**Matematica per Scienze Biologiche e Biotecnologie**
Docente Lucio Damascelli
Università di Tor Vergata
**Alcuni esempi svolti a lezione, esercizi simili e di esame**

## Equazioni e disequazioni con le funzioni elementari

Risolvere le seguenti equazioni / disequazioni

(1) $x - 4 \leq 3x - 7$

[ $x - 3x \leq -7 + 4$ ; $-2x \leq -3$ ; $x \geq \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ ]

(2) $5x + 4 < 4x + 3 + x$

[ $5x - 4x - x < 3 - 4$ ; $0\,x < -1$ ; $0 < -1$ : impossibile ]

(3) $3x + 4 \geq 2x + 3 + x$

[ $3x - 2x - x \geq 3 - 4$ ; $0\,x \geq -1$ ; $0 \geq -1$ : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sempre vera ]

(4) $\begin{cases} 3x > 2 \\ 3x < 4 \end{cases}$ **sistema di disequazioni**

[ In generale in un sistema di equazioni/disequazioni la soluzione è data dai valori che soddisfano *tutte* le relazioni presenti nel sistema. In termini insiemistici è l' intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni/disequazioni. La prima disequazione è verificata per $x > \frac{2}{3}$, cioè $x \in A = (\frac{2}{3}, +\infty)$, la seconda per $x < \frac{4}{3}$, cioè $x \in B = (-\infty, \frac{4}{3})$. Il sistema è verificato nell' intersezione di $A$ e $B$, cioè per $x \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, che si può anche scrivere $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$. ]

(5) $\frac{x-3}{x+4} = 2$ **equazione frazionaria**

[ L' equazione ha senso se $x + 4 \neq 0$, cioè se $x \neq -4$. [1]
Si dice talvolta che $x \neq -4$ è la *condizione di esistenza* (o *campo di esistenza*) per l' equazione.
Se $x \neq -4$ si può allora moltiplicare primo e secondo membro per $x + 4$ e si ottiene $x - 3 = 2(x + 4) = 2x + 8$, che equivale a $x = -11$, soluzione accettabile perché $-11 \neq -4$. ]

[1] Si osservi che le regole per soluzioni di espressioni del tipo $A(x) \neq B(x)$ sono le stesse che si usano per risolvere l' equazione $A(x) = B(x)$: bisogna appunto escludere le soluzioni dell' equazione ...

(6) $\frac{x-3}{x+4} \leq 2$ **disequazione frazionaria**

[ Non si può procedere come nelle equazioni frazionarie (dove basta escludere i valori che annullano il denominatore), perché non si conosce il segno di $x+4$, e sappiamo che la disequazione ha il verso opposto di disuguaglianza se si moltiplica per un numero negativo. Si può procedere in diversi modi.

PRIMO MODO : Si possono distinguere il caso di $x+4>0$, equivalente a $x>-4$, e il caso di $x<-4$ (come nel caso dell' equazione va invece escluso il caso di $x=-4$ in cui la disequazione non ha senso non essendo definita una frazione con denominatore 0).

Il ragionamento è il seguente. Se $x+4>0$, cioè $x>-4$, allora la disequazione equivale (moltiplicando per $x+4>0$ il verso della disuguaglianza si conserva) alla disequazione $x-3 \leq 2(x+4) = 2x+8$, che risolta dà $x>-11$. Se invece $x+4<0$, cioè $x<-4$ allora la disequazione equivale (moltiplicando per $x+4<0$ il verso della disuguaglianza cambia ) alla disequazione $x-3 \geq 2(x+4) = 2x+8$, che risolta dà $x<-11$. .

Si ottengono allora due sistemi, e la soluzione della disequazione sarà l' unione delle soluzioni dei due sistemi (mentre ricordiamo che la soluzione di un sistema è l' intersezione degli insiemi di soluzione delle singole equazioni/disequazioni, corrispondente ai valori che rendono vere tutte le equazioni/disequazioni del sistema):

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \geq -11 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -4 \\ x \leq -11 \end{cases}$$

che equivale a $(x>-4) \wedge (x \geq -11) \ \vee \ (x \leq -11) \wedge (x<-4)$ (dove il segno $\vee$ corrisponde alla congiunzione " o ", "oppure", del linguaggio ordinario intesa in senso debole, non esclusivo, e il segno $\wedge$ corrisponde alla congiunzione "e").

In definitiva le soluzioni della disequazione sono i numeri $x$ che verificano $x>-4$ oppure $x \leq -11$.

In termini di insiemi l' insieme delle soluzioni sarà dato dall' unione $(-\infty, -11] \cup (-4, +\infty)$.

Questo tipo di ragionamento è frequente e lo incontreremo ancora, lo abbiamo illustrato per questo motivo.

In realtà c' è un più comodo **procedimento alternativo di soluzione per le disequazioni di primo grado frazionarie**, che si basa sulle regole dei segni.

SECONDO MODO : Si riconduce la disequazione ad una disequazione in cui compare da una parte un' unica frazione e dall' altra 0.

Nel nostro caso $\frac{x-3}{x+4} \leq 2$ equivale a $\frac{x-3}{x+4} - 2 \leq 0$, cioè $\frac{x-3-2(x+4)}{x+4} \leq 0$ o ancora $\frac{-x-11}{x+4} \leq 0$ che si può scrivere (moltiplicando per $-1$ la frazione, che equivale a moltiplicare per $-1$ il numeratore) come $\frac{x+11}{x+4} \geq 0$.

Il numeratore è positivo se $x > -11$ (nullo in $x = -11$ e negativo se $x < -11$), il denominatore è positivo se $x > -4$ (nullo in $x = -4$ e negativo se $x < -4$). Ne segue che la frazione è positiva se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno, negativa se hanno segno opposto e si ritrova che il sistema è risolto se $x > -4 \;\vee\; x \leq -11$. ]

(7) $\frac{x-1}{x+3} > 4$

[ $-\frac{13}{3} < x < -3$ ]

(8) $|x+2| \leq |x|$ **disequazione con il modulo**

[ Per risolvere le equazioni e disequazioni in cui compare il modulo, bisogna distinguere vari casi, come nel caso delle disequazioni frazionarie.

I punti in cui il modulo cambia espressione sono i punti $x = -2$ e $x = 0$: se $x \leq -2$ è $x+2 \leq 0$, $x \leq 0$ e la disequazione si legge $-(x+2) = -x-2 \leq -x$; se $-2 < x \leq 0$ è $x+2 > 0$, $x \leq 0$ e la disequazione si legge $x+2 \leq -x$, infine se $x > 0$ è $x+2 > 0$, $x > 0$ e la disequazione si legge $x+2 \leq x$ (che non è risolta da alcun $x$ reale, essendo equivalente alla proposizione falsa $2 \leq 0$).

La disequazione si scinde quindi nell' unione di sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ -x-2 \leq -x \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x+2 \leq -x \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ x+2 \leq x \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ -2 \leq 0 \;\; \text{(sempre vera )} \end{cases} \vee \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq -2 \;\; \text{(mai vera )} \end{cases}$$

cioè $x \leq -2 \vee -2 < x \leq -1 \vee x \in \emptyset$.

In definitiva la disequazione è risolta (prendendo l' unione delle soluzioni dei singoli sistemi) se $x \leq -1$.

]

(9) **Equazioni e disequazioni di secondo grado**

$ax^2 + bx + c = 0$ [ oppure $< 0$, $\leq 0$, $> 0$, $\geq 0$ ]

[ Supponiamo $a \neq 0$ (altrimenti non è di secondo grado) e consideriamo il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$. Il discriminante dell' equazione è il numero

$\Delta = b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$ allora l' equazione $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali, date dalla ben nota formula
$x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Se il coefficiente $b$ è un numero intero pari a volte i calcoli sono semplificati dalla cosiddetta formula ridotta:
$x_1, x_2 = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-ac}}{a}$.
Se $\Delta = 0$ la soluzione è una sola, si parla talvolta di due radici coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$.
Infine se $\Delta < 0$ l' equazione $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ non ha alcuna soluzione reale (vedremo poi che in campo complesso ha due soluzioni).
Per quanto riguarda le disequazioni, qualunque sia la domanda, è sufficiente per rispondere conoscere il *segno del trinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$:
se $\Delta < 0$ il trinomio $p(x)$ ha sempre lo stesso segno del primo coefficiente $a$; se $\Delta = 0$ il trinomio ha sempre lo stesso segno del primo coefficiente $a$ tranne che per il valore $x = \frac{-b}{2a}$ che lo rende nullo (è la soluzione unica dell' equazione $p(x) = 0$); infine se $\Delta > 0$ l' equazione ha due soluzioni $x_1$, $x_2$ e chiamando $x_1$ la minore, cioè supponendo $x_1 < x_2$, il trinomio è nullo per $x = x_1$ oppure $x = x_2$, ha lo stesso segno di $a$ negli intervalli infiniti esterni all' intervallo tra le soluzioni, cioè per $x < x_1$ oppure $x > x_2$, ha segno opposto ad $a$ nell' intervallo tra le soluzioni, cioè per $x_1 < x < x_2$. Vediamo in seguito degli esempi.
Ricordiamo anche che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, se $\Delta \geq 0$ e le radici dell' equazione sono $x_1, x_2$ (intendendo con $x_1 = x_2$ l' unica radice se $\Delta = 0$) ha la seguente **scomposizione in fattori**: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, mentre se $\Delta < 0$ non è scomponibile in prodotto di fattori di primo grado. ]

(10) $-2x^2 - 6x - 4 = 0$ ; $-2x^2 - 6x - 4 < 0$ ; $-2x^2 - 6x - 4 \geq 0$.

[ $a = -2$, $b = -6$, $c = -4$ ; $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 32 = 4$.
L' equazione $-2x^2 - 6x - 4 = 0$ ha due soluzioni $x_1, x_2 = \frac{6\pm\sqrt{4}}{-4} = \frac{6\pm2}{-4}$, cioè $x_1 = -2$, $x_1 = -1$. Per risolvere le disequazioni ricordiamo che il trinomio $p(x) = -2x^2 - 6x - 4$ ha lo stesso segno del primo coefficiente, cioè è negativo, se $x < -2$ oppure $x > -1$, mentre ha segno opposto, cioè è positivo, se $-2 < x < -1$.
La disequazione $-2x^2 - 6x - 4 < 0$ avrà quindi per soluzione $x < -2$ oppure $x > -1$, mentre la disequazione $-2x^2 - 6x - 4 \geq 0$ (che comprende i valori che annullano il trinomio, cioè le soluzioni dell' equazione associata), avrà per soluzione $-2 \leq x \leq -1$.

Tutte queste conclusioni seguono anche dal fatto che possiamo scomporre il trinomio come $-2x^2 - 6x - 4 = 0 = -2(x + 2)(x + 1)$, essendo $-2$ e $-1$ le radici dell' equazione associata. ]

(11) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ ; $2x^2 + 2x + 2 \leq 0$ ; $2x^2 + 2x + 2 > 0$

[ Ora il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.2.2 = 4 - 16 = -12 < 0$. L' equazione $2x^2 + 2x + 2 = 0$ non ha soluzioni reali, e il trinomio ha sempre il segno del primo coefficiente, cioè è sempre positivo. Ne segue che $2x^2 + 2x + 2 \leq 0$ non è risolta da alcun $x$ reale, mentre $2x^2 + 2x + 2 > 0$ è risolta da ogni numero reale, è vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$. ]

(12) $-2x^2 - 8x - 8 = 0$ ; $-2x^2 - 8x - 8 > 0$ ; ; $-2x^2 - 8x - 8 \geq 0$ ; $-2x^2 - 8x - 8 < 0$

[ Il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4.2.8 = 64 - 64 = 0$. L' equazione $-2x^2 - 8x - 8 = 0$ ha l' unica soluzione reale $x = \frac{8}{-4} = -2$, e il trinomio ha sempre lo stesso segno del primo coefficiente, cioè è sempre negativo, tranne che per $x = -2$ dove è nullo. Ne segue che $-2x^2 - 8x - 8 > 0$ non ha soluzioni, $-2x^2 - 8x - 8 \geq 0$ ha per soluzione $x = -2$, mentre $-2x^2 - 8x - 8 < 0$ ha per soluzione $x \neq 2$, si può anche scrivere $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. ]

(13) $|x - 2| > x^2$

[ Si distinguono i valori per i quali la quantità dentro al modulo è negativa e quelli per i quali è non negativa, e il valore in cui il termine cambia segno è $x = 2$.

Si ottiene quindi l' unione di due sistemi

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 > x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2 - x > x^2 \end{cases}, \text{ equivalenti a}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - x + 2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo ha per soluzioni i valori $x \in (-2, 1)$. ]

(14) $\frac{1}{x-3} > x - 2$

[ $x \neq 3$ affinché abbia senso ; $\frac{(x-2)(x-3)-1}{x-3} < 0$ ; $\frac{x^2-5x+5}{x-3} < 0$ ; Il numeratore è positivo se $x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ oppure $x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, negativo se $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, mentre il denominatore è positivo se $x > 3$, negativo se $x < 3$.

Mettendo insieme queste informazioni ( e osservando che $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 3$, $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3$ ) si vede che la disequazione è risolta quando numeratore e denominatore sono discordi, cioè per
$[x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}] \ \vee \ [3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}]$ ]

(15) $|x^2 + 2| > 6$

[ Essendo $x^2 + 6 > 0$ per ogni valore $x \in \mathbb{R}$, in realtà questa non è una vera equazione con il modulo, e si legge $x^2 + 2 > 6$, cioè $x^2 > 4$, verificata se $x > 2$ oppure $x < -2$. ]

(16) $|x^2 - 4| > 5$

[ Se $x^2 - 4 < 0$, cioè $-2 < x < 2$, equivale alla disequazione $4 - x^2 > 5$, cioè $x^2 + 1 < 0$, impossibile.

Ne segue che deve essere $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$, e la disequazione diventa $x^2 - 4 > 5$, in altre parole la soluzione della disequazione coincide con quella del sistema $\begin{cases} x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2 \\ x^2 > 9 \end{cases}$,
che ha per soluzione $x > 3$ oppure $x \leq -3$. ]

(17) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ ; $x^4 - x^2 - 2 > 0$ ; $x^4 - x^2 - 2 < 0$ **Equazioni e disequazioni biquadratiche**

[ Dato che compaiono solo potenze pari della $x$ conviene porre $t = x^2$. In questo modo se $x$ è soluzione allora $t = x^2$ soddisfa l' equazione / disequazione $t^2 - 3t + 2 = 0$ ($> 0$, $< 0$).

Le soluzioni dell' equazione $t^2 - t - 2 = 0$ sono $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, e $t^2 - t - 2 > 0$ se $t < -1$ oppure $t > 2$, mentre $t^2 - t - 2 < 0$ se $-1 < t < 2$.

Ricordando che $t = x^2$ per avere le soluzioni dell' equazione dobbiamo trovare le eventuali soluzioni di $x^2 = -1$ (che non ha soluzioni reali) oppure di $x^2 = 2$, che ha per soluzioni i numeri $x = \pm\sqrt{2}$, che sono quindi anche soluzioni di $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Per risolvere invece la disequazione $x^4 - x^2 - 2 > 0$ dobbiamo trovare i valori $x$ tali che $x^2 < -1$ (cioè $x^2 + 1 < 0$ che non ha soluzioni) oppure $x^2 > 2$, cioè $x^2 - 2 > 0$ che ha per soluzioni i numeri che verificano $x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$; ne segue che la disequazione $x^4 - x^2 - 2 > 0$ è risolta dai valori che verificano queste disuguaglianze, cioè i numeri appartenenti all' insieme $(-\infty - \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Analogamente $x^4 - x^2 - 2 < 0$ se $-1 < x^2 < 2$. La prima disuguaglianza equivale a $x^2 + 1 > 0$ ed è sempre verificata, mentre la seconda equivale a $x^2 - 2 < 0$ ed è verificata se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Ne segue che la disequazione $x^4 - x^2 - 2 < 0$ è verificata dai numeri appartenenti all' intervallo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. ]

(18) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ; $x^4 - 3x^2 + 2 > 0$ ; $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

[ $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{2}$ ;
$x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}$ ;
$-\sqrt{2} < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < \sqrt{2}$
]

(19) **Equazioni e disequazioni di grado superiore scomponibili in fattori di primo e secondo grado**.
In generale non esistono formule risolutive generali per equazioni di grado superiore al secondo, ma se si riesce a scomporre in fattori di grado basso si possono risolvere alcune equazioni/disequazioni.

Ad esempio se dobbiamo risolvere l' equazione
$x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$ ,
cerchiamo di scomporre il primo membro usando la **Regola di Ruffini** (vedere testi di liceo per ricordare lo schema).

Cerchiamo una radice del polinomio $x^3 + x^2 - 14x - 24$, cioè un valore $a$ che inserito al posto della $x$ renda zero il valore del polinomio. Le eventuali radici intere si cercano tra i divisori del termine noto. Provando con $\pm 1, \pm 2, \ldots$ si vede che $x = -2$ è radice. Il polinomio si scomporrà allora, usando il semplice schema imparato al liceo, come
$x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x^2 - x - 12)$.
Le soluzioni dell' equazione saranno allora le soluzioni dell' equazione $(x + 2) = 0$, cioè $x = -2$, oppure le soluzioni dell' equazione $(x^2 - x - 12) = 0$, cioè $x = -3$, $x = 4$, e in conclusione l' equazione avrà tre soluzioni: $x = -2$, $x = -3$, $x = 4$.

Si noti che per il trinomio di secondo grado trovato, $x^2 - x - 12$, si possono trovare le radici usando la formula per le equazioni di secondo grado, che avrà per conseguenza la scomposizione $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, ma volendo si può ancora usare il metodo di Ruffini per avere questa scomposizione.

In ogni caso il polinomio originario si può scomporre come $x^3 + x^2 - 14x - 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$, che non solo dà subito le radici trovate dell' equazione, ma permette di risolvere subito, analizzando i segni dei fattori $x + 2$ , $x + 3$ , $x - 4$ , le disequazioni
$x^3 + x^2 - 14x - 24 < 0$, che ha come soluzioni $x < -3$ , $-2 < x < 4$ e la disequazione
$x^3 + x^2 - 14x - 24 > 0$, che ha come soluzioni $-3 < x < -2$ , $x > 4$.

(20) $\sqrt{x+2} = \sqrt{4-x}$ ; $\sqrt{x+2} < \sqrt{4-x}$ ; $\sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}$
**equazione e disequazioni irrazionali**.

[ Nel risolvere equazioni e disequazioni irrazionali si cerca di elevare al quadrato per eliminare le radici, ma occorre ricordare che una uguaglianza o disuguaglianza equivale alla relazione che si ottiene elevando al quadrato solo se tutti i termini sono non negativi: elevando al quadrato si possono ottenere equazioni che hanno per soluzioni valori diversi dai valori che risolvono l' equazione / disequazione di partenza. Ad esempio $-2 \neq 2$ ma elevando al quadrato $(-2)^2 = 4 = 2^2$. Bisogna quindi ragionare di caso in caso.

In questo esempio affinché le relazioni abbiano senso bisogna imporre che i radicandi siano non negativi; con queste condizioni si può elevare al quadrato senza problemi, perché il risultato della radice sarà poi non negativo. In altre parole l' equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x+2 = 4-x \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ 2x = 2 \end{cases} \text{, che ha per soluzione } x = 1.$$

Analogamente la disequazione $\sqrt{x+2} < \sqrt{4-x}$ ha per soluzione le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ x < 1 \end{cases} \text{, che ha per soluzione } -2 < x < 1.$$

Infine la disequazione $\sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ x > 1 \end{cases} \text{, che ha per soluzione } 1 < x < 4. \quad ]$$

(21) $\sqrt{x+3} > x$

[ Condizione di esistenza è che $x + 3 \geq 0$.

Con questa condizione il risultato della radice sarà non negativo; quindi se inoltre il secondo membro è negativo la disequazione è verificata.

