Esame di Analisi Matematica 3 - 01-03-2019

1. (7 punti) Data la forma differenziale
$\omega(x,y,z) = [\,2xye^{x^2y} + yz\,]\,dx + [\,x^2e^{x^2y} + xz\,]\,dy + [\,xy + \frac{1}{\sqrt{1-(z-1)^2}}\,]dz$
trovare il suo insieme di definizione D e

   (a) Dire se è chiusa in D

   (b) Dire se è esatta in D, calcolando in caso affermativo le primitive.

   (c) Per ogni $a > 1$ sia γ_a il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \le x \le a$ nel piano $z = 1$
   Calcolare $\lim_{a\to+\infty} \int_{\gamma_a} \omega$

2. (7 punti) Calcolare il volume dell' insieme
$V = [\,x^2 + y^2 + z^2 \le 3\,;\; z \ge 0\,;\; x^2 + y^2 \le 3z^2\,] \subset \mathbb{R}^3$

   (a) In coordinate sferiche

   (b) in coordinate cilindriche

3. (9 punti) Data la funzione di due variabili
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\,e^{xy}-1-xy)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}y^2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, studiarne la continuità, calcolare le derivate parziali, studiare la differenziabilità e dire se la funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

4. (9 punti) Si consideri al variare del parametro t, con $0 \le t \le 1$, la funzione
$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2)(y - t)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   (a) Determinare al variare di $t \in [0,1]$ i punti critici della funzione f, e studiarne la natura (massimo, minimo, sella).

   (b) Verificare che al variare di $t \in [0,1]$ esiste un unico punto P_1^t di minimo assoluto ed un unico punto P_2^t di massimo assoluto di f sull' insieme $[x^2 + y^2 \le 2]$ (cioè tali che $f(P_1^t) = \min_{[x^2+y^2\le 2]} f(x,y)$, $f(P_2^t) = \max_{[x^2+y^2\le 2]} f(x,y)$) e determinare tali punti.