sia $n\in\mathbf{N}_+$; dimostrare che $\{0,1,...,n-1\}$ è un insieme di rappresentanti per $(\mathbf{Z},\equiv_n)$; determinare un insieme di rappresentanti per $(\mathbf{Z},\equiv_{-n})$ e per $(\mathbf{Z},\equiv_0)$; per $n\in\mathbf{Z}$ calcolare $\#(Z/\equiv_n)$.

21) Per ognuno degli esempi seguenti si considerino l'insieme X e la relazione $\sim$ definita su X. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza; determinare esplicitamente le classi di equivalenza; studiare il quoziente $(X/\sim,\pi)$:
i) $X=\mathbf{C},\mathbf{R},\mathbf{Z}$ $a\sim b\Leftrightarrow |a|=|b|$;
ii) $X=\mathbf{Z}$, $m\sim n\Leftrightarrow m^2=n^2$;
iii) $X=\mathbf{Z}$, $m\sim n\Leftrightarrow\exists k\in\mathbf{Z}$ tale che $n=2^k m$;
iv) $X=\mathbf{N}\setminus\{0\}$, $m\sim n\Leftrightarrow\exists k\in\mathbf{N}$ tale che $mn=k^2$;
v) $X=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, $m\sim n\Leftrightarrow\exists k\in\mathbf{N}$ tale che $mn=k^2$;
vi) $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $x\sim y\Leftrightarrow x$ e y sono entrambe vocali oppure entrambe consonanti;
vii) $X=\{0,1,2,3,4\}$, $f:X\to X$ definita da $f(0)=2,\ f(1)=3,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=0$, $x\sim y\Leftrightarrow\exists m\in\mathbf{N}$ tale che $y=f^m(x)$;
viii) $X=\{0,1,2,3\}$, $f:X\to X$ definita da $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=0,\ f(3)=3$, $x\sim y\Leftrightarrow\exists m\in\mathbf{Z}$ tale che $y=f^m(x)$;
ix) $X=\mathcal{P}(Y)$ (con $\#Y=n$), $A\sim B\Leftrightarrow\#A=\#B$;
x) $X=\mathcal{P}(\mathbf{N})$, $A\sim B\Leftrightarrow\#A=\#B$;
xi) $X=\mathcal{P}(Y)$ con Y insieme non vuoto, $\alpha\in Y$, $A\sim B\Leftrightarrow\alpha\in A\cap B$ oppure $\alpha\notin A\cup B$;
xii) $X=\{(\pm1,\pm1)\}$, $(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow\exists m\in\mathbf{Z}$ tale che $(x',y')=((-1)^m x,(-1)^m y)$;
xiii) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow x=z$;
xiv) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$ tale che $(z,w)=(x+\lambda,y-\lambda)$;
xv) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow x^2=z^2$, $y^2=w^2$;
xvi) $X=\mathbf{R}^2$, $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ definita da $f(x,y)=(x^2,y^2)$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow f(x,y)=f(z,w)$;
xvii) $X=\mathbf{R}$, $x\sim y\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ tale che $y=\lambda x$;
xviii) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ tale che $(z,w)=(\lambda x,\lambda y)$;
xix) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$, $\lambda>0$, tale che $(z,w)=(\lambda x,\lambda y)$;
xx) $X=\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ tale che $(z,w)=(\lambda x,\lambda y)$;
xxi) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$, $\lambda>0$, tale che $(z,w)=(\lambda x,\lambda^{-1}y)$;
xxii) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow y-x^2=w-z^2$;
xxiii) $X=\mathbf{R}^2$, $(x,y)\sim(z,w)\Leftrightarrow xy=zw$;

xxiv) $X = \{f : \{a, b, c\} \to \mathbf{R}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$;
xxv) $X = \{f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} | f$ biunivoca $\}$, $f \sim g \Leftrightarrow f(3) = g(3)$;
xxvi) $X = \{f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\} | f$ biunivoca $\}$, $f \sim g \Leftrightarrow f(n) = g(n)$;
xxvii) $X = \{f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow \#\{k \in \{1, 2, ..., n\} | f(k) = k\} = \#\{k \in \{1, 2, ..., n\} | g(k) = k\}$;
xxviii) $X = \{f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} | f$ biunivoca $\}$, $f \sim g \Leftrightarrow \#\{k \in \{1, ..., n\} | f(k) = k\} = \#\{k \in \{1, ..., n\} | g(k) = k\}$;
xxix) $X = \mathbf{R}$, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}$;
xxx) $X = \mathbf{R}^2$, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}^2$.