Se invece il secondo membro è non negativo si può elevare al quadrato. In altre parole la disequazione equivale all' unione di due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \text{, cioè}$$

$$-3 \leq x < 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Mettendo insieme le precedenti relazioni si vede che le soluzioni della disequazione sono i valori che verificano le disuguaglianze $-3 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

In generale una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ equivale all' unione dei sistemi

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$, mentre un' equazione del tipo $\sqrt{A(x)} = B(x)$ equivale al sistema

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$, che si può anche ridurre al sistema

$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$, dato che le soluzioni verificheranno automaticamente la condizione di esistenza: $A(x) = B^2(x) \geq 0$ essendo i quadrati positivi.

Ad esempio l' equazione $\sqrt{x+3} = x$ equivale al sistema $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = x^2 \end{cases}$, che è risolta da $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. ]

(22) $\sqrt{x+3} < x$

[ Equivale ad un unico sistema dove compaiono la condizione di esistenza e quella di positività del secondo membro (dovendo essere maggiore del risultato della radice, che è non negativo)

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x+3 < x^2 \end{cases}$, cioè

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$,

che ha per soluzioni i valori tali che $x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

In generale una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$ (oppure $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ ) equivale al sistema

$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B^2(x) \text{ rispettivamente } \sqrt{A(x)} \leq B(x) \end{cases}$ ]

(23) $\sqrt{2x-1} = \sqrt[4]{x^2-2x+2}$ ; $\sqrt{2x-1} > \sqrt[4]{x^2-2x+2}$ ; $\sqrt{2x-1} < \sqrt[4]{x^2-2x+2}$

[ Si impone che i radicandi siano non negativi; con queste condizioni i risultati saranno numeri non negativi e si potrà elevare alla quarta (4 è il minimo comune multiplo degli indici 2 e 4 dei radicali che compaiono) ottenendo un' equazione / disequazione equivalente. L' equazione è quindi equivalente al sistema $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+2 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = x^2-2x+2 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ 3x^2-2x-1=0 \end{cases}$,

cioè ancora $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ x = 1 \text{ oppure } x = -\frac{1}{3} \end{cases}$, che ha come unica soluzione $x = 1$.

Analogamente la successiva disequazione equivale al sistema $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ x > 1 \text{ oppure } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ che ha per soluzioni i valori tali che $x > 1$, mentre l' ultima disequazione equivale al sistema $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$ che ha per soluzioni i valori tali che $\frac{1}{2} \leq x < 1$

]

(24) $\sqrt{x^2+1} = \sqrt[3]{x^3+1}$

[ La condizione di esistenza $x^2+1$, necessaria perché abbia senso la radice quadrata, è sempre verificata. Al contrario per la radice terza non è necessario che il radicando sia non negativo, ma la condizione $x^3+1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$, è necessaria per la concordanza di segno nell' equazione, dovendo essere $\sqrt[3]{x^3+1} = \sqrt{x^2+1} \geq 0$.

Con queste condizioni si può elevare alla sesta (6 è il minimo comune multiplo degli indici 2 e 3 dei radicali che compaiono) e ottenere un' equazione equivalente. Si ottiene quindi il sistema $\begin{cases} x \geq -1 \\ (x^2+1)^3 = (x^3+1)^2 \end{cases}$ che dopo aver svolto le potenze, semplificato e raccolto il termine $x^2$ diventa $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2(3x^2-2x+3) = 0 \end{cases}$

che ha l' unica soluzione $x = 0$. ]

(25) $\sqrt[3]{3x^2-2x} = x$ ; $\sqrt[3]{3x^2-2x} > x$ ; $\sqrt[3]{3x^2-2x} < x$

[ Quando compaiono solo radici dispari non ci sono i problemi che si hanno con le radici di indice pari. Infatti la funzione $f(x) = x^3$ è invertibile ed è strettamente crescente da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$, come lo è anche la sua funzione inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$; elevando alla terza si mantengono le uguaglianze e disuguaglianze e si ottengono relazioni equivalenti (con le stesse soluzioni) a quelle di partenza.

Le equazioni / disequazioni equivalgono (elevando alla terza) alle equazioni / disequazioni
$3x^2 - 2x = x^3$ ; $3x^2 - 2x > x^3$ ; $3x^2 - 2x < x^3$.

La prima si può scrivere $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = 0$, che ha per soluzione $x = 0$ oppure $x = 1$ oppure $x = 2$.

Analogamente analizzando i segni di $x$ e di $x^2 - 3x + 2$ si vede che $\sqrt[3]{3x^2 - 2x} > x$, che equivale a $x(x^2 - 3x + 2) < 0$, ha per soluzioni i valori tali che $x < 0$ oppure $1 < x < 2$, mentre la disequazione $\sqrt[3]{3x^2 - 2x} < x$, che equivale a $x(x^2 - 3x + 2) > 0$, ha per soluzioni i valori tali che $0 < x < 1$ oppure $x > 2$.

]

*Osservazione* Il procedimento seguito è un principio generale che come vedremo si applica a tutte le equazioni / disequazioni elementari in cui è coinvolta una funzione strettamente monotona: per liberarsi di una funzione che agisce sulla $x$ e trovare i valori di quest' ultima che risolvono le relazioni richieste, si applica la funzione inversa (in questo esempio sulla $x$ agisce la funzione radice terza e si applica la funzione inversa elevando alla terza).

Si osservi però (vedremo in seguito degli esempi) che se la funzione è strettamente decrescente lo è anche la sua inversa, e quindi nell' applicazione di quest' ultima le diseguaglianze cambiano verso.

Un esempio è dato dalle **equazioni / disequazioni esponenziali o logaritmiche elementari**:

(26) Se $a$ e $b$ sono dati, con $0 < a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, l' equazione
$a^x = b$
non ha soluzioni se $b \leq 0$ (perché l' immagine dell' esponenziale è $(0, +\infty)$ ),
mentre se $b > 0$ è risolta (applicando la funzione inversa logaritmo in base $a$) da
$x = \log_a b$
L' equazione
$\log_a(x) = b$
è risolta (applicando la funzione inversa esponenziale di base $a$) da

$x = a^b$. Si noti che per il logaritmo sarebbe necessaria la condizione di esistenza, $x > 0$, verificata comunque a posteriori dalla soluzione.

Se la base verifica $a > 1$ (ad esempio $a = e$, base maggiormente usata in analisi matematica) la funzione $a^x$ è strettamente crescente da $(-\infty, +\infty)$ su $(0, +\infty)$. e la sua inversa $\log_a(x)$ è strettamente crescente da $(0, +\infty)$ su $(-\infty, +\infty)$, e quindi lo stesso procedimento porta alle soluzioni delle disequazioni elementari del tipo
$a^x > b$, risolta da $x > \log_a b$ se $b > 0$, da qualunque numero reale se $b \le 0$,
$a^x < b$, risolta da $x < \log_a b$ se $b > 0$, da nessun numero reale se $b \le 0$,
$\log_a(x) > b$, risolta da $x > a^b$,
$\log_a(x) < b$, risolta da $0 < x < a^b$.

Se invece la base verifica $0 < a < 1$ le corrispondenti funzioni esponenziale e logaritmiche sono strettamente decrescenti, e quindi valgono le regole precedenti ma le disuguaglianze si invertono.

Ad esempio (qui e in seguito log indicherà il logaritmo naturale o in base $e$, spesso indicato anche con il simbolo ln)
$e^x < -2$ e $e^x = -2$ non hanno soluzioni, mentre $e^x > -2$ è risolta da ogni numero reale;
$e^x < 7$ ha per soluzione $x < \log(7)$,
$(\frac{1}{2})^x < 5$ ha per soluzione $x > \log_{\frac{1}{2}}(7)$,
$\log(x) > -5$ ha per soluzione $x > e^{-5}$,
$\log(x) < 1$ ha per soluzione $0 < x < e^1 = e$.

Vedremo ancora qualche esempio di semplice equazione esponenziale e o logaritmica.

(27) Risolvere le equazioni / disequazioni
$g(x) = (x^3 - x^2 - x + 1)(e^x - 1) = 0$ $[< 0]$, $[> 0]$.

[ Scomponendo con la regola di Ruffini si ottiene $(x^3 - x^2 - x + 1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$ e quindi $(x^3 - x^2 - x + 1)(e^x - 1) = (x-1)^2(x+1)(e^x - 1)$ Se vogliamo risolvere l' equazione dobbiamo trovare i valori che annullano almeno un fattore tra i precedenti, e otteniamo quindi i valori $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, soluzioni rispettivamente delle equazioni $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $e^x - 1 = 0$.

Se invece vogliamo trovare le soluzioni della disequazione $g(x) > 0$ $[< 0]$, osserviamo che $(x-1)^2$ è sempre positivo, tranne che per $x = 1$ dove è zero. Quindi il segno di $g(x)$ dipende dai segni di $x+1$, che è positivo per $x > -1$ e negativo per $x < -1$, e di $e^x - 1$, che è positivo se $e^x > 1$, cioè se $x > \log(1) = 0$, negativo se $x < 0$ (e nullo se $x = 0$).

Mettendo assieme queste informazioni e ricordando la regola dei segni si avrà che la disequazione $g(x) < 0$ sarà soddisfatta se $-1 < x < 0$, cioè se $x \in (-1, 0)$, mentre la disequazione $g(x) > 0$ è verificata se $x < -1$ oppure $x > 0$ e $x \neq 1$, cioè se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(la disequazione $g(x) \geq 0$ è invece soddisfatta per $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ )

]

(28) $2^{3+x^2} \geq 2^{4x}$ ; $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x}$

[ Per la prima disequazione applicando la funzione inversa ($\log_2(x)$) che è strettamente crescente si ottiene una disequazione equivalente ed equiversa tra gli esponenti, cioè $3 + x^2 \geq 4x$, equivalente a $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, che è risolta da $x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Per la seconda invece applicando la funzione inversa ($\log_{\frac{1}{2}}(x)$) che è strettamente decrescente si ottiene una disequazione equivalente e controversa tra gli esponenti, cioè $3 + x^2 \leq 4x$, equivalente a $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, che è risolta da $1 \leq x \leq 3$ .
]

(29) $\log(x + 1) + \log(x - 3) < 1$

[ Le condizioni di esistenza sono $x > -1$ e $x > 3$, cioè $x > 3$. Usando le proprietà del logaritmo la disequazione si scrive $\log[(x + 1)(x - 3)] < 1$. Applicando la funzione inversa, $e^x$, che è strettamente crescente, si ottiene la disequazione $(x + 1)(x-3) < e^1 = e$, che si può scrivere come $x^2 - 2x - (3+e) < 0$. Le radici dell' equazione associata sono $x_\pm = 1 \pm \sqrt{4 + e}$, e la disequazione di secondo grado è risolta se $1 - \sqrt{4 + e} < x < 1 + \sqrt{4 + e}$. Osservando che $1 - \sqrt{4 + e} < 3 < 1 + \sqrt{4 + e}$ (essendo $1+\sqrt{4 + e} > 1+\sqrt{4} = 3$) e ricordando la condizione di esistenza $x > 3$, la disequazione è risolta se $3 < x < 1+\sqrt{4 + e}$.
]

(30) $\log_2(x^2 - 5x + 3) < 0$

[ Considerando il campo di esistenza e la disequazione equivalente ed equiversa tra gli esponenti che si ottiene applicando la funzione inversa, $2^x$, ai due membri, si ottiene il sistema $\begin{cases} x^2 - 5x + 3 & > 0 \\ x^2 - 5x + 3 & < 1 \end{cases}$ risolto se $\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee \frac{5+\sqrt{13}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ ]

(31) $3^{2x-4} - 4.3^{x-2} + 3 > 0$

[ Essendo $2x - 4 = 2(x - 2)$ e per le proprietà delle potenze, la disequazione si può scrivere come $(3^{x-2})^2 - 4.3^{x-2} + 3 > 0$. Se poniamo $X = 3^{x-2}$ si ottiene per $X$ la disequazione $X^2 - 4X +$

$3 > 0$, risolta se $X < 1$ oppure se $X > 3$. Ricordando che $X = 3^{x-2}$ si ottiene che la disequazione è risolta se $3^{x-2} < 1$ oppure se $3^{x-2} > 3$, e applicando la funzione inversa, logaritmo in base 3, che è strettamente crescente, si ottiene $x - 2 < \log_3(1) = 0$ oppure $x - 2 > \log_3(3) = 1$, cioè $x < 2$ oppure $x > 3$. ]

(32) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$

[ Bisogna distinguere a seconda del segno di ciò che è dentro il segno di modulo, e i punti in cui avvengono i cambiamenti di segno sono $x = -2$ per $|x + 2|$ e la soluzione di $2^{x+1} - 1 = 0$, equivalente a $x + 1 = \log_2(1) = 0$, cioè $x = -1$.

Se $x < -2$ l' equazione si scrive $2^{-x-2} - (1 - 2^{x+1}) - 2^{x+1} - 1 = 0$, cioè $2^{-x-2} = 2 = 2^1$, equivalente a $-x - 2 = 1$, che ha per soluzione $x = -3$ (che soddisfa $x < -2$).

Se $-2 \leq x < -1$ l' equazione si scrive $2^{x+2} - (1 - 2^{x+1}) - 2^{x+1} - 1 = 0$, cioè $2^{x+2} = 2 = 2^1$ equivalente a $x + 2 = 1$, che ha per soluzione $x = -1$ (che non soddisfa $-2 \leq x < -1$, ma come vedremo $x = -1$ è soluzione).

Infine se $x \geq -1$ l' equazione si scrive $2^{x+2} - (2^{x+1} - 1) - 2^{x+1} - 1 = 0$, cioè $2^{x+2} = 2.2^{x+1}$, sempre vera per le proprietà delle potenze.

In conclusione le soluzioni saranno $x = -3$ e $x \geq -1$. ]

Qualche **equazione e disequazione goniometrica**

(33) Trovare $\arcsin(\frac{1}{2})$ , $\arcsin(-\frac{1}{2})$
Trovare le soluzioni delle equazioni $\sin(x) = \frac{1}{2}$ , $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

[ Per definizione l' arcoseno $y = \arcsin(x)$ di un numero $x \in [-1, 1]$ è l' unico angolo **appartenente all' intervallo** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\sin(y) = x$ (per uso futuro si ricordi che il seno è strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e quindi è strettamente crescente l' arcoseno, che è la funzione inversa del seno ristretto a questo intervallo).

Dai valori particolari noti per alcuni angoli del primo quadrante sappiamo che $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, quindi $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

Nel caso di $-\frac{1}{2}$, essendo $\sin(-y) = -\sin(y)$ e conoscendo $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ possiamo dire che $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, in generale $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

Se invece vogliamo risolvere $\sin(x) = \frac{1}{2}$, non solo a causa della periodicità della funzione seno $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ non è l' unico valore che risolve l' equazione (si possono aggiungere multipli arbitrari di $2\pi$), ma non è neanche l' unico valore *in un giro* a risolvere l' equazione (l' arcoseno mi dà l' unico angolo nel primo e quarto quadrante, in mezzo giro): essendo $\sin(\pi - y) = \sin(y)$, c'è anche $\pi - \arcsin(\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

Ne segue che le soluzioni dell' equazione $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sono date dai numeri del tipo $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Analogamente $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ è risolta da $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

]

(34) Trovare $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ , $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Trovare le soluzioni delle equazioni $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[ $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$ , $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$.

$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ]

Riassumendo:

A) se conosciamo $\arcsin(x)$ e vogliamo $\arcsin(-x)$ si ha subito $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

B) se vogliamo risolvere $\sin(x) = y$, $y \in [-1, 1]$ dato , le soluzioni sono date da

$x = \arcsin(y) + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Per il coseno è tutto il contrario.

Per definizione l' arcocoseno $y = \arccos(x)$ di un numero $x \in [-1, 1]$ è l' unico angolo **appartenente all' intervallo** $[0, \pi]$ tale che $\cos(y) = x$ (per uso futuro si ricordi che il coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e quindi è strettamente decrescente l' arcocoseno, che è la funzione inversa del coseno ristretto a questo intervallo), l' arcoseno mi dà l' unico angolo nel primo e secondo quadrante, in mezzo giro).

A) Se conosco $\arccos(x)$ e voglio $\arccos(-x)$, essendo $\cos(\pi - y) = -\cos(y)$ si ha che

$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.

B) Se vogliamo risolvere $\cos(x) = y$, $y \in [-1, 1]$ dato, (essendo $\cos(-y) = \cos(y)$) le soluzioni sono date da

$x = \arccos(y) + 2k\pi$, $x = -\arccos(y) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sintetizzabili in $x = \pm\arccos(y) + 2k\pi$.

(35) Trovare $\arccos(\frac{1}{2})$ , $\arccos(-\frac{1}{2})$

Trovare le soluzioni delle equazioni $\cos(x) = \frac{1}{2}$ , $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

[ $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ , $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ ;

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ se $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , sinteticamente se $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ;

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ se $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$. ]

(36) Trovare $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ , $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ;

Trovare le soluzioni delle equazioni $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[ $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$ , $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ ;
$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ;
$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ . ]

*Osservazione* Per un caso conosciamo l' angolo del primo quadrante il cui coseno è $\frac{1}{2}$, ma in generale si lasciano indicate le funzioni arcoseno e arccocoseno, che poi si possono calcolare con valori approssimati in vario modo. Ad esempio le soluzioni dell' equazione $\sin(x) = \frac{17}{19}$ sono date da $x = \arcsin(\frac{17}{19}) + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin(\frac{17}{19}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Analogamente le soluzioni dell' equazione $\cos(x) = \frac{17}{19}$ sono date da $x = \pm\arccos(\frac{17}{19}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(37) Trovare $\arctan(1)$, $\arctan(-1)$.
Trovare le soluzioni delle equazioni $\tan(x) = 1$, $\tan(x) = -1$.

[ Per definizione l' arcotangente $y = \arctan(x)$ di un numero $x \in \mathbb{R}$ è l' unico angolo **appartenente all' intervallo** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che $\tan(y) = x$ (per uso futuro si ricordi che la tangente è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ con valori in $(-\infty, +\infty)$, e quindi è strettamente crescente l' arcotangente, che è la funzione inversa della tangente ristretta all' intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Dai valori particolari noti per alcuni angoli del primo quadrante sappiamo che $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, quindi $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Come per il seno si ha che $\tan(-y) = -\tan(y)$, e quindi $\arctan(-x) = -\arctan(x)$. Nel nostro caso conoscendo $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ si ha subito che $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Al contrario del seno e del coseno non è necessaria un' analisi ulteriore per risolvere l' equazione, perché la tangente è periodica di periodo $\pi$, quindi conoscendo i valori in mezzo giro ricavo tutti i valori per periodicità.

Ne segue che $\tan(x) = 1$ se $x = \arctan(1) + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\tan(x) = -1$ se $x = \arctan(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ]

(38) Risolvere l' equazione $3\cos^2(x) + \sin^2(x) - 5\cos(x) + 1 = 0$

[ Scrivendo $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ si ottiene l' equazione $2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$.

Poniamo $t = \cos(x)$ e otteniamo per $t$ l' equazione $2t^2 - 5t + 2 = 0$, che ha le soluzioni $t = 2$, $t = \frac{1}{2}$.

Tornando alla variabile $x$ si ha quindi $\cos(x) = 2$ che non ha soluzioni (essendo $|\cos(x)| \leq 1$), e $\cos(x) = \frac{1}{2}$ che ha per soluzioni $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ]

(39) Risolvere l' equazione $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) - 2 = 0$

[ A volte per risolvere equazioni del tipo precedente (equazioni lineari in seno e coseno) si usano le cosiddette formule razionali, che esprimono $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in funzione della tangente di $\frac{x}{2}$: se $t = \tan(\frac{x}{2})$ si ha che $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ciò ha senso però se $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dove la tangente non è definita, quindi prima di usare questa sostituzione bisogna verificare se l' equazione ha come soluzione $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ che si può anche scrivere come $x = \pi + 2k\pi$. Nel nostro caso sostituendo a $x$ questo valore l' equazione non è soddisfatta (ma in altri casi questa analisi preliminare può dare già soluzioni).

