

PROGRAMMA del corso di
Teoria delle Rappresentazioni 2 - a.a. 2020/2021:
Algebre di Lie e loro rappresentazioni

- Definizione di *algebra* (su un campo K). Definizione di *algebra di Lie* (su un campo K). La categoria delle algebre di Lie: morfismi, sottoalgebre, ideali, quozienti, generatori di algebre e di ideali, prodotto diretto e semidiretto. Il gruppo degli automorfismi. L'algebra di Lie delle derivazioni di un'algebra. Algebre libere, presentazione di un'algebra per generatori e relazioni. Algebre involuanti e algebra involuante universale.
- Generalità di teoria delle rappresentazioni. Definizione di *modulo* o *rappresentazione* di un'algebra di Lie; sottorappresentazioni, quozienti, somma diretta; la rappresentazione aggiunta. Moduli ciclici. Rappresentazioni irriducibili: il lemma di Schur. Moduli completamente riducibili. Modulo banale, modulo duale, prodotto tensoriale di rappresentazioni, modulo degli omomorfismi tra rappresentazioni. Invarianti.
- Motivazioni e collegamenti (*):
Varietà differenziabili (su \mathbb{R}), spazio tangente e differenziazione; gruppi di Lie; le algebre di Lie come spazi tangenti di gruppi di Lie: le rappresentazioni Ad e ad e il commutatore di due derivazioni invarianti. Il gruppo generale lineare, il gruppo speciale lineare e il gruppo ortogonale di una forma bilineare non degenera e le loro algebre di Lie.
Algebre di Hopf (su un campo K): algebre, coalgebre, antipodo; modulo banale e struttura di rappresentazione sul prodotto tensoriale e sul duale. La struttura di algebra di Hopf sull'algebra involuante universale di un'algebra di Lie.
- Il teorema di Jordan: parte semisemplice e parte nilpotente di un endomorfismo di uno spazio vettoriale e di una derivazione di un'algebra. Decomposizione di Jordan di una rappresentazione rispetto all'azione di un elemento dell'algebra di Lie: sottoalgebre di Engel; elementi fortemente nilpotenti e gruppo di Engel (in caratteristica zero).
- Algebre di Lie *commutative, semplici, nilpotenti, risolubili, semisemplici*; il *radicale risolubile* (in dimensione finita): definizioni e relazioni tra queste nozioni.
- Algebre di Lie nilpotenti. Teorema di Engel e sue conseguenze. Autospazi generalizzati simultanei. Sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie di dimensione finita.
- Algebre di Lie risolubili (in caratteristica zero e dimensione finita): teorema di Lie e sue conseguenze. Sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie

risolubile e gruppo di Engel. Sottoalgebre di Borel.

- Forme bilineari invarianti e forma traccia associata ad una rappresentazione. La forma di Killing: criterio di risolubilità di Cartan e criterio di semisemplicità.

- Algebre di Lie semisemplici di dimensione finita: ideali e somme dirette di algebre di Lie semplici. Le derivazioni e la decomposizione di Jordan astratta (e sua generalizzazione). L'elemento di Casimir di una rappresentazione di dimensione finita e il teorema di Weyl: completa riducibilità.

Le rappresentazioni di dimensione finita di \mathfrak{sl}_2 : classificazione e descrizione degli irriducibili; spazi peso; decomposizione in somma diretta di irriducibili: numero degli addendi diretti e unicità.

Sottoalgebre torali e sottoalgebre di Cartan; spazi radice; copie di \mathfrak{sl}_2 e proprietà degli spazi radice.

- Sistemi di radici cristallografici: interi di Cartan, gruppo di Weyl, morfismi e automorfismi. Sistemi di radici irriducibili. Sistemi di radici di rango 1 e 2. Sistemi positivi e sistemi semplici: grafo di Coxeter, diagramma di Dynkin, classificazione dei sistemi di radici cristallografici.

- L'algebra di Lie associata ad un sistema di radici cristallografico: generatori e relazioni; relazioni di Serre; dimensione finita, semisemplicità, sottoalgebra di Cartan "canonica". La classificazione delle algebre semisemplici di dimensione finita con sottoalgebra di Cartan fissata.

- Il teorema di coniugazione: sottoalgebre di Borel standard; sottoalgebre di Borel di un'algebra di Lie di dimensione finita e gruppo di Engel.

Classificazione delle algebre di Lie semisemplici di dimensione finita.

- Il teorema di Poincaré-Birkhoff-Witt.

Algebre graduate e algebre con filtrazione; il graduato associato. Algebra involuante universale e algebra simmetrica. Basi di tipo PBW.

- Rappresentazioni delle algebre di Lie semisemplici di dimensione finita (*): rappresentazioni di peso più alto; pesi e gruppo di Weyl; pesi dominanti e classificazione delle rappresentazioni irriducibili di dimensione finita.

(*): non fa parte del programma d'esame.