Analisi Matematica 3
Corso di laurea in Matematica
Anno accademico 2016-17

Lucio Damascelli
Studio 1127, Dip. Matematica, primo piano, primo dente,
tel. 0672594675, email: damascel@mat.uniroma2.it
`http://www.mat.uniroma2.it/~damascel`

Testi di riferimento:

Fusco, Marcellini, Sbordone - Analisi Matematica due (Liguori)
Giusti - Analisi Matematica due, 3 edizione (Boringhieri)
Appunti integrativi sulla pagina del docente.

Per altri esercizi si possono consultare i testi
– **Amar, Bersani** - Analisi Matematica II Esercizi e richiami di teoria (Edizioni LaDotta)
– **Marcellini, Sbordone** -Esercitazioni di Matematica 2 vol. (in 2 o 4 parti a seconda delle edizioni) (Liguori)
– **Demidovic** Esercizi e problemi di Analisi Matematica (Editori Riuniti)

Programma

1) Richiami delle definizioni dei concetti topologici elementari nello spazio euclideo R^N: struttura di spazio vettoriale euclideo, prodotto scalare, norma, distanza e loro proprietà; palle aperte e chiuse, intorni, insiemi aperti e chiusi, interno, esterno, frontiera di un insieme, punti di accumulazione.
Richiami e complementi sugli spazi metrici, normati e con prodotto scalare e sulle funzioni continue tra di essi.
Caratterizzazione della connessione di aperti in R^N come aperti connessi per archi.
Insiemi sequenzialmente compatti, numero di Lebesgue di un ricoprimento aperto di un compatto, teorema di Weierstrass sull' esistenza del massimo e minimo di funzioni continue su compatti. Caratterizzazioni equivalenti della compattezza di sottoinsiemi di spazi metrici.
Limiti e continuità per funzioni di più variabili a valori scalari o vettoriali.

2) Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali. Derivate parziali e direzionali, gradiente di una funzione scalare di più variabili. Differenziabilità , condizioni necessarie di differenziabilità, formula del gradiente per le derivate direzionali di funzioni differenziabili. Piano tangente al grafico di una funzione differenziabile di due variabili. Condizioni sufficienti di differenziabilità (teorema del differenziale totale). Differenziale come operatore lineare, rappresentato dal gradiente

per funzioni scalari. Esempi ed esercizi, uso delle disuguaglianze di Young per lo studio della differenziabilità. Disuguaglianze di Hölder e Minkovski discrete.
Funzioni a valori vettoriali di una variabile: limiti, derivate, integrali secondo le componenti. Funzioni di più variabili a valori vettoriali, vettori derivate parziali, matrice jacobiana. Differenziale come operatore lineare, rappresentato dalla matrice jacobiana per funzioni vettoriali di più variabili. Teorema sul differenziale delle funzioni composte. Regola della catena per il calcolo delle derivate parziali.
Derivate successive, funzioni due volte differenziabili. Teorema di Schwarz sull' inversione dell' ordine di derivazione, matrice hessiana. Funzioni di classe $C^k(A)$, $C^k(A;\mathbb{R}^m)$, A aperto di $\mathbb{R}^N$.
Formula di Taylor con resto in forma di Peano, risp. di Lagrange del primo ordine (i.e. definizione di differenziabilità, risp. teorema del valore medio). Formula di Taylor con resto in forma di Peano e di Lagrange del secondo ordine.
Estremi relativi (liberi) di funzioni scalari di più variabili. Punti di massimo, minimo, sella. Punti critici di funzioni di più variabili, criterio necessario (teorema di Fermat per funzioni di più variabili).
Richiami sulle forme quadratiche in R^N.
Criteri necessari e criteri sufficienti per lo studio dei punti critici basati sul segno della matrice hessiana.

3) Curve in R^N, curve di classe C^1, regolari e regolari a tratti. Lunghezza di una curva, rettificabilità delle curve di classe C^1. Versore tangente di curve regolari, parametrizzazioni equivalenti, parametrizzazione naturale. Integrali curvilinei di prima specie o rispetto alla lunghezza d'arco. Cenni sulla curvatura con e senza segno di curve piane e nello spazio.

Forme differenziali (campi vettoriali) e loro integrali curvilinei di seconda specie, interpretazione fisica come lavoro di una forza posizionale. Circuiti e circuitazioni di forme. Forme chiuse ed esatte (campi irrotazionali e conservativi), primitiva o potenziale di una forma (campo). Condizione necessaria di esattezza di forme di classe C^1. Condizioni necessarie e sufficienti di esattezza.
Omotopie di curve chiuse in un insieme aperto connesso E, insiemi semplicemente connessi. Locale esattezza delle forme chiuse. Invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme chiuse.
Condizione sufficiente di esattezza per forme chiuse su aperti semplicemente connessi. Funzioni con derivate parziali nulle in un aperto connesso, differenza tra primitive della stessa forma. Metodo degli integrali indefiniti per il calcolo di una primitiva di una forma chiusa.

4) Teorema di Dini o delle funzioni implicite in due dimensioni. Esempi.

Teorema delle funzioni implicite nel caso generale di più vincoli, dimostrazione elementare e dimostrazione basata sul teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli.

Teorema della funzione inversa, invertibilità locale e globale.

* [Introduzione alla nozione di sottovarietà differenziabile in R^N di dimensione n (e codimensione $m = N - n$), equivalenza delle diverse definizioni, spazio tangente e normale. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per lo studio dei massimi e minimi vincolati per funzioni di N variabili con un vincolo e più in generale di N variabili con m, $1 \leq m \leq N - 1$ vincoli .]

5) Integrazione di Riemann in più variabili e misura di Peano-Jordan, integrali doppi, tripli, in $\mathbb{R}^N$. Formule di riduzione per insiemi normali o semplici rispetto ad un asse.

Teorema di Green e della divergenza nel piano.

Diffeomorfismi di classe C^1 tra aperti di $\mathbb{R}^N$. Formule di cambio di variabili per integrali multipli. Coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio. Esempi.

Integrali multipli impropri, calcolo dell integrale di Gauss.

Partizioni dell unità C^∞. Dimostrazione del teorema di cambio di variabili per integrali multipli.

6) * [Introduzione ad alcuni spazi normati di dimensione infinita. Spazio delle funzioni continue tra sottoinsiemi di spazi euclidei. Norma e convergenza uniforme, convergenza uniforme e totale per serie di funzioni. Criterio di compattezza in $C^0(K)$: Teorema di Ascoli-Arzelà. Spazi di funzioni hölderiane, derivabili e integrabili. Operatori lineari continui tra spazi normati.

Spazi l^p, alcuni controesempi di proprietà familiari in spazi di dimensione finita.

Estensione della definizione di differenziabilità al caso di applicazioni tra un aperto di uno spazio normato ad un altro, validità dei teoremi delle funzioni implicite e della funzione inversa con ipotesi appropriate.]

* Gli argomenti con l' asterisco sono qui solo introdotti e facoltativi, sono richiesti solo per votazioni elevate e verranno ripresi in modo più sistematico nel corso di Analisi Matematica 4 e in corsi successivi.