Con la sostituzione precedente si ottiene per $t = \tan(\frac{x}{2})$ l' equazione $\frac{1-t^2}{1+t^2} - \sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2} - 2 = 0$, equivalente, moltiplicando per $(1+t^2)$ all' equazione $3t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 = 0$, che ha un' unica soluzione $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A questo punto si deve risolvere l' equazione elementare $\tan(\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, ed essendo $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ si ha che l' equazione è risolta se $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, cioè se $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ]

(40) Risolvere le disequazioni $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

[ Sappiamo che $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e che in un giro il coseno decresce in $[0, \pi]$ e cresce in $[\pi, 2\pi]$. Deduciamo allora che la prima disequazione è verificata se $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Allo stesso modo $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ e che in un giro il seno cresce in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e decresce in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, quindi la disequazione è verificata se $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi$.
]

(41) Risolvere le disequazioni $\tan(x) > 1$, $\tan(x) < -1$ .

[ Sappiamo che $\tan(x) = 1$ se $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\tan(x) = -1$ se $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ e che la tangente cresce in mezzo giro in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. In questo mezzo giro la prima disequazione è verificata se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, e quindi tra tutti i numeri reali è verificata se $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Allo stesso modo la seconda è verificata se $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

In generale se non conosciamo esplicitamente l' arcotangente di un numero reale $a$ la lasciamo indicata: la disequazione
$\tan(x) > a$ è risolta se $\arctan(a) + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\tan(x) < b$ è risolta se $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \arctan(b) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
]

(42) Risolvere la (doppia) disequazione $-\pi < e^{x^2} - 1 < \pi$.

[ $-\pi < e^{x^2} - 1 < \pi$ equivale a $1 - \pi < e^{x^2} < 1 + \pi$ ; la prima disequazione è sempre verificata, perché l' esponenziale è sempre positivo mentre $1-\pi<0$. Per la seconda disequazione si può applicare la funzione inversa dell' esponenziale, il logaritmo naturale, che è strettamente crescente come l' esponenziale, ottenendo $x^2<\log(1+\pi)$. Quest' ultima disequazione è verificata se $-\sqrt{\log(1+\pi)}<x<\sqrt{\log(1+\pi)}$. ]

(43) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2+1}\,)<-3$

[ Applichiamo la funzione inversa del logaritmo in base $\frac{1}{2}$, cioè $g(t)=(\frac{1}{2})^t$ ai due membri. La disequazione cambia verso perché tale funzione è strettamente decrescente, e si ottiene $\sqrt{x^2+1}>(\frac{1}{2})^{-3}=2^3=8$. Essendo una disuguaglianza tra quantità non negative, possiamo elevare al quadrato e otteniamo $x^2+1>8^2=64$, cioè $x^2>63$, che ha per soluzioni i valori reali tali che $x<-\sqrt{63}$ oppure $x>\sqrt{63}$. ]

**Esempi di limiti calcolati utilizzando la tabella simbolica delle operazioni con gli infiniti e delle funzioni agli estremi del loro intervallo di definizione.**

(1) $\lim_{x\to-\infty} x^2 - x + \frac{3}{x}$

[ $(-\infty)^2 - (-\infty) + \frac{3}{-\infty} = +\infty + \infty + 0 = +\infty$ ]

(2) $\lim_{x\to-\infty} x\, e^{-x}$

[ $(-\infty)\, e^{+\infty} = (-\infty)\,(+\infty) = -\infty$ ]

(3) $\lim_{x\to+\infty}(\cos(\pi + \frac{1}{x}))e^x$

[ $(\cos(\pi + \frac{1}{+\infty})(e^{+\infty}) = (\cos(\pi + 0^+)(+\infty) = (\cos(\pi))(+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$ ]

(4) $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$

[ $e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$ ]

(5) $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$

[ $e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^{(+)}$ ]

(6) $\lim_{x\to0^+} \arctan(\frac{1}{x})$

[ $\arctan(\frac{1}{0^+}) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ]

(7) $\lim_{x\to0^-} \arctan(\frac{1}{x})$

[ $\arctan(\frac{1}{0^-}) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ ]

(8) $\lim_{x\to+\infty} \log(\frac{1}{x})$

[ $\log(\frac{1}{+\infty}) = \log(0^+) = -\infty$ ]

(9) $\lim_{x\to0^+} \log(\frac{1}{x})$

[ $\log(\frac{1}{0^+}) = \log(+\infty) = +\infty$ ]

(10) $\lim_{x\to0^+} \log(e^x - 1)$

[ $\log(0^+) = -\infty$ ]

(11) $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}}$ , $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})^x$

[ $(0^+)^{+\infty} = 0^+$
N.B. $(0^+)^{+\infty} = 0^+$, non è una forma indeterminata ]

(12) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos(x) + \sin(x))^{\tan^2(2x)}$

[ $(2\frac{1}{\sqrt{2}})^{\tan^2(\frac{\pi}{2})} = (\sqrt{2})^{+\infty} = +\infty$ ]

(13) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin(x))^{\tan^2(2x)}$

[ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{\tan^2(\frac{\pi}{2})} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{+\infty} = 0^+$ ]

(14) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ , $\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x})$

[ Sono limiti nulli: ad esempio se $x \to \infty$, anche se $\sin(x)$ non ha limite, il prodotto di una funzione limitata ($\sin(x)$) per una funzione infinitesima (cioè che tende a zero, nel nostro caso $\frac{1}{x}$ se $x \to \infty$) è una funzione infinitesima.
In altre parole alla tabella possiamo aggiungere:
( limitata ) . 0 $= 0$. ]

(15) $\lim_{x\to+\infty} \cos(x) - x$ , $\lim_{x\to-\infty} \cos(x) - x$

[ Anche se $\cos(x)$ non ha limite per $x \to +\infty$, il primo limite vale $-\infty$, il secondo vale $+\infty$, perché la somma di una funzione limitata ($\sin(x)$) e di una infinita ($-x$ ) è infinita (con lo stesso segno dell' infinito iniziale). Nel nostro caso, se ad esempio $x \to +\infty$, per confronto $\cos(x) - x \le 1 - x$ e $1 - x \to -\infty$, se invece $x \to -\infty$, $\cos(x) - x \ge -1 - x$ e $-1 - x \to +\infty$ se $x \to -\infty$.
In altre parole alla tabella possiamo aggiungere
limitata $+\infty = +\infty$ , limitata $-\infty = -\infty$ ]

**Esempi sui casi più semplici di risoluzione delle forme indeterminate**

$\pm\infty \mp \infty$ , $0\,\infty$ , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ , $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$,

( N.B. $(0^+)^{+\infty} = 0^+$, non è una forma indeterminata )

**sui limiti notevoli** ( indicando con log il logaritmo naturale, in base $e$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1 + \tfrac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log a},\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a),\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

)

**sugli ordini di infinito** (i limiti all' infinito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} = 0 \text{ se } \alpha > 0,\ a > 1$$

saranno verificati a breve con l' aiuto delle derivate) .

(1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x$

[ si raccoglie la potenza di grado più elevato, che è quella che domina all' infinito e si ha
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x = \lim_{x\to+\infty} x\,(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1) = (+\infty)(\frac{1}{+\infty} - 1) = (+\infty)(0 - 1) = (+\infty)(-1) = -\infty$ ]

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x}$

[ si raccoglie sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado più elevato, che è quella che domina all' infinito e si ha
$\frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x} = \frac{x^4(2+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3})}{x^4(-3-\frac{11}{x^2}+\frac{4}{x^3})} = \frac{(2+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3})}{(-3-\frac{11}{x^2}+\frac{4}{x^3})} \to \frac{2+0+0}{-3+0+0} = -\frac{2}{3}$

Con questa giustificazione si ottiene la regola generale: se $x \to \pm\infty$ in una funzione razionale, cioè in un rapporto tra polinomi, si trascurano le potenze di grado inferiore:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x} = \lim_{x\to+0} \frac{2x^4}{-3x^4} = -\frac{2}{3}$ ]

(3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x}$

[ si raccoglie sia a numeratore che a denominatore la potenza di grado più basso, che è quella che domina in zero e si ha
$\frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x} = \frac{x(2x^3+5x^2-7)}{x(-3x^3-11x+4)} = \frac{(2x^3+5x^2-7)}{(-3x^3-11x+4)} \to \frac{(0+0-7)}{(0+0+4)} = -\frac{7}{4}$
e quindi in generale se $x \to 0$ in una funzione razionale, cioè in un rapporto tra polinomi, si trascurano le potenze di grado superiore:
$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^4-11x^2+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{4x} = -\frac{7}{4}$ ]

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^3-11x^2+4x}$

[ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+5x^3-7x}{-3x^3-11x^2+4x}$ = (come sopra ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4}{-3x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}x = -\infty$ ]

(5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x^2-7x}{-3x^4-11x^2+4x}$

[ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x^2-7x}{-3x^4-11x^2+4x}$ = (come sopra ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{-3x^4} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3x} = 0$ ]

(6) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} + x$

[ Questa non è una forma indeterminata, $+\infty + \infty = +\infty$ Invece il limite della stessa funzione per $x \to -\infty$ è una forma indeterminata della forma $+\infty - \infty$ che vediamo nel prossimo esempio. ]

(7) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} + x$

[ $\sqrt{x^2+x}+x = \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{(x^2+x-x^2)}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}-x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \frac{x}{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \frac{x}{(-x)(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{(-1)(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} \to -\frac{1}{2}$ ]

(8) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

[ Questa non è una forma indeterminata, anche se la forma indeterminata è apparentemente sotto il segno di radice: raccogliendo (come abbiamo fatto con le funzioni razionali) il termine dominante all' interno della radice, che è $x^2$, si ottiene ( si ricordi che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ per $x < 0$, in particolare se $x \to -\infty$ ): $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} - x = \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to-\infty} -x\,[\,\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\,] =$

$[-(-\infty)](\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+1) = 2\,(+\infty) = +\infty$
Invece il limite della stessa funzione per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata della forma $+\infty - \infty$ che vediamo nel prossimo esempio. ]

(9) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

[ $\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{(x^2+x-x^2)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} \to \frac{1}{2}$ ]

(10) $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin(x)}{x}$

[ Con il cambio di variabile $y = \arcsin(x)$ si ha che $y \to 0$ se $x \to 0$, e $x = \sin(y)$.
Quindi il limite diventa $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{y\to0} \frac{y}{\sin(y)} = 1$ essendo $\frac{y}{\sin(y)} = \frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}} \to \frac{1}{1}$ se $y \to 0$. ]

(11) $\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)}{x}$, $\lim_{x\to0} \frac{\arctan(x)}{x}$

[ $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} \to 1.\cos(0) = 1.1 = 1$, se si pone $y = \arctan(x)$ si ha che $y \to 0$, $x = \tan(y)$, e quindi $\lim_{x\to0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{y\to0} \frac{y}{\tan(y)} = 1$ ]

(12) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

[ $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2}\frac{1}{(1+\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{(1+\cos(x))} \to 1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ]

(13) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

[ $\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,x \to \frac{1}{2}\,0 = 0$ ]

(14) $\lim_{x\to0} \frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}$

[ $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+(\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)} = 1.(-\frac{1}{2}).1 = -\frac{1}{2}$

(15) $\lim_{x\to0} \frac{x(e^{x^2}-1)}{\sin^2(x)\log(1-2x)}$

[ $= \lim_{x\to0}(-\frac{1}{2})\frac{-2x}{\log(1-2x)}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{2}$

(16) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2x+1}{3x^2-4})^{2x-5}$

[ $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2x+1}{3x^2-4})^{2x-5} = \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[(1+\frac{1}{\frac{3x^2-4}{2x+1}})^{\frac{3x^2-4}{2x+1}}\right]^{\frac{2x+1}{3x^2-4}}\right\}^{2x-5} =$
( $y = \frac{3x^2-4}{2x+1} \to +\infty$ ) $\left[\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)(2x-5)}{3x^2-4}} = e^{\frac{4}{3}}$
]

(17) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x^2-3}}$

[ Non è una forma indeterminata $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x^2-3}} = 1^2 = 1$.
Al contrario se cambiamo una sola potenza si ottiene una forma indeterminata del tipo $1^\infty$ come nel successivo esempio.

(18) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x-3}}$

[ $\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x-3}} = \left(1+\frac{2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x-3}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2}{2x+1}}\right)^{\frac{3x^2}{2x+1}}\right]^{\frac{2x^2+x}{x-3}\frac{2x+1}{3x^2}}$
Se si effettua il cambio di variabile $y=\frac{3x^2}{2x+1}\to+\infty$ si ha che $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2}\right)^{\frac{2x^2+x}{x-3}} = [\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y]^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x-3}\frac{2x+1}{3x^2}} = e^{\frac{4}{3}}$ ]

(19) $\lim_{x\to0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

[ $\lim_{x\to0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}[\,(1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}\,]^{\frac{\sin(x)}{x}} =$ $(y=\sin(x)\to0)$ $[\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]^{\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}} = e^1 = e$ ]

(20) $\lim_{x\to0^+} x\log(x)$

[ $\lim_{x\to0^+} x\log(x) =$ $[\,y=\frac{1}{x}\,,\ y\to+\infty\,]$ $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\log(\frac{1}{y}) = \frac{-\log(y)}{y} = 0^-$ ]

(21) $\lim_{x\to0^+}\log(x)\log(1-x)$

[ $\lim_{x\to0^+}\log(x)\log(1-x) = \lim_{x\to0^+}\log(x)\,(-x)\frac{\log(1-x)}{-x} =$ $[\lim_{x\to0^+}(-x\log(x))]\left[\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y}\right] = 0^+.1 = 0^+$

(22) $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

[ $(y=-\frac{1}{x}\,,\ y\to+\infty)$ $\lim_{y\to+\infty}(-y)e^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{e^y} = 0^-$ ]

(23) $\lim_{x\to0^+} x\,e^{\frac{1}{x}}$

[ $(y=\frac{1}{x}\,,\ y\to+\infty)$ $\lim_{y\to+\infty}(\frac{1}{y})e^y = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y} = +\infty$ ]

(24) $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x$

[ $(y=-x\,,\ y\to+\infty)$ $\lim_{y\to+\infty}(-y)\,e^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{e^y} = 0^-$ ]

Abbiamo enunciato e usato nei precedenti esercizi (e lo dimostreremo in seguito dopo aver studiato le derivate) l' ordine che hanno all' infinito alcune funzioni elementari. Ad esempio il logaritmo è trascurabile rispetto ad ogni potenza, e questa rispetto all' esponenziale. Inoltre se ad esempio si è in presenza di una somma del tipo $e^x - 1$, questa per $x \to +\infty$ si comporta come $e^x$, lo stesso per $e^x - x^\alpha$; ad esempio avere $\log(e^x - 1)$ equivale per $x \to +\infty$ ad avere $\log(e^x) = x$, e spesso si usa questo nei passaggi. Per vederlo rigorosamente basta usare il metodo usato per le funzioni razionali, raccogliere il termine dominante. Ad esempio

(25) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(e^x-1)}{x} = 1$

[ Per il principio appena discusso formalmente si sostituisce $e^x$ a $e^x-1$. Rigorosamente $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left[e^x(1-\frac{1}{e^x})\right]}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(e^x)+\log(1-\frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\log(1-\frac{1}{e^x})}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{\log(1-\frac{1}{e^x})}{x} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1 + 0 = 1$ ]

(26) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log(\frac{e^x-1}{x})$

[ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log(\frac{e^x-1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[\log(e^x-1) - \log(x))] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[\log(e^x) - \log(x))] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[x - \log(x))] = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\log(x)}{x} = 1$ ]

**Calcolo di insiemi di definizione e di derivate**

In parentesi tonda l' insieme di derivabilità, che quasi sempre coincide con l' insieme di definizione, che a sua volta per le funzioni elementari coincide con l' insieme di continuità.

Alcune eccezioni tra le funzioni elementari:

le radici non sono derivabili in $x = 0$ , ad esempio

la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è definita e continua in $[0, +\infty)$ ma è derivabile solo in $(0, +\infty)$, analogamente tutte le radici pari.

la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è definita e continua in $(-\infty, +\infty)$ ma è derivabile solo in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (cioè non è derivabile in $x = 0$), analogamente tutte le radici dispari

la funzione $f(x) = \arcsin(x)$ è definita e continua in $[-1, 1]$ ma è derivabile solo in $(-1, 1)$ (cioè non è derivabile in $x = -1$ e $x = 1$), analogamente

la funzione $f(x) = \arccos(x)$ è definita e continua in $[-1, 1]$ ma è derivabile solo in $(-1, 1)$ (cioè non è derivabile in $x = -1$ e $x = 1$),

(1) $f(x) = 2x^5 - 5\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[6]{x^5}} - 3\sin(x) + 4\cos(x) - 7\tan(x) + 9\cot(x) + 2^{x+1} + \log_5(\,(7x)^2\,) - 8\arctan(x) + 10\arcsin(x) + 10\arccos(x)$ $(\ 0 < x < 1\ )$

[ $f(x) = 2x^5 - 5x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{5}{6}} - 3\sin(x) + 4\cos(x) - 7\tan(x) + 9\cot(x) + 2\,2^x + 2\ \log_5(7) + 2\log_5(x) - 8\arctan(x) + 10\arcsin(x) + 10\arccos(x)$ , quindi

$f'(x) = (2)5x^4 - 5\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3(-\frac{5}{6})x^{-\frac{11}{6}} - 3\cos(x) - 4\sin(x) - 7\frac{1}{\cos^2(x)} - 9\frac{1}{\sin^2(x)} + 2\,2^x\log(2) + 0 + 2\frac{1}{x\log(5)} - 8\frac{1}{1+x^2} + 10\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 10\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 10x^4 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{2\sqrt[6]{x11}} - 3\cos(x) - 4\sin(x) - \frac{7}{\cos^2(x)} - \frac{9}{\sin^2(x)} + 2\,2^x\log(2) + \frac{2}{x\log(5)} - \frac{8}{1+x^2} + \frac{10}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{10}{\sqrt{1-x^2}}$ ]

(2) $f(x) = e^x\sqrt[4]{x^3}$ $(\ x > 0\ )$

[ $f(x) = e^x\,x^{\frac{3}{4}}$ , $f'(x) = e^x\,x^{\frac{3}{4}} + e^x\,\frac{3}{4}\,x^{-\frac{1}{4}} = e^x\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)$ ]

(3) $f(x) = x\arcsin(x)$ $(\ -1 < x < 1\ )$

[ $f'(x) = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ]

(4) $f(x) = x^2\ \log(x)$ $(\ x > 0\ )$

[ $f'(x) = 2x\log(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\log(x) + x$ ]

(5) $f(x) = \frac{x^2}{\log(x)}$ $(\ 0 < x \neq 1\ )$

[ $f'(x) = \frac{2x\log(x) - x}{\log^2(x)}$ ]

(6) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$ $\quad ( \; x \neq \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \; )$

$[ \; f'(x) = \frac{2(x^2-5x+5)-(2x-5)(2x+3)}{(x^2-5x+5)^2} = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2} \quad ]$

(7) $f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$ $\quad ( \; x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{-2}{(\sin(x)-\cos(x))^2} \quad ]$

(8) $f(x) = \sin(3x+2) + e^{5x-7} + \log(2x-1)$ $\quad ( \; x > \frac{1}{2} \; )$

$[ \quad f'(x) = 3\cos(3x+2) + 5e^{5x-7} + \frac{2}{2x-1} \quad ]$

(9) $f(x) = \sin(x^2)$ $\quad ( \; x \in \mathbb{R} \; )$

$[ \quad f'(x) = \cos(x^2)\, 2x \quad ]$

(10) $f(x) = \sin^2(x)$ $\quad ( \; x \in \mathbb{R} \; )$

$[ \quad f'(x) = 2\sin(x)\, \cos(x) \quad ]$

(11) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad ( \; -1 < x < 1 \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ]$

(12) $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ $\quad ( \; x < 1 \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}(-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} \quad ]$

(13) $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{\cos(x)}}$ $\quad ( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; x \neq 2k\pi \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}}{(1-\sqrt{\cos(x)})^2} \quad ]$

(14) $f(x) = \log(1+x^2)$ $\quad ( \; x \in \mathbb{R} \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad ]$

(15) $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ $\quad ( \; x \neq 0 \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