22) Siano $Y \subseteq X$ e Z insiemi, $\sim \subseteq Z^X \times Z^X$ la relazione definita da $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi|_Y = \psi|_Y$ (v. esercizio 7)). Dimostrare che:
i) $(Z^X/_\sim, \pi) = (Z^X, |_Y)$;
ii) se $\#Y = 1$ $Z^X/_\sim \cong Z$;
iii) se $\#Y = n$ $Z^X/_\sim \cong Z^n$;
iv) $\forall \varphi \in Z^X$ $[\varphi] \cong Z^{X \setminus Y}$.

23) Siano, $X = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow f(n) = g(n)$ $\forall n \in \mathbf{Z}$.
i) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e determinarne il quoziente;
ii) $\forall f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ determinare la classe di equivalenza $[f]$ di f.

24) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathcal{C}^0([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R} | f$ continua$\}$ da $f \sim g \Leftrightarrow f|_{]0,1[} = g|_{]0,1[}$. Determinare le classi di equivalenza di $\sim$ e il quoziente di $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \sim)$.

25) Siano (X, ρ) e (Y, σ) due insiemi con relazione di equivalenza e sia τ la relazione definita su $X \times Y$ nel modo seguente: $(x, y)\tau(x', y') \Leftrightarrow x\rho x'$ e $y\sigma y'$. Dimostrare che:
i) τ è una relazione di equivalenza;
ii) $((X/\rho) \times (Y/\sigma), (x, y) \mapsto ([x]_\rho, [y]_\sigma))$ è il quoziente di $X \times Y$ per τ;
iii) $\forall (x, y) \in X \times Y$ si ha $[(x, y)]_\tau = [x]_\rho \times [y]_\sigma$.

26) Siano (X, ρ) un insieme con relazione di equivalenza, Y un insieme e τ la relazione definita su $X \times Y$ nel modo seguente: $(x, y)\tau(x', y') \Leftrightarrow x\rho x'$ e $y = y'$. Dimostrare che τ è una relazione di equivalenza e determinarne il quoziente.

27) Siano (X, ρ) un insieme con relazione di equivalenza, Y un insieme e τ la relazione definita su $X \times Y$ nel modo seguente: $(x, y)\tau(x', y') \Leftrightarrow x\rho x'$. Dimostrare che τ è una relazione di equivalenza e determinarne il quoziente.

28) Siano X e Y due insiemi, ρ una relazione di equivalenza su Y, $f : X \to Y$ una funzione e σ la relazione su X definita da $a\sigma b \Leftrightarrow f(a)\rho f(b)$. Dimostrare che σ è una relazione di equivalenza e determinarne il quoziente.

29) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbf{C}^n$ nel modo seguente: $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow \exists \sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ biunivoca tale che $(b_1, ..., b_n) = (a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)})$ e sia $p : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}[T]$ la funzione definita da $p(a_1, ..., a_n) = \prod_{i=1}^n (T - a_i)$.
i) Dimostrare che $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Rightarrow p(a_1, ..., a_n) = p(b_1, ..., b_n)$;
ii) dimostrare che $\sim$ è la relazione di equivalenza indotta da p;
iii) determinare $Y \subseteq \mathbf{C}[T]$ tale che (Y, p) sia il quoziente di $(\mathbf{C}^n, \sim)$;

iv) dimostrare che $\mathbf{C}^n/_{\sim} \cong \mathbf{C}^n$.

30) Sia $\sim$ la relazione definita su $\mathbf{C}^n$ come nell'esercizio 29) e sia $s : \mathbf{C}^n \to \mathcal{P}(\mathbf{C})$ la funzione definita da $s(a_1, ..., a_n) = \{a_1, ..., a_n\}$.

i) Dimostrare che $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Rightarrow s(a_1, ..., a_n) = s(b_1, ..., b_n)$;

ii) osservare che $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Rightarrow (a_1, ..., a_n) \sim_s (b_1, ..., b_n)$ (dove $\sim_s$ è la relazione di equivalenza indotta da s);

iii) è vero che $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow (a_1, ..., a_n) \sim_s (b_1, ..., b_n)$?

iv) dire se $\sim$ è la relazione di equivalenza indotta da s.