Esercizi di algebra elementare (Ilaria Damiani)

I. Connettivi logici

1) Un'affermazione P può dipendere da uno o più dati (per esempio l'affermazione "il numero intero n è pari" dipende da n); in tal caso per sottolineare la dipendenza da un dato D si scrive $P(D)$ oppure P_D.
Da che dati dipendono le affermazioni seguenti? Sono frasi vere o frasi false?
i) $n^2 = 1$;
ii) $n^2 = k$;
iii) n^2 è pari;
iv) n è intero;
v) se il numero intero positivo n divide 5 allora $n = 1$ oppure $n = 5$.
vi) se il numero intero positivo n divide 6 allora $n = 1$ oppure $n = 6$.
vii) se il numero intero positivo n divide k allora $n = 1$ oppure $n = k$;
viii) $n + m = k$.

2) Sia P una frase; si indica con $-P$ la negazione di P, cioè la frase definita dalla seguente proprietà:
"$-P$ è vera se P è falsa ed è falsa se P è vera".
Tenendo conto che due frasi P e Q si equivalgono se P è vera se e solo se Q è vera, osservare che $-(-P)$ e P si equivalgono.

3) Dire se le affermazioni dell'esercizio 1) sono vere o false e scrivere la loro negazione. Fare lo stesso per le seguenti affermazioni:
i) $a = b$;
ii) $0 \leq 1$;
iii) 4 è pari;
iv) il numero intero n è pari.

4) Introduciamo la seguente notazione: $\forall =$"per ogni"; $\exists =$"esiste", $\nexists =$"non esiste"; $\in=$"in" o "appartiene a".
Da che dati dipendono le seguenti affermazioni? Sono frasi vere o false? Qual è la loro negazione?
i) $\forall n$ intero n^2 è intero;
ii) $\exists k, h$ interi tali che $n = hk$ e $k, h < n$;
iii) $\exists x \in A$ tale $x^2 = 2$;
iv) $\forall x \in A$ $\exists y \in A$ tale che $x + y = 0$.

5) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scrivere la loro negazione (notazione: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ è l'insieme dei numeri naturali; $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ è l'insieme dei numeri interi; inoltre per $a, b \in \mathbf{Z}$ $a|b$ si legge "a divide b"e significa $\exists c \in \mathbf{Z}$ tale che $b = ac$):
i) $\exists n \in \mathbf{Z}$ tale che $2|n$ (cioè esiste un numero intero pari);
ii) $\forall n \in \mathbf{Z}$ $2|n$ (cioè ogni numero intero è pari);

iii) $\exists x \in \mathbf{Z}$ tale che $2x$ sia pari;
iv) $\forall x \in \mathbf{Z}$ $2x$ è pari;
v) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $x^2 = x$;
vi) $\forall x \in \mathbf{N}$ $x^2 = x$;
vii) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $x^2 = x + 1$;
viii) $\forall x \in \mathbf{N}$ $x^2 = x + 1$;
xix) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $x + 1 \notin \mathbf{N}$;
x) $\forall x \in \mathbf{N}$ $x + 1 \notin \mathbf{N}$;
xi) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $x + 1 \in \mathbf{N}$;
xii) $\forall x \in \mathbf{N}$ $x + 1 \in \mathbf{N}$;
xiii) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $x - 1 \notin \mathbf{N}$;
xiv) $\forall x \in \mathbf{N}$ $x - 1 \notin \mathbf{N}$;
xv) $\exists x \in \mathbf{Z}$ tale che $x^2 < 0$;
xvi) $\forall x \in \mathbf{Z}$ $x^2 < 0$;
xvii) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $\exists y \in \mathbf{N}$ tale che $x + y = 0$;
xviii) $\forall x \in \mathbf{N}$ $\exists y \in \mathbf{N}$ tale che $x + y = 0$;
xix) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $\forall y \in \mathbf{N}$ $x + y = 0$;
xx) $\exists x \in \mathbf{N}$ tale che $\forall y \in \mathbf{N}$ $xy = 0$;
xxi) $\forall x \in \mathbf{Z}$ $\exists y \in \mathbf{Z}$ tale che $x + y = 0$;
xxii) $\exists x \in \mathbf{Z}$ tale che $\forall y \in \mathbf{Z}$ $x + y = 0$.