Osservazione: se $x > 0$ si ha che $\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ (perché ?), quindi $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ e si poteva dedurre senza fare calcoli che $f'(x) = 0$. Analogamente se $x < 0$ si ha che $\arctan(\frac{1}{x}) = -\arctan(\frac{1}{-x}) = -(\frac{\pi}{2} - \arctan(-x)) = -(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, quindi $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad ]$

(16) $f(x) = \arctan(x^2)$ $\quad ( \; x \in \mathbb{R} \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} \quad ]$

(17) $f(x) = \arcsin(x^2)$, $( \; f(x) = \arccos(x^2) \; )$ $\quad ( \; -1 < x < 1 \; )$

$[ \quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \; ( \; f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} \; ) \quad ]$

(18) $f(x) = \arcsin(\log(x)) \quad ( \frac{1}{e} < x < e )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2(x)}} \quad ]$

(19) $f(x) = \arctan(\log(x)) + \log(\arctan(x)) \quad ( x > 0 )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{x\,(1+\log^2(x))} + \frac{1}{\arctan(x)(1+x^2)} \quad ]$

(20) $f(x) = \sin(x)\ \log(\log(x)) \quad ( x > 1 )$

$[ \quad f'(x) = \cos(x)\ \log(\log(x)) + \sin(x)\frac{1}{x\ \log(x)} \quad ]$

(21) $f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2}) \quad ( x \in \mathbb{R} )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x = \frac{x}{(2+x^2)(\sqrt{1+x^2})} \quad ]$

(22) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2}) \quad ( -1 < x < 1,\ x \neq 0 )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2))}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{|x|\,(\sqrt{1-x^2})} \quad ]$

(23) $f(x) = 2^{\arctan(2\sqrt{x})} \quad ( x > 0 )$

$[ \quad f'(x) = 2^{\arctan(2\sqrt{x})}\log(2)\,\frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)} \quad ]$

(24) $f(x) = e^{\tan(x)} \quad ( -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi )$

$[ \quad f'(x) = \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} = e^{\tan(x)}(1+\tan^2(x)) \quad ]$

(25) $f(x) = \arctan(1+\sin^2(x)) \quad ( -\infty < x < +\infty )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+\sin^2(x))^2}\,2\sin(x)\cos(x) \quad ]$

(26) $f(x) = \arctan(1+\sin(x^2)) \quad ( -\infty < x < +\infty )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+\sin(x^2))^2}\,2x\ \cos(x^2) \quad ]$

(27) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-\log(x)}) \quad ( 1 < x < e )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\log(x)}}\,\frac{1}{2\sqrt{1-\log(x)}}\,(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2\,x\,\sqrt{\log(x)}\,\sqrt{1-\log(x)}} \quad ]$

(28) $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \quad ( x \in \mathbb{R} )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
]

(29) $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad ( x > 1 )$

$[ \quad f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
]

(30) $f_1(x) = \frac{\sqrt{2+\sin(x)}}{\sqrt{2+\cos(x)}} \quad ( x \in \mathbb{R} )$

$f_2(x) = \sqrt{\frac{2+\sin(x)}{2+\cos(x)}}$

[ Evidentemente la funzione è la stessa, calcolare per esercizio la derivata usando le due espressioni.
Con la prima si ottiene

$f_1'(x) = \frac{\frac{\cos(x)}{2\sqrt{2+\sin(x)}}\sqrt{2+\cos(x)} - \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}}\sqrt{2+\sin(x)}}{2+\cos(x)} =$

$= \frac{\cos(x)(2+\cos(x))+\sin(x)(2+\sin(x))}{2(2+\cos(x))\sqrt{2+\sin(x)}\sqrt{2+\cos(x)}}$

con la seconda si ottiene

$f_2'(x) = \frac{\sqrt{2+\cos(x)}}{2\sqrt{2+\sin(x)}} \frac{\cos(x)\,(\,2+\cos(x)\,)+\sin(x)\,(\,2+\sin(x)\,)}{(2+\cos(x))^2}$

e dividendo numeratore e denominatore per $\sqrt{2+\cos(x)}$ si vede che abbiamo ottenuto la stessa espressione. ]

(31) $f(x) = x^x \quad ( x > 0 )$

[ $f(x) = x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x\log(x)}$ , $f'(x) = e^{x\log(x)}(\log(x) + x\frac{1}{x}) = x^x(\log(x) + 1)$ ]

(32) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad ( x > 0 )$

[ $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\log(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{\log(x)}{x}}$ , $f'(x) = e^{\frac{\log(x)}{x}}\,(\frac{1-\log(x)}{x^2}) = (x^{\frac{1}{x}})\,(\frac{1-\log(x)}{x^2})$ ]

(33) $f(x) = (2+\sin(x))^{\cos(x)} \quad ( x \in \mathbb{R} )$

[ $f(x) = e^{\cos(x)\log(2+\sin(x))}$ ,

$f'(x) = e^{\cos(x)\log(2+\sin(x))}\left((-\sin(x))(\log(2+\sin(x))) + \frac{\cos^2(x)}{2+\sin(x)}\right)$

$= (2+\sin(x))^{\cos(x)}\left((-\sin(x))(\log(2+\sin(x))) + \frac{\cos^2(x)}{2+\sin(x)}\right)$ ]

(34) $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x \quad ( x < -1 \text{ oppure } x > 0 )$

[ $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x = e^{\log(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$ , $f'(x) = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}(\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}) = (1+\frac{1}{x})^x(\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$ ]

**Calcolo di limiti con l' aiuto del Teorema di de l' Hospital**

Il Teorema di de l' Hospital consente di calcolare più agevolmente alcuni limiti; in particolare come vedremo ora, permette di dimostrare l' ordine degli infiniti che abbiamo già usato. Anche i limiti notevoli, qualora uno non li ricordasse, possono essere calcolati agevolmente tramite il teorema di de l' Hospital, ma ricordiamo che sono i limiti notevoli, dimostrati indipendentemente, a darci le formule per il calcolo delle derivate di alcune funzioni elementari (che poi possono essere derivate e dare un modo di calcolare i limiti notevoli e molti altri).

È importante però conoscere anche altri metodi, come quelli illustrati da precedenti esercizi e altri che vedremo, per varie ragioni. Non sempre il teorema è applicabile; spesso nell' applicazione del teorema si arriva a un punto in cui iterarlo ancora porterebbe a complicazioni nel calcolo delle derivate, mentre una semplice ispezione del punto dove si è arrivati permette di concludere; inoltre bisogna fare attenzione a non usare il teorema quando non si è in presenza di una forma indeterminata (in tal caso la tesi del teorema non è necessariamente vera, cioè potrebbe essere diverso dal limite iniziale il limite del rapporto delle derivate).

Calcolare i seguenti limiti usando il Teorema di de l' Hospital :

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log a}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a)$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

(5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^n} = 0$ se $a > 1$ , $n \in \mathbb{N}^+$ $(n \geq 1)$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{a^x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{a^x}$ , $\ldots = 0$ , in generale

(6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ se $a > 1$ , $n \in \mathbb{N}^+$ ( qui si usa il teorema $n$ volte).

Anche nel caso più generale di potenza ad esponente reale possiamo ora *dimostrare* gli ordini di infinito prima enunciati.

(7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha}$ ( $\alpha > 0$, $a > 1$ )

[ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\log(a)} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha\, x^\alpha\, \log(a)} = 0$ ]

(8) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$ ( $\alpha > 0$, $a > 1$ )

[ Se $n$ è il primo numero naturale che supera $\alpha$, cioè tale che $\alpha \leq n$, si ha che $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \log(a)} = \cdots = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x(\log(a)^n})$ = ( essendo $\alpha - n \leq 0$ ) $(\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha-n+1))\frac{1}{+\infty} = 0$ ]

(9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x}$ ( $a>1$ )

[ La derivata di $a^x$ è $a^x\log(a)$, mentre la derivata di $x^x = e^{x\log(x)}$ è $e^{x\log(x)}(\log(x)+1) = x^x(\log(x)+1)$.
Se $x \geq a$ si ha che $0 < \frac{a^x}{x^x} = (\frac{a}{x})^x \leq 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} \frac{\log(a)}{log(x)+1} = 0$ perché prodotto di una funzione limitata ( $\frac{a^x}{x^x}$ compresa tra 0 e 1 ) per una infinitesima ( $\frac{\log(a)}{log(x)+1}$).
]

(10) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
[ $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(x)}{x}} = e^0 = 1$ ]

(11) $\lim_{x\to0^+} x\log(x)$

[ $\lim_{x\to0^+} x\log(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0^-$ ]

(12) $\lim_{x\to0^+} x^x$

[ $\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\log(x)} = e^{\lim_{x\to0^+} x\log(x)} = e^0 = 1$ ]

*Osservazione.* Da questo limite si deducono i seguenti limiti, che ora non sono più indeterminati.

$\lim_{x\to0^+}(x^x)^x$ ( $= \lim_{x\to0^+} x^{(x^2)}$ ) $= 1^0 = 1$

$\lim_{x\to0^+} x^{(x^x)} = (0^+)^1 = 0^+$

(13) $\lim_{x\to1} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}x)-\sin(\frac{\pi}{3})}{x-1}$

[ $\lim_{x\to1} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}x)-\sin(\frac{\pi}{3})}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}x)}{1} = \frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}$ ]

(14) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin(x))}{\tan(2x)}$

[ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin(x))}{\tan(2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x))}}{\frac{2}{\cos^2(2x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\cos^2(2x)}{2\sin(x))} = 0$ ]

(15) $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

[ $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ]

(16) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^\pm} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1}$

[ $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^\pm} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^\pm} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \pm\infty$ ]

(17) $\lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}-2+x}{\sin^2(\pi x)}$

[ Applicando due volte il teorema de l' Hospital (dopo la prima applicazione siamo ancora in presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$) si ottiene: $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-2+x}{\sin^2(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{2\pi^2(\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x))} = \frac{1}{\pi^2}$ ]

(18) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2(x)-2\tan(x)}{1+\cos(4x)}$

[ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2(x)-2\tan(x)}{1+\cos(4x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{8\sin(x)\cos(x)-2(1+\tan^2(x))}{-4\sin(4x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{8\cos^2(x)-8\sin^2(x)-2(2\tan(x)(1+\tan^2(x))}{-16\cos(4x)} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ ]

(19) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$

[ A rigore bisogna calcolare separatamente i limiti per $x \to 0^+$ (forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$) e per $x \to 0^-$ (forma indeterminata del tipo $-\infty+\infty$), ma il risultato è lo stesso e procediamo subito con il calcolo del limite.

La funzione da studiare è $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}$ e presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

Usando due volte il teorema di L' Hospital si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x\cos(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0$ ]

(20) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}$

[ A rigore bisogna calcolare separatamente i limiti per $x \to 1^+$ (forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$) e per $x \to 1^-$ (forma indeterminata del tipo $-\infty+\infty$), ma il risultato è lo stesso e procediamo subito con il calcolo del limite.

La funzione da studiare è $\frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)}$ e presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

Usando due volte il teorema di L' Hospital si ottiene $\lim_{x\to 1} \frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)+\frac{x}{x}-1}{\log(x)+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{\log(x)+1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$ ]

(21) $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x)\log(x+1)[\,e^{2x-2}-2x+1\,](\sin(\frac{\pi}{2}x))}{1-\cos(x-1)}$

[ Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ma derivare tutto il numeratore è laborioso.
Basta invece osservare che se
$g(x) = \arctan(x)\log(x+1)(\sin(\frac{\pi}{2}x)$ , $h(x) = \frac{e^{2x-2}-2x+1}{1-\cos(x-1)}$ è
$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \arctan(x)\log(x+1)(\sin(\frac{\pi}{2}x)) = \frac{\pi}{4}\log(2)\,1 = \frac{\pi}{4}\log(2)$ mentre con l' aiuto del teorema di de l' Hospital sul pezzo rimanente si ottiene $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{2x-2}-2x+1}{1-\cos(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2e^{2x-2}-2}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{4e^{2x-2}}{\cos(x-1)} = 4$.

Ne segue che (per il teorema sul prodotto dei limiti)
$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x)\log(x+1)[\,e^{2x-1}-2x+1\,](\sin(\frac{\pi}{2}x))}{1-\cos(x-1)} =$
$= \lim_{x\to 1} g(x)\,h(x) = [\lim_{x\to 1} g(x)]\,[\lim_{x\to 1}\ h(x)] =$
$[\,\frac{\pi}{4}\ \log(2)\,]\,[\,4\,] = \pi\ \log(2)$.

**Questa osservazione vale in generale:** se ci sono parti delle funzioni da studiare che hanno limiti facili e facilmente valutabili esse possono essere separate per concentrarsi sui termini che danno la forma indeterminata. ]

## Calcolo di limiti con l' aiuto della formula di Taylor

Alcuni dei limiti finora calcolati, in particolare alcuni limiti notevoli per $x \to 0$, possono essere calcolati agevolmente con la formula di Taylor (ovviamente vale anche qui l' osservazione che senza una dimostrazione diretta dei limiti notevoli non avremmo calcolato le derivate che qui usiamo), in particolare usando le formule di Taylor-Mac Laurin (di punto iniziale $x_0 = 0$) studiate per alcune funzioni elementari, ne ricordiamo qualcuna.

Se $t \to 0$ si ha che
$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots \frac{1}{n!}t^n + o(t^n)$
$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + o(t^{2n+1})$
$\sin(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} + o(t^{2n+2})$
$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots t^n + o(t^n)$ ,
$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots (-1)^n t^n + o(t^n)$ ,
$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \dots (-1)^n t^{2n} + o(t^{2n+1})$
$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \dots (-1)^n \frac{1}{n}t^n + o(t^n)$
$\arctan(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \dots (-1)^n \frac{1}{2n+1}t^{2n+1} + o(t^{2n+2})$
$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha\, t + o(t) = 1 + \alpha\, t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2) =$
$= 1 + \alpha\, t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + o(t^3) = \dots$
( ad esempio $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \dots$ )

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+o(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x} = 1$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x))}{x} = 1$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\arctan^2(x)}$

[ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\arctan^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x}{(x+o(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+x^2o(1)}{(x+x\,o(1))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2}+o(1))}{[x(1+o(1))]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2}+o(1))}{x^2(1+o(1))^2} = \frac{1}{2}$ ]

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-\log(1+x)-(x-1)^2}{x^3}$ , $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}-\log(1+x)-(x-1)^2}{x^3}$

[ Il primo limite si può calcolare usando le formule di Mac Laurin per esponenziale e logaritmo:
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-\log(1+x)-(x-1)^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3)-(x^2-2x+1)+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3})x^3+x^3o(1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{2} + o(1)) = -\frac{1}{2}$ .
Il secondo limite invece il limite è nullo, perché ricordando gli ordini di infinito la frazione ha come termine dominante al numeratore $-x^2$ e si comporta come $\frac{-x^2}{x^3} \to 0$ se $x \to +\infty$. ]

(6) $\lim_{x\to+\infty}[x - x^2\log(1+\frac{1}{x})]$

[ $\lim_{x\to+\infty}[x - x^2\log(1+\frac{1}{x})] = \lim_{x\to+\infty}[x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2 + o((\frac{1}{x})^2))] = \lim_{x\to+\infty}[x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}o(1))] = \lim_{x\to+\infty}[x - x + \frac{1}{2} - o(1))] = \frac{1}{2}$ ]

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6}$

[ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(x^2-\frac{1}{6}(x^2)^3+(x^2)^3\,o(1))}{x^6} = \frac{x^6(\frac{1}{6}+0(1))}{x^6} = \frac{1}{6}$ ]

(8) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1})$

[ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x}{x(1+x+o(x)-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+xo(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\frac{1}{2}+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \frac{1}{2}$

(9) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)})$

[ $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)-x}{x(x+o(x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}{x^2+o(x^3)} = 0$

(10) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)})$

[ $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x^2}{x^2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{1}{6}x^3+x^4o(1))^2-x^2}{x^2(x+x^2o(1))^2} =$ ( si sviluppa il quadrato del trinomio $(x-\frac{1}{6}x^3+x^4o(1))$ e a meno di termini di ordine superiore al quarto rimangono il quadrato del primo termine e il doppio prodotto del primo con il secondo $\ldots$ ) $= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-2x\,\frac{1}{6}x^3+o(x^4)-x^2}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{3}$

(11) $\lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{\frac{1}{x^2}}$

[ $\lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\log[\cos(x)]^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log[\cos(x)]}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log[\cos(x)]}{x^2}}$.
Calcoliamo quindi $\lim_{x\to 0}\frac{\log[\cos(x)]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log[1+(\cos(x)-1)]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)+o\left((\cos(x)-1)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)(1+o(1))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
Ne segue che il limite proposto vale $e^{-\frac{1}{2}}$.

(12) $\lim_{x\to+\infty} x^6[\arctan(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x^2}]$

[ $\lim_{x\to+\infty} x^6[\arctan(\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x^2}] = \lim_{x\to+\infty} x^6[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^6} + o(\frac{1}{x^6}) - \frac{1}{x^2}] = -\frac{1}{3}$ ]

(13) $\lim_{x\to+\infty} x^2\,[e^{\frac{1}{x^2}} - \cos(\frac{1}{x})]$

[ $\lim_{x\to+\infty} x^2\,[e^{\frac{1}{x^2}} - \cos(\frac{1}{x})] = \lim_{x\to+\infty} x^2\,[1 + \frac{1}{x^2} - (1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}) + o(\frac{1}{x^2})] = \lim_{x\to+\infty} x^2\,[\frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}o(1)] = \frac{3}{2}$

(14) $\lim_{x\to+\infty}[\,x^2\log(\frac{1}{1+x}) + x^2\log(x) + x\,]$

[ $\lim_{x\to+\infty}[\,x^2\log(\frac{1}{1+x})+x^2\log(x)+x\,] = \lim_{x\to+\infty}[\,x^2\log(1)-x^2\log(1+x) + x^2\log(x) + x\,] = \lim_{x\to+\infty}[\,x - x^2(\log(1+x) - \log(x))\,] = \lim_{x\to+\infty}[\,x-x^2(\log(\frac{1+x}{x})\,] = \lim_{x\to+\infty}[\,x-x^2(\log(1+\frac{1}{x})\,] = \lim_{x\to+\infty}[\,x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))\,] = \lim_{x\to+\infty} x - x + \frac{1}{2} - o(1) = \frac{1}{2}$ ]

(15) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x})$

[ $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\log(\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1}{x}) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\log(1 + \frac{1}{2}x + o(x)) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}(\frac{1}{2}x + x\,o(1)) = \lim_{x\to0} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}$ ]

*Osservazione.* Si noti che per calcolare il limite della stessa funzione per $x \to +\infty$ non si può usare la formula di Taylor, ma si può usare invece l' ordine degli infiniti: per $x \to +\infty$ il logaritmo è trascurabile rispetto ad ogni potenza, $e^x - 1$ si comporta esattamente come $e^x$, $\log(e^x-1)$ come $\log(e^x) = x$ : 1 è ovviamente trascurabile rispetto a $e^x$ per $x \to \infty$; volendo vederlo rigorosamente $\log(e^x-1) = \log[\,e^x(1-\frac{1}{e^x})\,] = \log(e^x) + \log(1-\frac{1}{e^x}) = x + \log(1-\frac{1}{e^x})$ e il secondo termine tende a 0 . Quindi dovendo ad esempio calcolare il limite

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x})$ si ha che

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[\,\log(e^x-1) - \log(x))\,] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[\,\log(e^x) - \log(x))\,] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}[\,x - \log(x))\,] = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\log(x)}{x} = 1$

Se invece vogliamo calcolare il limite per $x \to -\infty$ osserviamo che per $x \to -\infty$ nella somma $e^x - 1$ il termine dominante è 1, e quindi ad esempio dovendo calcolare il limite

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x})$ si ha che

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(\frac{e^x-1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(\frac{1-e^x}{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}[\,\log(1-e^x) - \log(-x)\,] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1-e^x)}{x} - \frac{\log(-x)}{x} = \frac{0^-}{-\infty} - \lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-x)}{x} = 0^+ + 0^+ = 0$ per gli ordini di infinito ( $\frac{\log(y)}{y} \to 0$ se $y \to +\infty$ )

(16) $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

[ $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{x+o(x)}{1+\frac{1}{3}x+o(x)-1} = \lim_{x\to0} \frac{x\,(1+o(1))}{x(\frac{1}{3}+o(1))} = 3$ ]

(17) Scrivere la formula di Taylor con punto iniziale $x_0 = \pi$ per la funzione coseno e applicarla al calcolo del limite $\lim_{x\to(\pi)^\pm} \frac{x-\pi}{\sqrt{1+\cos(x)}}$

[ Se $f(x) = \cos(x)$ si ha che $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $f'(\pi) = -\sin(\pi) = 0$, $f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$, $f^{(3)}(\pi) = \sin(\pi) = 0$, $f^{(4)}(\pi) = \cos(\pi) = -1$, e poi le derivate si ripetono periodicamente. Ne segue che $\cos(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + \ldots(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n} + o((x-\pi)^{2n+1})$. Come applicazione

$\lim_{x\to(\pi)^\pm} \frac{x-\pi}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to(\pi)^\pm} \frac{x-\pi}{\sqrt{1+(-1+\frac{1}{2}(x-\pi)^2)+o(x-\pi)^2}} =$
$\lim_{x\to(\pi)^\pm} \frac{x-\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x-\pi|} = \pm\sqrt{2}.$

*Osservazione.* In alternativa per ricavare la formula (e calcolare il limite) si poteva usare un cambio di variabile: posto $y = x - \pi$, $x = \pi + y$, si ha che essendo $\cos(\pi + y) = -\cos(y)$, $\sin(\pi+y) = -\sin(y)$, si può scrivere (per $x = \pi+y \to \pi$, quindi $y \to 0$) $\cos(x) = \cos(\pi + y) = -\cos(y) = -(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \dots (-1)^n \frac{1}{(2n)!}y^{2n} + o(y^{2n+1}))$ e ricavare la formula scritta prima.
]

(18) $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))^{\sin(x)} -1}{x^3}$

[ $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))^{\sin(x)}-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)\ \log(\cos(x))}-1}{x^3} =$
( $e^t - 1 = t(1 + o(1))$, $\sin(x) = x(1 + o(1))$, $\log(1 + t) = t(1 + o(1))$, $\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))$ )
$= \lim_{x\to 0}[ \frac{\sin(x)\ \log(\cos(x))](1+o(1))}{x^3} = \lim_{x\to 0}[ \frac{\sin(x)\ \log(1+\cos(x)-1)](1+o(1))}{x^3} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{[x(1+o(1))(\cos(x)-1](1+o(1))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{[x(1+o(1))(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)](1+o(1))}{x^3} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$ ]

## Studio di funzioni

Indicheremo con $D$ l' insieme di definizione della funzione, che viene stabilito all' inizio dello studio, mentre con $I$ indicheremo l' immagine della funzione, che viene stabilita alla fine, dopo aver studiato altre caratteristiche della funzione. In alcuni esercizi vengono richiesti solo alcuni elementi, ad esempio insieme di definizione e asintoti, o monotonia ...; se non vengono date le altre risposte (ad esempio convessità e flessi o altro) significa che non erano richiesti nelle domande.

Se $x_0$ è un punto di massimo [risp. minimo] relativo per una funzione $f(x)$, con valore $y_0 = f(x_0)$, diremo brevemente che la funzione ha un massimo [risp. minimo] in $(x_0, y_0)$, cioè indicheremo il punto del grafico della funzione corrispondente al punto di massimo esplicitando sia il punto di estremo che il valore di tale estremo.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$ ( cioè $(0,0)$ è il punto di intersezione con l' asse delle ordinate) ; $f(x) = 0$ se $x = 0$ o $x = 3$ ( cioè $(0,0)$ e $(3,0)$ sono i punti i di intersezione con l' asse delle ascisse ) ; $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ; ; crescente in $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ , decrescente in $(0, 2)$ ; massimo relativo in $(0, 0)$ ; minimo relativo in $(2, -4)$ ; $f''(x) = 6x - 6$ ; $f$ convessa in $(1, +\infty)$ ; concava in $(-\infty, 1)$ ; flessi in $(1, -2)$ ; non ha asintoti ; l' immagine della funzione è $I = (-\infty, +\infty)$ . ]

(2) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 1$ ; $f(x) = 0$ se $x = \pm 1$ ; $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$ ; crescente in $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$ , decrescente in $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ ; massimo relativo in $(0, 1, )$ , minimi relativi (e assoluti) in $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ ; $f''(x) = 12x^2 - 4$ ; convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ ; concava in $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ; flessi in $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$ ; non ha asintoti ; $I = [0, +\infty)$

*Osservazione* La funzione è pari, cioè $f(-x) = f(x)$, quindi in realtà bastava studiarla per $x \geq 0$, il grafico è simmetrico rispetto all' asse delle ordinate. Analoga osservazione per le funzioni dispari, cioè tali che $f(-x) = -f(x)$, in tal caso il grafico è simmetrico rispetto all' origine. ]

(3) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\pm\frac{\pi}{2}}$ ; $f(0) = 1$ ; $f(x)$ sempre positiva ; $f'(x) = e^{\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2}$ sempre positiva ; crescente in $(-\infty, +\infty)$ ; non ha massimi né minimi relativi ; $f''(x) = e^{\arctan(x)} \frac{1}{(1+x^2)^2} + e^{\arctan(x)} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = e^{\arctan(x)} \frac{1}{(1+x^2)^2}(1 - 2x)$ ; convessa in $(-\infty, \frac{1}{2})$ ; concava in $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ; flesso in

$(\frac{1}{2}, e^{\arctan(\frac{1}{2})})$ ; asintoti $y = e^{\pm\frac{\pi}{2}}$ (orizzontali) per $x \to \pm\infty$ ; $I = [e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}]$ ]

(4) $f(x) = \log(\sin(x))$

[ $D = (k\pi, \pi + k\pi)$, è periodica di periodo $2\pi$ e basta studiarla in $(0, \pi)$ ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty$ ; $f(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{2}$ ; $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$ ; crescente in $(0, \frac{\pi}{2})$ , decrescente in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ; massimo relativo (e assoluto) in $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ; $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ ; sempre concava in $(0, \pi)$ ; asintoti $x = 0$, $x = \pi$ (verticali) ; $I = (-\infty, 0])$ . ]

(5) $f(x) = xe^x$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$ ; $f(x) = 0$ se $x = 0$ ; $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ ; crescente in $(-1, +\infty)$ , decrescente in $(-\infty, -1)$ ; minimo relativo in $(-1, -\frac{1}{e})$ ; $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ ; convessa in $(-2, +\infty)$ ; concava in $(-\infty, -2)$ ; flesso in $(-2, -\frac{2}{e^2})$ ; asintoto $y = 0$ (orizzontale) per $x \to -\infty$ ; $I = [-\frac{1}{e}, +\infty)$ . ]

(6) $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$

[ $D = [0, +\infty)$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ; $f(0) = 0$ ; $f(x) = 0$ se $x = 0$ ; $f'(x) = e^{-\sqrt{x}}(1 - \frac{\sqrt{x}}{2})$ ; $f$ crescente in $(0, 4)$ , decrescente in $(4, +\infty)$ ; massimo relativo (e assoluto) in $(4, 4e^{-2})$ ; $f''(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{4}(1 - \frac{3}{\sqrt{x}})$ ; convessa in $(9, +\infty)$ ; concava in $(0, 9)$ ; flesso in $(9, 9e^{-3})$ ; asintoto $y = 0$ (orizzontale) per $x \to +\infty$ ; $I = [0, 4e^{-2}]$ .

(7) $f(x) = x\log(x)$

[ $D = (0, +\infty)$ ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(x) = 0$ se $x = 1$ ; $f'(x) = \log(x) + 1$ ; crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ , decrescente in $(0, \frac{1}{e})$ ; ha un minimo relativo, a posteriori assoluto, in $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ ; $f''(x) = \frac{1}{x}$ ; è sempre convessa in $D$ ; non ha asintoti ; $I = [-\frac{1}{e}, +\infty)$ . ]

(8) $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$

[ $D = (0, +\infty)$ ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ ; $f(x) = 0$ se $x = 1$ ; $f'(x) = \frac{1-\log(x)}{x^2}$ ; crescente in $(0, e)$ , decrescente in $(e, +\infty)$ ; ha un massimo relativo, a posteriori assoluto, in $(e, \frac{1}{e})$ ; $f''(x) = \frac{2x\log(x) - 3x}{x^4}$ ; è convessa in $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$, concava in $(0, e^{\frac{3}{2}})$ e ha un flesso in $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$ ; ha l' asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$ e l' asintoto verticale $x = 0$ ; $I = (-\infty, \frac{1}{e}]$ . ]

(9) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$

[ $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$ ; $f(x) = 0$ se $x = -2$ oppure $x = 0$ ; $f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ ; sempre crescente in $D$ ; $f''(x) = -2(x+1)^{-3}$ ; convessa in $(-\infty, -1)$ ; concava in $(-1, +\infty)$ ; asintoti $x = -1$ (verticale) , $y = x + 1$ (obliquo) per $x \to \pm\infty$ ; $I = (-\infty, +\infty)$ . ]

(10) $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2-1}$

[ $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ; $f(0) = -2$ ; $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(1)^\pm} f(x) = 0$ : essendo della forma $\frac{0}{0}$ si può usare il teorema di de l' Hospital e si vede cha la discontinuità è eliminabile ; asintoti $x = -1$ (verticale) , $y = x$ (obliquo) per $x \to \pm\infty$ ; $I = (-\infty, +\infty)$ .
Osservazione: l' esercizio consiste nel ricavare gli elementi precedenti usando i teoremi di l' Hospital e le formule per gli asintoti obliqui, ma tutto è più semplice se si osserva che usando il metodo di Ruffini il numeratore si può scomporre in $(x^2+x-2)(x-1)$, e quindi la funzione è in realtà $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$ ; da questa forma si vede che in $x = 1$ si può definire la funzione (vale 0) e si ricavano più facilmente tutte le conclusioni precedenti ; inoltre è più semplice ricavare le altre informazioni sulla funzione: $f(x) = 0$ se $x = -2$ oppure $x = 1$ ; $f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$ ; sempre crescente, cioè in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 1)$ e in $(1, +\infty)$; non ci sono massimi o minimi relativi; $f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$ ; ; $f$ convessa in $(-\infty, -1)$, concava in $(-1, 1)$ e in $(1, +\infty)$; ]

(11) $f(x) = 4e^{x^2} - 4x^2$

[ $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, no asintoti, $f'(x) = 8x(e^{x^2} - 1)$, decresc in $(-\infty, 0)$, cresc. in $(0, +\infty)$, min. rel. e assoluto $(0, 4)$, $f''(x) = 8(e^{x^2} - 1) + 16x^2e^{x^2}$, sempre convessa, immagine $I = [4, +\infty)$ ]

(12) $f(x) = (4x + 3)e^{\frac{1}{x}}$

[ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ , $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ ; $f'(x) = (4 - \frac{4x+3}{x^2})e^{\frac{1}{x}} = \frac{4x^2-4x-3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ; crescente in $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e $(\frac{3}{2}, +\infty)$ , decrescente in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{3}{2})$ ; massimo relativo in $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ , minimo relativo in $(\frac{3}{2}, 9e^{\frac{2}{3}})$ ; $f''(x) = \frac{10x+3}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$ ; convessa in $(-\frac{3}{10}, 0)$ e $(0, +\infty)$ , concava in $(-\infty, -\frac{3}{10})$ ; flesso in $(-\frac{3}{10}, \frac{9}{5}e^{-\frac{10}{3}})$ ; asintoto $x = 0$ (verticale), $y = 4x+7$ (obliquo) per $x \to \pm\infty$ ; $I = (-\infty, e^{-2}] \cup [9e^{\frac{2}{3}}, +\infty)$

(13) $f(x) = \frac{xe^x+2}{e^x+1}$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1} = 2$ (perché $e^x$, $xe^x \to 0$) ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ ; $f(0) = 1$ ; $f'(x) = \frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x(xe^x+2)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x\,[\,(1+x)(e^x+1)-(xe^x+2)}{(e^x+1)^2}\,] = \frac{e^x(x+e^x-1)}{(e^x+1)^2}$ ; essendo $x + e^x - 1 > 0$ $[< 0]$ se $x > 0$ $[x < 0]$ perché somma ( $(x) + (e^x - 1)$ ) di due numeri positivi [negativi], la funzione è crescente in $(0, +\infty)$ , decrescente in $(-\infty, 0)$ e ha un unico minimo relativo in $(0, 1)$ ; asintoti $y = 2$ (orizzontale) per $x \to -\infty$ , $y = x$ (obliquo) per $x \to +\infty$ perché $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x+2}{xe^x+x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{e^x+1} = 0$ ; $I = [1, +\infty)$ . ]

(14) $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$

[ $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$ , $f(x) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = -1$ ; $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{x+1}$ ; $f$ crescente in $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$ e in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, decrescente in $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$ ; $f$ ha un massimo relativo in $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, (2 + \sqrt{5})e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}})$ e un minimo relativo in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, (2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})$ ; $f''(x) = (x^2+5x+4)e^{x+1}$ ; $f$ è convessa in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$, concava in $(-4, -1)$ e ha due flessi in $(-4, 12e^{-3})$ e in $(-1, 0)$ $f$ ha $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e non ha altri asintoti ; $I = [(2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, +\infty)$ . ]

(15) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; la funzione è periodica di periodo $2\pi$, non esiste quindi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, e basta studiarla ad esempio in $[0, 2\pi]$ ; $f(0) = 1$ ; $f(x) = 0$ se $x = \frac{3}{4}\pi$ , $x = \frac{7}{4}\pi$ ; $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ ; $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x) = -f(x)$ ; $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$ ; essendo $f''(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$, $f''(\frac{5}{4}\pi) = -\sin(\frac{5}{4}\pi) - \cos(\frac{5}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$, il punto $x = \frac{\pi}{4}$ è di massimo relativo, a posteriori assoluto, con valore $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, mentre il punto $x = \frac{5}{4}\pi$ è di minimo relativo, a posteriori assoluto, con valore $f(\frac{5}{4}\pi) = \sin(\frac{5}{4}\pi) + \cos(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$.
Dall' analisi fin qui fatta si ha che la funzione ha un massimo in $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$, un minimo in $(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2})$ ed è quindi crescente in $(0, \frac{\pi}{4})$ e $(\frac{5}{4}\pi, 0)$ , decrescente in $(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi)$ ; inoltre $f$ è positiva in $(0, \frac{3}{4}\pi)$ e $(\frac{7}{4}\pi, 0)$, negativa in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$.
Essendo $f''(x) = -f(x)$ si ha che $f''$ è negativa in $(0, \frac{3}{4}\pi)$ e

$(\frac{7}{4}\pi, 0)$, dove $f$ è concava, positiva in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$ dove $f$ è convessa.
L' immagine è $I = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

*Osservazione.* Per lo studio di questa funzione abbiamo evitato di risolvere disequazioni, utilizzando il criterio basato sul segno della derivata seconda in un punto critico della funzione (un punto cioè dove la derivata si annulla) per stabilire quali sono i punti di massimo e minimo relativo. Da questo, essendo solo due i punti critici, e conoscendo i valori per i quali la funzione si annulla, abbiamo dedotto gli intervalli di crescenza e decrescenza, di positività e negatività della funzione.
Questa tecnica è utile anche per altre funzioni, e in particolare nello studio delle funzioni trigonometriche, dove risolvere disequazioni può essere più complicato.
Naturalmente l' esempio era semplice, e abbiamo anche approfittato del fatto che $f''(x) = -f(x)$ per capire gli intervalli di convessità e concavità della funzione. ]

(16) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1}$

[ Definita in $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, periodica di periodo $2\pi$, studiamola in $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ ; $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^\pm} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1} = \pm\infty$ ; $f(0) = -1$ ; $f(x) = 0$ se $x = \frac{3}{2}\pi$ ; $f'(x) = \frac{-\sin^2(x)+\sin(x)-\cos^2(x)}{(\sin(x)-1)^2} = \frac{\sin(x)-1}{(\sin(x)-1)^2} = \frac{1}{\sin(x)-1} < 0$ in $D$ ; $f$ sempre decrescente in $D$ e non ha massimi o minimi relativi in nel suo dominio ; $f''(x) = \frac{-\cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}$ ; convessa in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ ; concava in $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{3}{2}\pi, 0)$ ; flesso in $(\frac{3}{2}\pi, 0)$ ; $I = (-\infty, +\infty)$ . ]

(17) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

[ $D = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$ ; $f(x) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = 3$, è positiva (come risultato di una radice quadrata) in ogni altro punto ; se $x$ appartiene al dominio $D$ e $x \neq 0$, $x \neq 3$, cioè $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ $f$ è derivabile in $x$ con $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$ ; $f$ è crescente in $(3, +\infty)$ , decrescente in $(-\infty, 0)$ ; ha due minimi relativi (a posteriori assoluti) in $(0, 0)$ e $(3, 0)$ ; $f''(x) = -\frac{9}{4}\frac{1}{(x^2-3x)\sqrt{x^2-3x}}$ ; $f$ è concava in ogni punto del dominio $D$; i punti $x = 0$, $x = 3$ sono punti singolari della derivata, in 0 la derivata sinistra vale $f'_s(0) = -\infty$, mentre in 3 la derivata destra vale $f'_d(3) = +\infty$ ; ci sono due asintoti obliqui $y = x - \frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$ , $y = -x + \frac{3}{2}$ per $x \to -\infty$ ; $I = [0, +\infty)$ . ]

(18) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$

[ $D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ; $f(0) = 0$ ; $f(x) = 0$ se $x = 0$ ; $f'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ se $x \in D$, $x \neq 0, 2$ ; in $x = 0$ e $x = 2$ ci sono punti singolari della derivata e $f'_s(0) = +\infty)$, $f'_d(2) = -\infty)$ ; crescente in $(-\infty, 0)$ , decrescente in $(2, +\infty)$ ; massimi relativi in $(0, 0)$ e $(2, 2)$ ; $f''(x) = \frac{1}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}}$ ; convessa in tutto l' insieme di definizione $D$ ; ha asintoti $y = 1$ (orizzontale) per $x \to +\infty$ , $y = 2x - 1$ (obliquo) per $x \to -\infty$ ; $I = (-\infty, 2]$ . ]

(19) $f(x) = x \arctan(x)$

[ $D = (-\infty, +\infty)$ ; $f$ pari ; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ; $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se $x = 0$, $f$ sempre positiva altrove ; $f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$; $f$ crescente in $(0, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, 0)$ ; minimo relativo e assoluto in $(0, 0)$. $f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ ; $f$ sempre convessa ; ci sono due asintoti obliqui $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ per $x \to +\infty$ , $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ per $x \to -\infty$ ( è utile ricordare che $\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ se $x > 0$, mentre $\arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ se $x < 0$ ) ; $I = [0, +\infty)$ . ]

(20) $f(x) = x^x$

[ $D = (0, +\infty)$ ; $f$ sempre positiva ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1^-$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f'(x) = x^x(\log(x) + 1)$ ; $f$ crescente in $(0, \frac{1}{e})$, decrescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ ; minimo relativo e assoluto in $(\frac{1}{e}, (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}})$ ; $f''(x) = x^x \left[(\log(x) + 1)^2 + \frac{1}{x}\right]$ ; $f$ sempre convessa in $D$ ; $I = [(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}), +\infty)$

(21) $f(x) = \arcsin(e^x)$

[ $D = (-\infty, 0]$, derivabile in $(-\infty, 0)$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ ; $f(0) = \frac{\pi}{2}$ ; $f(x) > 0$ sempre ; $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ; sempre crescente in $(-\infty, 0]$ massimo assoluto in $(0, \frac{\pi}{2})$ non ci sono altri massimi o minimi relativi; $f''(x) = \frac{e^x+e^{3x}}{(1-e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$ ; $f$ sempre convessa in $D$ ; asintoto $y = 0$ (orizzontale) per $x \to -\infty$ ; $I = (0, \frac{\pi}{2}]$ . ]