6) Siano P e Q due frasi.

Si indica con (P e Q) la frase definita dalla seguente proprietà: "(P e Q) è vera se e solo se P e Q sono entrambe vere"; si indica con (P oppure Q) la frase definita dalla seguente proprietà: "(P oppure Q) è vera se e solo se almeno una tra P e Q è vera".

i) Osservare che (P e Q)=(Q e P) e che (P oppure Q)=(Q oppure P);
ii) scrivere la negazione di (P e Q);
iii) scrivere la negazione di (P oppure Q);
iv) (P e $-P$) è vera?
v) (P oppure $-P$) è vera?
vi) sia R una frase; osservare che ((P e Q) e R)=(P e (Q e R)) e ((P oppure Q) oppure R)=(P oppure (Q oppure R));
vii) sia R una frase; è vero che ((P e Q) oppure R)=(P e (Q oppure R))?
viii) sia R una frase; dimostrare che ((P e Q) oppure R)=((P oppure R) e (Q oppure R)) e che ((P oppure Q) e R)=((P e R) oppure (Q e R)).

7) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scrivere la loro negazione:
i) $2|6$ e $3|6$;
ii) $2|6$ oppure $3|6$;
iii) $4|6$ e $3|6$;
iv) $4|6$ oppure $3|6$;
v) $\forall n \in \mathbf{Z}$ si ha $n + 1 \in \mathbf{Z}$ e $2|n$;
vi) $\forall n \in \mathbf{Z}$ si ha $n + 1 \in \mathbf{Z}$ oppure $2|n$;

8) Siano P e Q due frasi.

Si indica con $(P \Rightarrow Q)$ (e si legge "P implica Q") la frase definita nel modo seguente: "$(P \Rightarrow Q)$=$-(P$ e $-Q)$".

i) Dimostrare che se P è vera e $P \Rightarrow Q$ è vera, allora Q è vera.

ii) Dimostrare che se P è falsa allora $P \Rightarrow Q$ è vera.

iii) Osservare che $P \Rightarrow Q$ vera non dice nulla sulla verità di P e non dice nulla sulla verità di Q.

iv) Osservare che $(P \Rightarrow Q)$=($(-P)$ oppure Q);

v) $P \Rightarrow P$ è vera?

vi) dire se $(P \Rightarrow Q)=(Q \Rightarrow P)$;

vii) dimostrare che $(P \Rightarrow Q)=((-Q) \Rightarrow (-P))$;

viii) provare che (($P \Rightarrow Q$) e ($Q \Rightarrow P$))=((P e Q) oppure ($-P$ e $-Q$)); la frase (($P \Rightarrow Q$) e ($Q \Rightarrow P$)) si scrive anche $(P \Leftrightarrow Q)$ e si legge (P se e solo se Q);

ix) è vero che (P e Q)$\Rightarrow P$? e il viceversa?

x) è vero che (P oppure Q)$\Rightarrow P$? e il viceversa?

xi) è vero che (P e Q)$\Rightarrow$ (P oppure Q)? e il viceversa?

xii) siano R ed S due frasi; dimostrare che ($P \Rightarrow Q$ e $R \Rightarrow S$)$\Rightarrow$ ((P e R)$\Rightarrow$ (Q e S)); è vero il viceversa?

xiii) siano R ed S due frasi; dire se ($P \Rightarrow Q$ e $R \Rightarrow S$)$\Rightarrow$ ((P oppure R)$\Rightarrow$ (Q oppure S));

xiv) siano R ed S due frasi; quali implicazioni si possono dedurre da ($P \Rightarrow Q$ oppure $R \Rightarrow S$)?

xv) sia R una frase; dimostrare che ($P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$)$\Rightarrow$ $(P \Rightarrow R)$;

9) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e scrivere la loro negazione:

i) $n \in \mathbf{Z}$, $2|n \Rightarrow 4|n$;

ii) $n \in \mathbf{Z}$, $4|n \Rightarrow 2|n$;

iii) $n \in \mathbf{Z}$, $6|n \Rightarrow 2|n$ e $3|n$;

iv) $n \in \mathbf{Z}$, $2|n$ e $3|n \Rightarrow 6|n$;

v) $n \in \mathbf{Z}$, $2|n \Rightarrow 2|(n+2)$;

vi) $n \in \mathbf{Z}$, $2|n \Rightarrow 2|n^2$;

vii) $n \in \mathbf{Z}$, $2 \not| n \Rightarrow 2 \not| n^2$;

vii) siano $n, a, b \in \mathbf{Z}$; allora $n|a$ e $n|b \Rightarrow n|(a+b)$;

viii) sia $n \in \mathbf{Z}$; allora $\nexists k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 2k \;\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 2k+1$;

ix) sia $n \in \mathbf{Z}$; allora $\nexists k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 3k \;\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 3k+1$;

x) $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbf{Z}$ tale $n = 3k$ oppure $\exists k \in \mathbf{Z}$ tale $n = 3k+1$ oppure $\exists k \in \mathbf{Z}$ tale $n = 3k+2$;

xi) $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$;

xii) $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|bc$;

xiii) $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a|c$ e $b|c \Rightarrow ab|c$;

xiv) $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow \exists d \in \mathbf{Z}$, tale che $c|a$ e $c|b \Leftrightarrow c|d$;

xv) $a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow \exists m \in \mathbf{Z}$, tale che $a|c$ e $b|c \Leftrightarrow m|c$;

xvi) siano $m, n, p \in \mathbf{Z}$ con p primo; allora $p|mn \Rightarrow p|m$ oppure $p|n$;

xvii) siano $m, n, p \in \mathbf{Z}$ con p primo; allora $p|m+n \Rightarrow p|m$ e $p|n$;

xviii) $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$;

xix) $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = x$;

xx) $x \notin \mathbf{Z} \Rightarrow x = x$;
xxi) $x, y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ e $y \leq x \;\Rightarrow\; x = y$.
xxii) $x, y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ oppure $y \leq x \;\Rightarrow\; x = y$.

10) Siano P_0, P_1,...,P_r frasi tali che P_0 sia vera e $P_{i-1} \Rightarrow P_i$ sia vera per ogni $i = 1, ..., r$. Osservare che P_i è vera per ogni i, e in particolare P_r è vera.
Dimostrare un'affermazione P significa trovare frasi $P_0, P_1, ..., P_r$ tali che P_0 e $P_{i-1} \Rightarrow P_i$ siano vere per ogni $i = 1, ..., r$ e $P_r = P$.

11) Sia $n \in \mathbf{Z}$; n si dice *pari* se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 2k$; n si dice *dispari* se non è pari. Dimostrare che:
i) se esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 2k + 1$ allora n è dispari;
ii) se n è dispari allora esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che $n = 2k + 1$. (Suggerimento: dimostrare che ogni numero intero è della forma $2k$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$ oppure della forma $2k + 1$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$).

12) In questo esercizio si dimostra che i numeri primi sono infiniti.
Sia $n \in \mathbf{Z}, n \neq 0$; n si dice numero primo se $n \neq \pm 1$ e ($a|n \Rightarrow |a| = 1$ oppure $|a| = n$).
Dimostrare che:
i) n è primo se e solo se $-n$ è primo;
ii) n non è primo se e solo se $\exists a, b \in Z$ tali che $1 < |a|, |b| < |n|$ e $n = ab$;
iii) esistono numeri primi ed esistono numeri non primi;
iv) se $n \neq \pm 1$ $\exists p$ primo tale che $p|n$ (si ponga $p =$minimo$\{a \in \mathbf{N} | a > 1$ e $a|n\}$);
v) esistono infiniti numeri primi (supponendo che i numeri primi siano finiti, e siano $p_1, ..., p_N$ dimostrare che $\exists p$ primo con $p \neq p_1, ..., p_N$ tale che $p|p_1 \cdot ... \cdot p_N + 1$).

13) Sia $n \in \mathbf{N}$; dimostrare che $\exists p, q \in \mathbf{N}$ primi tali che:
i) $q - p \geq n$;
ii) $\forall k \in \mathbf{N}$ tale che $p < k < q$ si ha k non primo.
(Suggerimento: provare che $\forall r = 2, ..., n$ il numero $n! + r$ non è primo. $n!$ si legge "n fattoriale" ed è uguale al prodotto dei primi n numeri interi positivi: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.)

14) Osservare che negli esercizi 11,ii), 12,iv) e 13) serve la seguente proprietà di $\mathbf{N}$: ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{N}$ ha un minimo.