(22) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

[ $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, as. obl. $y = x + \frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$ as. obl. $y = -x - \frac{3}{2}$ per $x \to -\infty$ : $f$ derivabile in $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ con $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$, decresc in $(-\infty, -2)$, cres in $(-1, +\infty)$, min ass $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ , $f''(x) = \frac{-1}{4(x^2+3x+2)^{\frac{3}{2}}}$, $f$ sempre concava, $I = [0, +\infty)$ ]

(23) $f(x) = \sqrt{(x + 4)x(4x - 5)}$

[ La funzione si può scrivere come indicato (già scomposta in fattori e questo è comodo per il dominio) o svolgendo i prodotti come $f(x) = \sqrt{4x^3 + 11x^2 - 20x}$, utile per il calcolo della derivata; $D = [-4, 0] \cup [5/4, +\infty)$, derivabile in $(-4, 0) \cup (5/4, +\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, no asintoti, $f' = \frac{12x^2+22x-20}{2\sqrt{(x+4)x(4x-5)}}$, massimo relativo in $(-5/2, 15/2)$, minimo assoluto in $(-4, 0)$, $(0, 0)$ e $(5/4, 0)$, immagine $I = [0, +\infty)$. ]

(24) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$

[
$D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, no asint. , $f'(x) = \frac{2}{3}(2x + 5)^{-\frac{2}{3}}$, sempre cresc. $f''(x) = -\frac{8}{9}(2x + 5)^{-\frac{5}{3}}$, $f$ convessa (e negativa) in $(-\infty, -\frac{5}{2})$, $f$ concava (e positiva) in $(-\frac{5}{2}, +\infty)$, flesso a tang. verticale in $(-\frac{5}{2}, 0)$ $I = (-\infty, +\infty)$ ]

(25) $f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$

[ $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, asintoti obliqui $y = x$ per $x \to \pm\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}}[\frac{x-2}{x-1}]$, crescente in $(-\infty, 1)$ e in $(2, +\infty)$, decrescente in $(1, 2)$, minimo relativo $(2, e)$, immagine $(-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$ ]

(26) $f(x) = (2 + x)e^{x^2}$

[ $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, no asintoti, $f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{x^2}$ ], decrescente in $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$, crescente in $(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ e in $(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, massimo relativo $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})e^{(\frac{3}{2}+\sqrt{2})})$, minimo relativo $(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})e^{(\frac{3}{2}-\sqrt{2})})$ ]

(27) $f(x) = \arctan(\frac{x}{x+1})$

[ Insieme di definizione $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$; $y = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$; $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$ ; $f' = \frac{1}{2x^2+2x+1}$, $f$ sempre crescente, non ci sono max/min relativi ; $f'' = \frac{-4x-2}{(2x^2+2x+1)^2}$, $f$ convessa in $(-\infty, -1)$ e $(-1, -\frac{1}{2})$, concava in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, flesso in $(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$, l' immagine è $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ]

## Integrali riconducibili alla tabella e calcolati con sostituzione immediata

Sostituzione immediata: se $F(y)$ è una primitiva di $f(y)$, cioè conosco $\int f(y)\,dy$, e devo calcolare un integrale che ha la forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ , si pone $g(x)=y$, $g'(x)dx=dy$ e si ottiene $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(y)\,dy=F(y)+c=F(g(x))+c$ . Si usa quando ho una funzione ($g(x)$ ) eventualmente "nascosta dentro un' altra funzione" e ho anche poi la moltiplicazione per la derivata $g'(x)$ di questa funzione. In questo caso dò un nome a questa funzione ($g(x)=y$), scrivo i differenziali $g'(x)dx=dy$ e procedo ...

(1) $\int \Big[ 2x^2-\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{x}+\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}-\frac{2}{1+x^2}+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{e^x}{5}-2^x-\cos(x)+$
$+\sin(x)-\frac{3}{\cos^2(x)}-\frac{4}{\sin^2(x)}\,]\,dx$

[ $\int \Big[ [\,2x^2-\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{x}+\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}-\frac{2}{1+x^2}+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{e^x}{5}-2^x-\cos(x)+$
$+\sin(x)-\frac{3}{\cos^2(x)}-\frac{4}{\sin^2(x)}\Big]\,dx=\int \Big[2x^2-x^{\frac{3}{5}}-3\frac{1}{x}+4x^{-\frac{3}{5}}-2\frac{1}{1+x^2}+$
$+5\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{5}e^x-2^x-\cos(x)+\sin(x)-3\frac{1}{\cos^2(x)}-4\frac{1}{\sin^2(x)}\Big]\,dx=$
$=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}-3\log(|x|)+4(\frac{5}{2})x^{\frac{2}{5}}-2\arctan(x)+5\arcsin(x)+$
$\frac{1}{5}e^x-\frac{2^x}{\log(2)}-\sin(x)-\cos(x)-3\tan(x)+4\cot(x)+c=$
$=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}-3\log(|x|)+10\sqrt[5]{x^2}-2\arctan(x)+5\arcsin(x)+$
$\frac{1}{5}e^x-\frac{2^x}{\log(2)}-\sin(x)-\cos(x)-3\tan(x)+4\cot(x)+c=\frac{2}{3}x^3-$
$\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}-3\log(|x|)+10\sqrt[5]{x^2}-2\arctan(x)+5\arcsin(x)+\frac{1}{5}e^x-$
$\frac{2^x}{\log(2)}-\sin(x)-\cos(x)-3\tan(x)+4\cot(x)+c$ ]

(2) $\int e^{2x-3}\,dx$

[ $\int e^{2x-3}\,dx=(\ 2x-3=y\ ,\ 2dx=dy\ )\ \frac{1}{2}\int e^y\,dy=\frac{1}{2}e^y=$
$\frac{1}{2}e^{2x-3}$ ] Analogamente
$\int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ e *in generale*

se $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ allora
$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$
ad esempio $\int \sin(\frac{x}{2}+3)\,dx=-2\cos(\frac{x}{2}+3)+c$

(3) $\int \cot(x)\,dx=\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx=\log(|\sin(x)|)+c$

[ Ponendo $\sin(x)=y$, $\cos(x)dx=dy$, si ha che $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx=$
$\int \frac{1}{y}dy=\log(|y|)+c=\log(|\sin(x)|)+c=$ ]

(4) $\int \tan(x)\,dx=\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=-\log(|\cos(x)|)+c$

[ Ponendo $\cos(x)=y$, $-\sin(x)dx=dy$, si ha che $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=$
$-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=-\int \frac{1}{y}dy=-\log(|y|)+c=-\log(|\cos(x)|)+c=$
$\log(\frac{1}{|\cos(x)|})+c$ ]

(5) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c$

[ $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,dx =$ ( $\frac{x}{a} = y$ , $x = ay$ , $dx = ady$ ) $\frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{a}\arctan(y) + c = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c$ Ad *esempio* $\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$ , $\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{5}}\,dx = \sqrt{5}\arctan(\sqrt{5}x) + c$ ]

(6) $\int \frac{1}{b^2x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}x) + c$

[ $\int \frac{1}{b^2x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{x^2+(\frac{a}{b})^2}\,dx =$ ( dall' esempio precedente ) $\frac{1}{b^2}\frac{b}{a}\arctan(\frac{b}{a}x) + c = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}x) + c$
oppure direttamente $\int \frac{1}{b^2x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{b}{a}x)^2+1}\,dx =$ ( $\frac{b}{a}x = y$ , $dx = \frac{a}{b}dy$ ) $\frac{1}{a^2}\frac{a}{b}\int \frac{1}{(y)^2+1}\,dy = \frac{1}{ab}\arctan(y)+c = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}x)+c$ ]

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx = \frac{1}{b}\arcsin(\frac{b}{a}x) + c$ ( $a > 0$ )

[ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2(1-(\frac{b}{a}x)^2)}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{b}{a}x)^2}}\,dx =$ ( $\frac{b}{a}x = y$ , $dx = \frac{a}{b}dy$ ) $\frac{1}{a}\frac{a}{b}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{a}\frac{a}{b}\arcsin(y) + c = \frac{1}{b}\arcsin(\frac{b}{a}x) + c$ Ad *esempio* $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{5}}) + c$ ]

(8) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

[ $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,dx =$ ( $x^3 = y$ , $3x^2dx = dy$ ) $\frac{1}{3}\int e^y\,dy = \frac{1}{3}e^y + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$ ]

(9) $\int e^x \sin(e^x)\,dx$

[ $\int e^x \sin(e^x)\,dx =$ ( $e^x = y$ , $e^x dx = dy$ ) $\int \sin(y)\,dy = -\cos(y) + c = -\cos(e^x) + c$ ]

(10) $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4)}\,dx$

[ $\int \frac{x^3}{\cos^2(x^4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\cos^2(x^4)}\,dx =$ ( $x^4 = y$ , $4x^3dx = dy$ ) $\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(y)}\,dy = \frac{1}{4}\tan(y) + c = \frac{1}{4}\tan(x^4) + c$ ]

(11) $\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx$

[ $\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx =$ ( $\arctan(x) = y$ , $\frac{1}{1+x^2}dx = dy$ ) $\int e^y\,dy = e^y + c = e^{\arctan(x)+c}$ ]

(12) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

[ $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx =$ ( $x^2+1 = y$ , $2xdx = dy$ ) $\frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$ ]

(13) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

[ $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int (1-\frac{e^x}{1+e^x})\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx =$ ( $1+e^x = y; e^x dx = dy$ ) $= x - \int \frac{dy}{y} = x - \log|y| + c = x - \log(1+e^x) + c$ ]

(14) $\int_1^e \frac{\log(x)}{x}\,dx$

[ Nella sostituzione in un integrale definito non è necessario tornare alla variabile di partenza, basta cambiare gli estremi di integrazione secondo il cambio di variabile fatto:
$\int_1^e \frac{\log(x)}{x}\,dx =$ ( $\log(x) = y$ , $\frac{1}{x}dx = dy$, $0 = \log(1) \le y \le \log(e) = 1$ ) $\int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}y^2\,|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$
(il risultato è lo stesso se si calcola l' integrale indefinito che tornando alla variabile di partenza è $\int \frac{\log(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log^2(x) + c$ e si valuta tra $x = 1$ e $x = e$). ]

(15) $\int \frac{1}{\cos^4(x)}\,dx$

[ $\int \frac{1}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx + \int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx$ ( $\tan(x) = y; \frac{1}{\cos^2(x)}dx = dy$ ) $= \tan(x) + \int y^2\,dy = \tan(x) + \frac{y^3}{3} + c = \tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3} + c$ ]

(16) $\int \frac{x}{2+x^4}\,dx$

[ $\int \frac{x}{2+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2+(x^2)^2}\,dx =$ ( $x^2 = y$ , $2xdx = dy$ ) $\frac{1}{2}\int \frac{dy}{2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{y}{\sqrt{2}}) + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{x^2}{\sqrt{2}}) + c$ ]

(17) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

[ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx =$ ( $x^2 = y$ , $2xdx = dy$ ) $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\arcsin(y) + c = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + c$ ]

(18) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

[ Dato che la derivata di $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$ si scrive l' integrale come $-\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}\,dx$ . Con la sostituzione $\frac{1}{x} = y$, $\frac{-1}{x^2}\,dx = dy$ l' integrale indefinito risulta essere $-\int e^y\,dy = -e^y + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$, e valutato tra gli estremi 1 e 2 si trova $-e^{\frac{1}{2}} - (-e^1) = e - e^{\frac{1}{2}}$.
Come ricordato in precedenza nel calcolo di un integrale definito non è necessario tornare alla variabile di partenza, basta cambiare gli estremi di integrazione.
Si noti comunque che quando la funzione cui si dà un nuovo nome è decrescente ( $\frac{1}{x}$ in questo caso ) i nuovi estremi di integrazione possono essere del tipo $\int_c^d f(x)\,dx$ dove $c > d$, e

ricordiamo che per definizione $\int_c^d f(x)\,dx = -\int_d^c f(x)\,dx$, ad esempio $\int_2^1 y\,dy = -\int_1^2 y\,dy = -(\frac{y^2}{2})\,|\,_1^2 = -(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$.

Ciò premesso nel nostro caso fatta la sostituzione $\frac{1}{x} = y$, $\frac{-1}{x^2}\,dx = dy$ i nuovi estremi sono $\frac{1}{1} = 1$ e $\frac{1}{2}$, quindi l' integrale proposto si calcola come $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}\,dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^y\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^y\,dy = e - e^{\frac{1}{2}}$. ]

(19) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$

[ $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx =$ ( $e^x = y$ , $e^x dx = dy$ ) $\int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{2}\arctan(\frac{y}{2}) + c = \frac{1}{2}\arctan(\frac{e^x}{2}) + c$ ]

## Integrali per parti

( se si conosce $F(x)$ primitiva di $f(x)$ si ha che

$\int f(x)g(x)\,dx = \int F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$ )

Si usa in particolare per funzioni del tipo

$x^n e^x$ ( con $F'(x) = e^x$, $F(x) = e^x$ )

[ $x^n a^x$ ( con $F'(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{\log(a)}$ ) , ]

$x^n \sin(x)$ ( con $F'(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$ ) ,

$x^n \cos(x)$ ( con $F'(x) = \cos(x)$, $F(x) = \sin(x)$ ) ,

$x^n \log(x)$ ( con $F'(x) = x^n$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ) e più in generale

$x^n \log^m(x)$ ( con $F'(x) = x^n$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, si deve iterare )

$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ( con $F'(x) = e^x$, $F(x) = e^x$ , oppure $F'(x) = \cos(\beta x)$, $F(x) = \frac{1}{\beta}\sin(\beta x)$ ) ,

$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ( con $F'(x) = e^x$, $F(x) = e^x$ , oppure $F'(x) = \sin(\beta x)$, $F(x) = -\frac{1}{\beta}\cos(\beta x)$ ) ,

(1) $\int xe^x\,dx$

[ $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$ ]

(2) $\int x2^x\,dx$

[ $\int x2^x\,dx = x\frac{2^x}{\log(2)} - \int \frac{2^x}{\log(2)}\,dx = x\frac{2^x}{\log(2)} - \frac{2^x}{\log^2(2)} + c$ ]

(3) $\int x^2 e^x\,dx$

[ $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2[xe^x - \int e^x\,dx] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ ]

(4) $\int \log(x)\,dx$

[ $\int \log(x)\,dx = \int 1\,\log(x)\,dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}dx == x\log(x) - \int dx = x\log(x) - x + c$ ]

(5) $\int x \log_2(x)\, dx$

[ $\int x \log_2(x)\, dx = \frac{x^2}{2} \log_2(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x \log(2)}\, dx = \frac{x^2}{2} \log_2(x) - \frac{1}{2\log(2)} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \log_2(x) - \frac{1}{4\log(2)} x^2 + c$ ]

(6) $\int x \log(x)\, dx$

[ $\int x \log(x)\, dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \log_2(x) - \frac{1}{4} x^2 + c$ ]

(7) $\int x^2 \log(x)\, dx$

[ $\int x^2 \log(x)\, dx = \frac{1}{3} x^3 \log(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \log(x) - \frac{1}{9} x^3 + c$ ]

(8) $\int x^2 \log^2(x)\, dx$

[ $\int x^2 \log^2(x)\, dx = \frac{1}{3} x^3 \log^2(x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{2\log(x)}{x} dx =$
$\frac{1}{3} x^3 \log^2(x) - \frac{2}{3} \int x^2 \ \log(x) dx =$ (come nell' esercizio precedente)
$= \frac{1}{3} x^3 \log^2(x) - \frac{2}{3} (\frac{1}{3} x^3 \log(x) - \frac{1}{9} x^3) + c =$
$\frac{1}{3} x^3 \log^2(x) - \frac{2}{9} x^3 \log(x) + \frac{2}{27} x^3 + c$ ]

(9) $\int x \cos(x)\, dx$

[ $\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$ ]

(10) $\int x \sin(x)\, dx$

[ $\int x \sin(x)\, dx = x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))\, dx = -x \cos(x) + \int \cos(x)\, dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c$ ]

(11) $\int e^x \cos(x)\, dx$

[ $\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$ , quindi $\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$ .
È tornato l' integrale di partenza, ma con il segno opposto a secondo membro. Se si porta a primo membro cambiando il segno si ottiene $2 \int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$ e quindi $\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} + c$ ]

(12) $\int e^x \sin(x)\, dx$

[ $\int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) - (e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\, dx$ , quindi $2 \int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$ e allora
$\int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} + c$ ]

(13) $\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$

[ $\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x)\cos(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int (1-\cos^2(x))\,dx = \sin(x)\cos(x) + \int dx - \int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx$ e quindi $2\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cos(x) + x$ e infine
$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}$ ]

(14) $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$

[ $\int \sin^2(x)\,dx = \int \sin(x)\sin(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx = -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$ , e quindi (come nell' esempio precedente) $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$ ]

(15) $\int \arctan(x)\,dx$

[ $\int \arctan(x)\,dx = \int 1\ \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$ ( $1+x^2 = y \ldots$ ) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c = x\arctan(x) + \log(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}) + c$ ]

(16) $\int \arcsin(x)\,dx$

[ $\int \arcsin(x)\,dx = \int 1\ \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$ ( $1-x^2 = y \ldots$ ) $x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$ ]

(17) $\int e^{2x}\log(1+e^x)\,dx$

[ $\int e^{2x}\log(1+e^x)\,dx = \int e^x e^x \log(1+e^x)\,dx =$ ( sostituzione $e^x = y$ , $e^x dx = dy$ ) $= \int y\log(1+y)\,dy =$ (per parti) $\frac{1}{2}y^2\log(1+y) - \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{1+y}\,dy =$ (aggiungendo e togliendo 1 o con la divisione euclidea di $N(y) = y^2$ per $D(y) = y+1$ che dà quoziente $Q(y) = y-1$ e resto $R(y) = 1$ )
$= \frac{1}{2}y^2\log(1+y) - \frac{1}{2}\int \frac{y^2-1+1}{1+y}\,dy = \frac{1}{2}y^2\log(1+y) - \frac{1}{2}\int (y - 1 + \frac{1}{1+y})\,dy = \frac{1}{2}y^2\log(1+y) - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\log(1+y) + c = \frac{1}{2}e^{2x}\log(1+e^x) - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\log(1+e^x) + c$ ]

## Integrali di funzioni razionali

(1) $\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}$

[ In questo caso, essendo il grado del numeratore $N(x)$ maggiore o uguale a quello del denominatore $D(x)$, si effettua prima la *divisione euclidea tra polinomi.* Con l' algoritmo imparato nelle scuole superiori si determinano $Q(x)$ e $R(x)$ ( quoziente e resto nella divisione di $N(x)$ per $D(x)$ ) con grado $(R) <$ grado $(D) = 2$, tali che $N(x) = D(x)Q(x) + R(x)$, e quindi

$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$, nel nostro caso
$\frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1} = Q(x) + \frac{R(x)}{x^2-1}$.
Si trova $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, $R(x) = 2x$, e quindi
$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1} = \int (x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2-1})\, dx$
$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + \log(|x^2-1|) + c$ ]

Con la divisione euclidea ci si riconduce quindi sempre al caso di funzioni razionali in cui il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore, e in questo caso si usa la tecnica illustrata dai prossimi esempi.

(2) $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\, dx$

[ $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\, dx = \int \frac{x+7}{(x-2)(x+1)}\, dx$ (caso di denominatore di secondo grado con discriminante $\Delta > 0$ e due radici reali) .

Si cercano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{x+7}{(x-2)(x+1)}$.
Deve quindi essere $A(x+1)+B(x-2) = (A+B)x+(A-2B) = x+7$, quindi $A + B = 1$, $A - 2B = 7$, sistema che risolto dà $A = 3$, $B = -2$.
Ne segue che $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\, dx = \int (\frac{3}{x-2} + \frac{-2}{x+1})\, dx = 3\log(|x-2|) - 2\log(|x+1|) + c = \log(\frac{|x-2|^3}{|x+1|^2})$ ]

(3) $\int \frac{x}{x^2+2x+1}\, dx$

[ $\int \frac{x}{x^2+2x+1}\, dx = \int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$ (caso di denominatore di secondo grado con discriminante $\Delta = 0$ e una radice reale doppia) .

Si cercano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$.
Deve quindi essere $A(x+1) + B = Ax + (A+B) = x$, quindi $A = 1$, $A + B = 0$, sistema che risolto dà $A = 1$, $B = -1$.
Ne segue che $\int \frac{x}{x^2+2x+1}\, dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \log(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + c$ ]

(4) $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\, dx$

[ (caso di denominatore di secondo grado con discriminante $\Delta < 0$ e nessuna radice reale).

Il trinomio $x^2+2x+5$ è irriducibile, essendo il discriminante $\Delta = -16 < 0$.
Si cercano allora $A$, $B$ tali che ( $2x + 2$ è la derivata del denominatore) $\frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5} = 1 - 2x$ , cioè $A = -1$, $B = 3$.
Spezzando quindi l' integrale si ottiene quindi $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\, dx = \int \frac{3}{x^2+2x+5}\, dx - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx$.
Scrivendo $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ (si completa il quadrato sapendo che è del tipo $(x+a)^2$ e che $2x$ è il doppio prodotto ...) si ottiene $\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\, dx = \int \frac{3}{(x+1)^2+4}\, dx - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx =$ (

$x+1 = y \; dx = dy$ ) $\int \frac{1}{y^2+4}\, dy - \log(x^2+2x+5) = \frac{3}{2}\arctan(\frac{y}{2}) - \log(x^2+2x+5) + c = \frac{3}{2}\arctan(\frac{x+1}{2}) - \log(x^2+2x+5) + c$
]

(5) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}$

[ $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} = \int \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}$. Si cercano $A, B, C, D$ tali che $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C\,2x+D}{x^2+1} = \frac{x^3+x+1}{x^2(x^2+1)}$. Deve essere quindi $Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + 2Cx^3 + Dx^2 = (A+2C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = x^3 + x + 1$, cioè $A + 2C = 1$ , $B + D = 0$ , $A = 1$ , $B = 1$, e quindi $A = B = 1$, $C = 0$, $D = -1$. L' integrale si scrive allora $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1})\, dx =$
$\log(|x|) - \frac{1}{x} - \arctan(x) + c$ ]

(6) $\int \frac{3x^3+8x^2+9x-13}{x^4+4x^3+13x^2}\, dx$

[ $\int \frac{3x^3+8x^2+9x-13}{x^4+4x^3+13x^2}\, dx = \int \frac{3x^3+8x^2+9x-13}{x^2(x^2+4x+13)}$ Si cercano $A, B, C, D$ tali che $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C\,(2x+4)+D}{x^2+4x+13} = \frac{3x^3+8x^2+9x-13}{x^2(x^2+4x+13)}$.

Calcolando si trova $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = 1$, e quindi l' integrale da calcolare è
$\int [\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{(2x+4)}{x^2+4x+13} + \frac{1}{x^2+4x+13}\,]\, dx =$
$= \int [\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{(2x+4)}{x^2+4x+13} + \frac{1}{(x+2)^2+9}\,]\, dx =$
$\log(|x|) + \frac{1}{x} + \log(x^2+4x+13) + \frac{1}{3}\arctan(\frac{x+2}{3})$ ]

(7) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

[ $\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C\,2x+D}{x^2+1})\, dx$ e si trova $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$. Ne segue che
$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$
$\frac{1}{4}\log(|x-1|) - \frac{1}{4}\log(|x+1|) - \frac{1}{2}\arctan(x) + c$
$= \log(\sqrt[4]{\frac{|x-1|}{|x+1|}}) - \frac{1}{2}\arctan(x) + c$
]

## Alcune sostituzioni speciali e integrali vari

(1) $\int \frac{dx}{\sin(x)}$

[ Quando si ha a che fare con funzioni integrande del tipo $\mathcal{R}(\cos(x), \sin(x))$, dove $\mathcal{R}(y, z)$ è una funzione razionale, quoziente di polinomi in due variabili (in altre parole la funzione è un quoziente tra funzioni che sono somme di potenze di seno e coseno), la sostituzione che si utilizza di solito è la sostituzione $x = 2\arctan(t)$, con $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.
Il motivo è che in questo caso la funzione inversa è $t = \tan(\frac{x}{2})$, e

grazie alle formule razionali della trigonometria (che esprimono $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in funzione della tangente dell' arco metà) si ha che $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, e la sostituzione trasforma l' integrale in quello di una funzione razionale di $t$.
Riassumendo la sostituzione è $x = 2\arctan(t)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, e dove compare $\sin(x)$ si pone $\frac{2t}{1+t^2}$, dove compare $\cos(x)$ si pone $\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Nel nostro caso
$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\tan(\frac{x}{2})| + c$ ]

(2) $\int \frac{dx}{\cos(x)}$

[ $\int \frac{dx}{\cos(x)} =$ ( $x = 2\arctan(t)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ ) $\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt =$ $\int \frac{2}{1-t^2} =$ (con il metodo dei coefficienti indeterminati per le funzioni razionali ) $\int (\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t})\, dt = \log|1+t| - \log|1-t| + c =$ $\log|\frac{1+t}{1-t}| + c = \log|\frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}| + c$ (volendo fare un' orgia di formule goniometriche questo si può anche scrivere con le formule di addizione per la tangente come $\log|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})| + c$) ]

(3) $\int \frac{e^{3x}+e^x+1}{e^{3x}+e^x}\, dx$

[ Quando si è in presenza di una funzione del tipo $\mathcal{R}(e^{\alpha x})$ (cioè di un rapporto tra somme di potenze di $e^{\alpha x}$ , in sostanza $\alpha$ è la più piccola potenza di $e^x$ che compare) si usa spesso la sostituzione $e^{\alpha x} = t$, $x = \frac{1}{\alpha}\log(t)$, $dx = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{t}dt$, che riconduce l' integrale a quello di una funzione razionale. Nel nostro caso ($\alpha = 1$) ponendo $e^x = t$ , $x = \log(t)$, $dx = \frac{1}{t}dt$ si ottiene
$\int \frac{e^{3x}+e^x+1}{e^{3x}+e^x}\, dx = \int \frac{t^3+t+1}{t^3+t}\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t^3+t+1}{t^4+t^2}\, dt =$ (esempio calcolato prima) $\log(|t|) - \frac{1}{t} - \arctan(t) + c = x - \frac{1}{e^x} - \arctan(e^x) + c$ ]

(4) $\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$

[ Ponendo $e^x = t$ , $x = \log(t)$, $dx = \frac{1}{t}dt$ si ottiene
$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\, dt = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}-)\, dt = \log|t| - \log|1+t| + c =$ $\log(e^x) - \log(1+e^x) + c = x - \log(1+e^x) + c$
In realtà per questo semplice caso si poteva anche usare il trucco che consiste nel sommare e togliere $e^x$ al numeratore:
$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\, dx = \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x})\, dx = x - \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx =$ ( $1 + e^x = y$, $e^x\, dx = dy$ ) $= x - \log(1+e^x) + c$ ]

(5) $\int \sin^2(x)\, \cos^3(x)\, dx$

[ In integrali di questo tipo, in cui una delle potenze (di seno o coseno) è dispari, si può procedere scrivendo $\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x)$, e si ottiene
$\int \sin^2(x)\, \cos^3(x)\, dx = \int \sin^2(x)\, \cos^2(x)\, \cos(x)\, dx = \int \sin^2(x)\, (1 - \sin^2(x))\, \cos(x)\, dx =$ ( $\sin(x) = t$, $\cos(x)dx = dt$ ) $=$

$\int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c$
N.B. In presenza di potenze solo pari di seno e coseno questa tecnica non funziona, ma vedi indietro ad esempio il calcolo di $\int \cos^2(x)\,dx$ e $\int \sin^2(x)\,dx$ ]

Sono note varie altre sostituzioni speciali, che riconducono alcune classi di integrali all' integrale di funzioni note, ad esempio all' integrazione di funzioni razionali, ma non le tratteremo.

In generale a volte si tenta con una sostituzione suggerita dalle funzioni presenti, anche se la sostituzione potrebbe invece complicare l' integrale. Vediamo qualche esempio insieme ad altri in cui l' integrazione per sostituzione e quella per parti sono combinate tra loro.

(6) $\int \sqrt{e^x - 9}\,dx$

[ Si prova dando un nome alla funzione integranda presente. La sostituzione è dunque $\sqrt{e^x-9} = t$, che risolta rispetto a $x$ dà ( $e^x - 9 = t^2 \ldots$ ) $x = \log(t^2+9)$ , $dx = \frac{2t}{t^2+9}\,dt$.
Sostituendo si ottiene
$\int t\,\frac{2t}{t^2+9}\,dt = 2\int \frac{t^2+9-9}{t^2+9}\,dt = 2\int (1-9\frac{1}{t^2+9})\,dt = 2t - 18\frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3}) + c = 2\sqrt{e^x-4} - 6\arctan(\frac{\sqrt{e^x-9}}{3}) + c$ ]

(7) $\int \cos(\sqrt{x})\,dx$

[ Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha che $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ e l' integrale diventa $\int \cos(\sqrt{x})\,dx = \int \cos(t)2t\,dt = 2[\int t\cos(t)\,dt] =$ ( per parti ) $2[t\sin(t) - \int \sin(t)\,dt] = 2[t\sin(t) + \cos(t)] + c = 2[\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + c$ ]

(8) $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx$

[ Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha che $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ e l' integrale diventa $\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = \int 2t\,\arctan(t)\,dt =$ ( per parti ) $= t^2\arctan(t) - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = t^2\arctan(t) - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = t^2\arctan(t) - \int (1 - \frac{1}{1+t^2})\,dt = t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) + c = x\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + c =$ ]

(9) $\int \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

[ Con la sostituzione $\sin x = t$ si ha che $\cos(x)\,dx = dt$ e l' integrale diventa $\int \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx = \int te^t\,dt =$ ( per parti ) $te^t - e^t + c = \sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} + c$ ]

(10) $\int \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x})\,dx$

[ Provando con la sostituzione $\frac{1}{x} = t$ si ha che $-\frac{1}{x^2}dx = dt$ e l' integrale diventa $\int \int \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x})\,dx = -\int \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})\sin(\frac{1}{x})\,dx = -\int t\sin(t)dt =$ ( per parti ) $= -(-t\cos(t) + \sin(t)) + c = \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) + c =$ ]

(11) $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

[ Con la sostituzione $\sin(\sqrt{x}) = t$ si ha che $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$ e l' integrale diventa $2\int t^3\,dt = \frac{1}{2}t^4 + c = \frac{1}{2}\sin^4(\sqrt{x}) + c$

La sostituzione è motivata dal fatto che ci si accorge che è presente la derivata della funzione cui si dà il nome $t$, ma per chi non ha esperienza questo potrebbe non essere evidente.
In tal caso, con il metodo empirico di dare un nome a qualcosa (possibilmente semplice) che è presente nell' equazione, si può invece procedere in due passi: dando un nome alla funzione $\sqrt{x}$ ( di cui tra l' altro a meno di una costante è presente la derivata $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ) si ottiene $\sqrt{x} = y$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dy$, quindi l' integrale diventa $2\int \sin^3(y)\cos(y)\,dy =$ ( $\sin(y) = t$ , $\cos(y)\,dy = dt$ ) $= 2\int t^3\,dt = 2\frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{2}\sin(y)^4 + c = \frac{1}{2}\sin^4(\sqrt{x}) + c$ ]

(12) $\int 4x\,\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\log(1+e^{x^2})\,dx$

[ Procedendo per gradi, iniziamo con la sostituzione $x^2 = t$ che dà $2x\,dx = dt$ e l' integrale diventa $\int \frac{e^t}{1+e^t}\,2\log(1+e^t)\,dt =$ ( $e^t = y$ , $e^t\,dt = dy$ ) $= \int \frac{2\log(1+y)}{1+y}\,dy =$ ( $\log(1+y) = z$ , $\frac{1}{1+y}\,dy = dz$ ) $= \int 2z\,dz = z^2 + c = \log^2(1+y) + c = \log^2(1+e^t) + c = \log^2(1+e^{x^2}) + c$
]

(13) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$

[ Usando il fatto che con la sostituzione $x^2+3 = t$ , $2x\,dx = dt$ si sa calcolare $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c = \sqrt{x^2+3} + c$ , si può integrare per parti scrivendo $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,x^2\,dx = x^2\sqrt{x^2+3} - \int 2x\sqrt{x^2+3} =$ (di nuovo con la sostituzione $x^2+3 = t$ , $2x\,dx = dt$ ) $= x^2\sqrt{x^2+3} - \int t^{\frac{1}{2}}dt = x^2\sqrt{x^2+3} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = x^2\sqrt{x^2+3} - \frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} + c$
(volendo si può scrivere come $x^2\sqrt{x^2+3} - \frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3} + c = \sqrt{x^2+3}(x^2 - \frac{2}{3}x^2 - 2) + c = (\frac{1}{3}x^2 - 2)\sqrt{x^2+3} + c$ )
]

## Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

(1) Risolvere i problemi di Cauchy

a) $\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

specificando l' intervallo di esistenza della soluzione e i limiti agli estremi dell' intervallo.

[ Data l' equazione $y' = y^2$, essa ha come soluzione costante $y(x) = 0$ (perché $b(y) = y^2 = 0$ se $y = 0$).

Nel caso a) il dato iniziale (nell' istante iniziale $x = 1$, ma potrebbe essere qualunque $x_0$ ) è proprio $y = 0$, quindi la soluzione è $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Per trovare tutte le soluzioni non costanti si separano formalmente le variabili e si integra: $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$, cioè $-\frac{1}{y} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, e quindi $\frac{1}{y} = -x+c$, $c \in \mathbb{R}$, e infine $y(x) = \frac{1}{c-x}$, $c \in \mathbb{R}$. La soluzione generale è quindi $y(x) = \frac{1}{c-x}$, $c \in \mathbb{R}$, oppure $y(x) = 0$.

Nel caso b) imponendo che $y(0) = 1$ si ottiene $1 = \frac{1}{c-0} = \frac{1}{c}$, quindi $c = 1$, la soluzione del problema b) è allora $y = \frac{1}{1-x}$ e il più grande intervallo contenente 0 (punto in cui viene assegnata la condizione iniziale) è $(-\infty, 1)$.

Si noti che la funzione $y = \frac{1}{1-x}$ ha come insieme di definizione l' unione di due intervalli aperti disgiunti: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, ma per definizione una soluzione di un' equazione differenziale è una funzione continua definita in un intervallo che contiene l' istante iniziale, nel nostro caso l' intervallo $(-\infty, 1)$.

Diremo quindi che la soluzione è $y = \frac{1}{1-x}$, $-\infty < x < 1$.

I limiti agli estremi dell' intervallo di definizione sono $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0$, $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$.

*Osservazione* Abbiamo trovato la soluzione generale dell' equazione, e imponendo il dato iniziale abbiamo trovato la soluzione del problema b). Si noti tuttavia che volendo solo risolvere il problema b) si poteva usare un integrazione definita, senza passare dalla soluzione generale: essendo $x_0 = 0$, $y_o = y(x_0) = 1$, separando le variabili e integrando si ottiene (usiamo una nuova variabile $t$ di integrazione per non confondere le variabili $x$ e $y$ che compaiono come estremi di integrazione) $\int_1^y \frac{dt}{t^2}\,dt = \int_0^x dt$, cioè $-\frac{1}{y} + \frac{1}{1} = x - 0$, che dà $-\frac{1}{y} = x - 1$, $\frac{1}{y} = 1 - x$, e infine $y = \frac{1}{1-x}$. ]

(2) Trovare la soluzione generale dell' equazione
$y' = \frac{2\,x}{x^2+1}\,\frac{1+y^6}{3\,y^2}$ e risolvere il problema di Cauchy
$\begin{cases} y' &= \frac{2\,x}{x^2+1}\,\frac{1+y^6}{3\,y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ specificandone l' intervallo di esistenza.

[ L' equazione non ha soluzioni costanti. Separando le variabili e integrando si ottiene $\int \frac{3\,y^2}{1+y^6}\,dy = \int \frac{2\,x}{x^2+1}\,dx$, cioè ( sostituzioni $y^3 = t$, rispettivamente $x^2 = t \ldots$ )
$\arctan(y^3) = \log(x^2+1) + c$ .
Per ricavare la $y$ si applica prima la tangente, inversa dell' arcotangente, e si ottiene $y^3 = \tan[\,\log(x^2+1)+c\,]$, poi la radice terza, inversa della potenza terza, e si ottiene
$y = \sqrt[3]{\tan[\log(x^2+1)+c]}$.
Per ricavare la costante $c$ nel caso del problema di Cauchy richiesto si può procedere in due modi. Si può considerare la soluzione generale, inserire i valori $x = 0$, $y = 1$, e ricavare la costante $c$ applicando (al contrario di quanto fatto prima) le funzioni inverse di radice terza e tangente: si parte da
$y = \sqrt[3]{\tan[\,\log(x^2+1)+c\,]}$, si inseriscono istante e valore iniziale $x = 0$, $y = 1$, e si ottiene $1 = \sqrt[3]{\tan[\log(0+1)+c]} = \sqrt[3]{\tan[\log(1)+c]} = \sqrt[3]{\tan[c]}$, quindi $\tan[c] = 1^3 = 1$, e allora $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
In altre parole la soluzione del problema di Cauchy proposto è
$y = \sqrt[3]{\tan[\log(x^2+1)+\frac{\pi}{4}]}$
(per esercizio verificare che questa funzione soddisfa dato iniziale ed equazione).
In alternativa, dovendo risolvere il problema, si può usare un' integrazione definita dopo aver separato le variabili:
$\int_1^y \frac{3\,z^2}{1+z^6}\,dz = \int_0^x \frac{2\,z}{z^2+1}\,dz$, cioè $\arctan(y^3) - \arctan(1) = \log(x^2+1) - \log(1)$, ed essendo $\log(1) = 0$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ questo dà $\arctan(y^3) = \log(x^2+1) + \frac{\pi}{4}$, che come discusso prima conduce alla soluzione
$y = \sqrt[3]{\tan[\log(x^2+1)+\frac{\pi}{4}]}$ del problema.
Questa funzione è definita se l' argomento della tangente non è uguale a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (mentre non ci sono problemi per l' argomento del logaritmo, che è sempre positvo, anzi $\geq 1$).
Per $x = 0$ l' argomento è $\frac{\pi}{4}$, quindi l' intervallo cui deve appartenere l' argomento della tangente è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In altre parole deve essere $-\frac{\pi}{2} < \log(x^2+1) + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, che equivale a $-\frac{3}{4}\pi < \log(x^2+1) < \frac{\pi}{4}$. La prima disequazione è sempre verificata, perché $\log(x^2+1) \geq \log(1) = 0 > -\frac{3}{4}\pi$.
Per la seconda (applicando l' esponenziale) dobbiamo risolvere $x^2+1 < e^{\frac{\pi}{4}}$, equivalentemente $x^2 < e^{\frac{\pi}{4}} - 1$, che ha per

soluzioni $x \in (-\sqrt{e^{\frac{\pi}{4}}-1}, \sqrt{e^{\frac{\pi}{4}}-1})$ che è quindi l' intervallo di definizione della soluzione del problema di Cauchy proposto. ]

(3) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' &= \frac{2\ \sin(x)\ \cos(x)}{\sin^2(x)+1}\ \frac{1+y^4}{2\,y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
[ $y = \sqrt{\tan[\log(1+\sin^2(x)) + \frac{\pi}{4}]}$ ]

(4) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' &= \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ \frac{1}{2y} \\ y(0) &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$
specificando l' intervallo di esistenza della soluzione e i limiti agli estremi dell' intervallo.

[ $y = \sqrt{\arctan(e^x)}$ , $-\infty < x < +\infty$, con $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0^+$ , $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ]

(5) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' &= \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}(1+y) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$
[ $y = e^{\arctan(\sin(x))} - 1$ ]

(6) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' &= e^{-y}\ \frac{2\,x}{\sqrt{1-x^4}} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$
specificando l' intervallo di esistenza della soluzione e i limiti agli estremi dell' intervallo.

[ $y = \log[\arcsin(x^2)+1]$, $-1 < x < 1$, $\lim_{x\to-1^+} \log[\arcsin(x^2)+1] = \lim_{x\to1^-} \log[\arcsin(x^2)+1] = \log(\frac{\pi}{2}+1)$.

*Osservazione.* Per definizione l' intervallo massimale di esistenza della soluzione è il più grande intervallo contenente l' istante iniziale $x_0$ nel quale l' equazione e la soluzione sono definite. Nell' equazione compare $\sqrt{1-x^4}$ a denominatore, quindi deve essere $-1 < x < 1$, e in questo intervallo è pure definita la soluzione ( $\log[\arcsin(x^2)+1]$ è definita in $[-1,1]$ ). ]

(7) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' &= 3x^2\ \cos^2(y) \\ y(0) &= \frac{\pi}{4} \end{cases}$$
specificando l' intervallo di esistenza della soluzione e i limiti agli estremi dell' intervallo.

[ $y = \arctan(1+x^3)$ , $-\infty < x < +\infty$, con $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}^{\pm}$ ]

(8) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2ye^{y^2}} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

specificando l' intervallo di esistenza della soluzione, i limiti agli estremi dell' intervallo, ed eventuali massimi e minimi.

[ $y = \sqrt{\log(\sin^2(x) + e\,)}$ , $-\infty < x < +\infty$ ; la funzione è periodica e non ammette limiti all' infinito. Il massimo è $\sqrt{\log(1+e)}$, assunto nei punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, il minimo è $\sqrt{\log(e)} = 1$, assunto nei punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
]

(9) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= 2xe^{x^2}\, y^2 \\ y(0) &= -1 \end{cases}$$

specificando l' intervallo di esistenza della soluzione, i limiti agli estremi dell' intervallo, ed eventuali massimi e minimi.

[ $y = -e^{-x^2}$ , $-\infty < x < +\infty$ , $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0^-$ , il minimo è $-1$, assunto nel punto $x = 0$, l' estremo superiore ‘e 0 e non è mai assunto. ]

(10) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= -x\, y^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

specificando l' intervallo di esistenza della soluzione, i limiti agli estremi dell' intervallo, ed eventuali massimi e minimi.

[ $y = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ , $-\infty < x < +\infty$ , $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0^+$, il massimo è 1, assunto nel punto 0, l' estremo inferiore è 0 e non è mai assunto. ]

(11) Risolvere i problemi di Cauchy

a) $$\begin{cases} y' &= \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} y' &= \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} y' &= \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \\ y(\frac{1}{2}) &= 0 \end{cases}$$

specificando l' intervallo di esistenza della soluzione e i limiti agli estremi dell' intervallo.

[ L' equazione ha soluzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$ (che non verificano alcuna delle condizioni iniziali proposte). Per tutte le altre soluzioni nell' intervallo massimale di esistenza deve essere $-1 < y(x) < 1$.

Separando le variabili e integrando nel caso a) si ha $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, quindi, essendo $\arcsin(0) = 0$, si ottiene $\arcsin(y) = \arcsin(x)$, e infine $y = x$.
Il dominio di definizione di quest' ultima funzione è tutta la retta reale, ma l' equazione ha senso solo se $x \neq \pm 1$, $\frac{1-y^2}{1-x^2} \geq 0$, e quindi l' intervallo di definizione della soluzione dell' equazione differenziale è $(-1, 1)$. È chiaro però che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$, si ha che se $y = x$ allora $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 1$, e $y(x) = x$ verifica l' equazione, e si può estendere con continuità anche nei punti $x = \pm 1$: $\lim_{x \to \pm 1} y(x) = \pm 1$.

Analogamente nel caso b) separando le variabili e integrando si ottiene $\int_{\frac{1}{2}}^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, quindi, essendo $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, si ottiene $\arcsin(y) - \frac{\pi}{6} = \arcsin(x)$, e infine $y = \sin\left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{6}\right)$; tale funzione è definita e derivabile per $-1 < x < 1$, ma la condizione $-1 < y < 1$, necessaria per l' esistenza della soluzione è verificata se $-\frac{\pi}{2} < \arcsin(x) + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, quindi $-1 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
Infine nel caso c) separando le variabili e integrando si ottiene $\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, quindi, ottiene $\arcsin(y) = \arcsin(x) - \frac{\pi}{6}$, e infine $y = \sin\left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{6}\right)$. Procedendo come nel caso precedente si ottiene $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$.
]

(12) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' &= \frac{1}{3} x y^2 \\ y(0) &= 3 \end{cases}$$

[ $y = \frac{6}{2-x^2}$, $D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $I = [3, +\infty)$ ]

**Equazioni differenziali lineari del primo ordine**

Data l' equazione

$$y' + a(x)\, y = b(x)$$

con $a$, $b : I \to \mathbb{R}$ (con $I$ intervallo in $\mathbb{R}$) sappiamo dalla teoria che esiste ed è unica la soluzione di qualsiasi problema di Cauchy associato, e la soluzione generale dell' equazione è data dalla seguente formula, dove $A(x)$ è una primitiva della funzione $a(x)$:

$$y(x) = e^{-A(x)}\, [\, c + \int e^{A(x)} b(x)\, dx\, ]$$

In particolare se si deve risolvere un problema di Cauchy con dato iniziale $y(x_0) = y_0$, si può trovare la costante $c$ dalla relazione precedente (sostituendo $x_0$ a $x$ e $y_0$ a $y$), oppure si ha la formula precisa per la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)\, y & = b(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$ data dalla formula

$$y(x) = e^{-A(x)}\, [\, c + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}\, b(t)\, dt\ ] \quad \text{con } A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

( $A(x)$ è la primitiva di $a(x)$ che si annulla in $x_0$ e l' integrale nella formula è un integrale definito con estremo inferiore $x_0$ ).

(1) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + 2x\, y & = \cos(x) e^{-x^2} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$

[ $y(x) = e^{-x^2}(1 + \sin(x))$ ]

(2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{2x}{1+x^2}\, y & = \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) & = 1 \end{cases}$

[ $y(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ ]

(3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + \frac{2\sin(x) cos(x)}{1+\sin^2(x)}\, y & = \cos(x) \\ y(0) & = 1 \end{cases}$

[ $y(x) = \frac{3+3\sin(x)+\sin^3(x)}{3(1+\sin^2(x))}$ ]

## Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine

(1) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$5y' - 6y = (4x-3)e^{2x}$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = 5t - 6$, e la sua radice, cioè la soluzione dell' equazione $5t - 6 = 0$, è $t = \frac{6}{5}$.
Ne segue che l' equazione omogenea associata, $5y' - 6y = 0$ , ha per soluzione generale $y = c\, e^{\frac{6}{5}x}$, con $c$ costante reale (cioè tutte le soluzioni dell' equazione omogenea associata , $5y' - 6y = 0$ , sono di questo tipo per qualche scelta della costante $c$ ).
Sappiamo allora che la soluzione generale dell' equazione completa avrà la forma
$y = c\, e^{\frac{6}{5}x} + y_p(x)$
con $c$ costante reale, dove $y_p(x)$ è una soluzione particolare dell' equazione completa $5y' - 6y = (4x - 3)e^{2x}$.
Nel caso in cui il termine noto è un prodotto di un polinomio di grado $m$ per un esponenziale si cerca una soluzione dello stesso tipo.
Nel nostro caso il termine noto a secondo membro è $(4x-3)e^{2x}$, un polinomio di primo grado per un esponenziale, e questo esponenziale, $e^{2x}$ non è soluzione dell' equazione omogenea; cercheremo quindi una soluzione avente la forma $y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$.
Calcolando la derivata si ha che
$y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$,
$y_p'(x) = (a + 2ax + 2b)e^{2x}$
e imponendo che $5y' - 6y = (4x - 3)e^{2x}$ si vede che deve essere $(10ax + 5a + 10b - 6ax - 6b)e^{2x} = [\,4ax + (5a + 4b)\,]e^{2x} = (4x - 3)e^{2x}$, quindi $4a = 4$, $5a + 4b = -3$, cioè $a = 1$, $b = -2$: la soluzione particolare ottenuta dell' equazione completa è allora $y_p(x) = (x - 2)e^{2x}$, e la soluzione generale dell' equazione completa è $y = c\, e^{\frac{6}{5}x} + (x - 2)e^{2x}$, con $c$ costante reale. ]

(2) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y' - y = 2e^x$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t - 1$, con radice $t = 1$.
Ne segue che l' equazione omogenea associata, $y' - y = 0$ , ha per soluzione generale $y = c\, e^x$, con $c$ costante reale.
Sappiamo allora che la soluzione generale dell' equazione completa avrà la forma
$y = c\, e^x + y_p(x)$
con $c$ costante reale, dove $y_p(x)$ è una soluzione particolare dell' equazione completa $y' - y = e^x$.
Nel nostro caso il termine noto a secondo membro è $e^x = 1e^x$,

un polinomio di grado zero per un esponenziale, ma l' esponenziale è soluzione dell' equazione omogenea associata. Non cercheremo quindi la soluzione con la forma $Ae^x$, polinomio di grado zero per $e^x$, ma avente la forma $y_p = x\,Ae^x$. Si ha che $y_p = A\,x\,e^x$, $y_p' = (A + Ax)e^x$, e deve essere $y' - y = e^x$, cioè $(A + Ax)e^x - Axe^x = Ae^x = 2e^x$. Ne segue che $A = 2$, la soluzione particolare è $y_p = 2x\,e^x$, e la soluzione generale è $y = c\,e^x + 2x\,e^x$. ]

(3) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y' - y = 2\cos(x)$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t - 1$, con radice $t = 1$. Ne segue che l' equazione omogenea associata, $y' - y = 0$ , ha per soluzione generale $y = c\,e^x$, con $c$ costante reale.
Sappiamo allora che la soluzione generale dell' equazione completa avrà la forma
$y = c\,e^x + y_p(x)$
con $c$ costante reale, dove $y_p(x)$ è una soluzione particolare dell' equazione completa $y' - y = 2\cos(x)$.
Se il secondo membro ha la forma di un polinomio di grado $m$ per coseno, o di polinomio per seno, o di polinomio per seno + coseno, in ogni caso si cerca una soluzione che ha la forma di polinomio di grado $m$ per (seno + coseno), cioè anche se è presente solo una delle due funzioni si inseriscono entrambe nella ricerca. Nel nostro caso abbiamo $2\cos(x)$ un polinomio di grado zero per un coseno, e si cerca una soluzione che ha la forma $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$. Derivando si ha che $y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$, e deve allora essere $y' - y = (A - B)\cos(x) + (-B - A)\sin(x) = 2\cos(x)$, quindi $A - B = 2$, $-A - B = 0$, che dà $A = 1$, $B = -1$.
La soluzione particolare è allora $y_p(x) = \sin(x) - \cos(x)$ e la soluzione generale dell' equazione è
$y = c\,e^x + \sin(x) - \cos(x)$, $c \in \mathbb{R}$. ]

(4) Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.
Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y' = ay + b$ e la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' & = ay + b \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t - a$, con radice $t = a$. La soluzione generale dell' equazione omogeneea associata ( $y' - ay = 0$ ) ha la forma $y(x) = de^{ax}$, $d \in \mathbb{R}$, che possiamo anche scrivere come $y(x) = de^{ax}e^{-ax_0}e^{ax_0} = (de^{ax_0})e^{a(x-x_0)}$, cioè come $y(x) = ce^{a(x-x_0)}$, $c \in \mathbb{R}$, in modo da mettere in evidenza l' istante iniziale $x_0$, che può essere scelto arbitrariamente.

Il termine noto è costante, ha la forma di un polinomio (per un esponenziale $e^{0x}$), e anche in questo caso si cerca una soluzione di questo tipo: $y_p(x) = k$, $k$ costante. Inserendo nell' equazione si vede che deve essere $k = -\frac{b}{a}$, e quindi la soluzione generale dell' equazione completa è $y = ce^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.
Imponendo il dato iniziale $y(x_0) = y_0$ si ha $y_0 = c - \frac{b}{a}$, e quindi $c = y_0 + \frac{b}{a}$.
In conclusione la soluzione del problema $\begin{cases} y' & = ay + b \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$ è $y = y_0 e^{a(x-x_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(x-x_0)} - 1)$.

Si noti che cercare la soluzione del problema di Cauchy generico, cioè con dato iniziale $y_0$ qualsiasi, fornisce al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ un' altra espressione della soluzione generale, che esplicita la dipendenza dal valore iniziale $y_0 = y(x_0)$.

(5) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' - 5y' + 6y = (2x - 1)e^x$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 - 5t + 6$, con radici $t = 2$, $t = 3$, e il termine noto ha la forma $q_1(x)e^x$, dove $q_1$ è un polinomio di primo grado, e l' esponenziale $e^x$ non è soluzione dell' equazione omogenea associata.

La soluzione generale avrà dunque la forma $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + y_p(x)$, con $c_1$, $c_2$ costanti reali.

La soluzione particolare si cerca nella forma
$y_p(x) = (Ax+B)e^x$. Derivando si trova $y_p'(x) = (A+Ax+B)e^x$ e derivando ancora $y_p''(x) = (2A + Ax + B)e^x$. Inserendo nell' equazione si ottiene $A = 1$, $B = 1$, e quindi la soluzione generale sarà $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + (x + 1)e^x$ ]

(6) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 - 5t + 6$, con radici $t = 2$, $t = 3$, e il termine noto ha la forma $q_0(x)e^{3x}$, dove $q_0$ è un polinomio di grado zero, ma ora l' esponenziale $e^{3x}$ è soluzione dell' equazione omogenea associata, quindi la soluzione particolare non si cerca nella forma $q_0(x)e^{3x}$ ma nella forma (si moltiplica per $x$) $x\, q_0(x)e^{3x} = x\, A\, e^{3x}$ .

La soluzione generale avrà dunque la forma $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + y_p(x)$, con $c_1$, $c_2$ costanti reali.

La soluzione particolare si cerca nella forma $y_p(x) = A\, x\, e^{3x}$ e si trova $A = 1$ : $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + xe^{3x}$ ]

(7) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' + y' = e^{-x}$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 + t$, con radici $t = 0$, $t = -1$, la soluzione generale dell' omogenea è $y_o(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} = c_1 + c_2e^{-x}$ e quella dell' equazione completa (si cerca una soluzione particolare della forma $y_p(x) = Ax\,e^{-x}$ ) è $y = c_1 + c_2e^{-x} - xe^{-x}$ ]

(8) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' + 2\,y' + y = 2e^{-x}$

[ Ora $t = -1$ è radice doppia del polinomio caratteristico $p(t) = t^2 + 2t + 1$, e il termine noto ha la forma $q_0(x)e^{-x}$, dove $q_0$ è un polinomio di grado zero, ma ora l' esponenziale $e^{-x}$ è soluzione dell' equazione omogenea associata, con $-1$ come radice doppia; quindi la soluzione particolare non si cerca nella forma $q_0(x)e^{-x}$ ma nella forma (si moltiplica per $x^2$) $x^2\,q_0(x)e^{-x} = Ax^2e^{-x}$. Si trova $A = 1$ e quindi la soluzione generale è $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2e^{-x}$ ]

(9) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' + 4\,y' + 8\,y = e^{-2x}$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 + 4t + 8$, con radici complesse $t = -2 + 2i$, $t = -2 - 2i$.
La soluzione generale dell' omogenea è $y = c_1e^{-2x}\cos(2x) + c_2e^{-2x}\sin(2x)$ (si noti che il segno dell' esponenziale è negativo, è quello della parte reale $-2$, mentre non ha importanza il segno diverso delle due soluzioni nella parte immaginaria, se le soluzioni sono non reali ciò comporta la presenza di seno e coseno di $2x$ nella soluzione generale). La soluzione dell' equazione completa (si cerca soluzione particolare della forma $y_p(x) = Ae^{-2x}$ ) è $y = c_1e^{-2x}\cos(2x) + c_2e^{-2x}\sin(2x) + \frac{1}{4}e^{-2x}$ ]

(10) Trovare la soluzione generale dell' equazione differenziale
$y'' + 2\,y' + 2\,y = 10\cos(x)$

[ Il polinomio caratteristico è $p(t) = t^2 + 2t + 2$, con radici complesse $t = -1+i = -1+1i$, $t = -1-i = -1-1i$, la soluzione generale dell' omogenea è $y = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\sin(x)$ e quella dell' equazione completa (si cerca una soluzione particolare della forma $y_p(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ ) è $y = c_1e^{-x}\cos(x) + c_2e^{-x}\sin(x) + 2\cos(x) + 4\sin(x)$ ]

## Vettori, matrici, sistemi lineari

(1) Date le matrici $A$, $B$ dire quale dei due prodotti, $A\,B$ , $B\,A$ è definito e calcolarlo ove definito.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

[

a) $A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ , diverso da $B\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A\,B = B\,A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

*Osservazione* In generale il prodotto di due matrici quadrate $m \times m$ $A$ e $B$ *diagonali*, cioè tali che sono non nulli solo gli elementi della diagonale principale, verifica $A\,B = B\,A = D$, dove $D$ è la matrice diagonale $m \times m$ che ha sulla diagonale i prodotti degli elementi delle diagonali di $A$ e $B$.

c) $A\,B = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \end{pmatrix}$

d) $A$ è una matrice $3 \times 2$, $B$ è una matrice $2 \times 3$, quindi sono definiti entrambi i prodotti, ma

$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 14 & -10 \end{pmatrix}$ è una matrice $3 \times 3$ , mentre

$B\,A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice $2 \times 2$

]

(2) Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

[ Conviene sviluppare il determinante secondo la seconda riga, perché contiene molti zeri. I segni vanno alternati a partire dal segno $-$, perché il primo elemento è $a_{21}$, e $(-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$. Si ottiene quindi, indicando con le barre verticali i determinanti di ordine due,

$$\det(A) = -(-2)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$
$$= 2(2\cdot 1 - 3\cdot 3) = 2(2-9) = 2(-7) = -14 \qquad ]$$

(3) *Proprietà dei determinanti*

Verificare su una matrice $2\times 2$ $\quad A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, dove il determinante è definito da $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$, le seguenti **proprietà dei determinanti**, che si dimostrano essere valide per determinanti di ogni ordine

a) Scambiando due righe (o due colonne) il determinante cambia segno.

b) Moltiplicando una riga (o colonna) per un numero reale $k$ il determinante risulta moltiplicato per $k$.

c) Se due righe (colonne) sono uguali allora il determinante è zero.

d) Aggiungendo a una riga (colonna) una combinazione lineare di altre righe (colonne) il determinante non cambia
(per matrici $2\times 2$ verificare che il determinante non cambia aggiungendo a una riga un multiplo dell' altra).

e) Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne) il determinante è zero
(per matrici $2\times 2$ verificare che il determinante è zero se una riga è multipla dell' altra).

f) Il determinante di una matrice triangolare superiore (inferiore), cioè tale che sono nulli gli elementi sotto la diagonale principale (sopra la diagonale principale) è uguale al prodotto degli elementi diagonali :

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & \dots & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{31} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, \dots a_{nn}$$

Per una matrice $2\times 2$ verificare che se $A = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$ oppure $A = \begin{pmatrix}a & 0\\ c & d\end{pmatrix}$ il determinante è $a\,d$.

g) Il determinante della matrice trasposta di $A$ è uguale al determinante di $A$; la matrice trasposta ${}^tA$ della matrice $A$ è la matrice che ha come righe le colonne di $A$ e viceversa.

Nel caso di $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ la matrice trasposta è ${}^tA = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

(4) Calcolare il determinante della matrice $\begin{vmatrix} 0 & 63 & 27 & 72 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{vmatrix} =$

[ Usando le proprietà viste nell' esempio precedente si può semplificare il calcolo, cercando di arrivare a una matrice triangolare in cui il calcolo è immediato (il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale). Indicando con $|B|$ il determinante di una matrice $B$ si ha che

$\begin{vmatrix} 0 & 63 & 27 & 72 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{vmatrix} =$ ( dividendo la prima riga per 9 )

$= 9 \begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{vmatrix} =$ ( scambiando la prima e la seconda riga )

$= -9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{vmatrix} =$ ( sottraendo dalla terza riga la prima riga moltiplicata per 4 e sommando alla quarta riga la prima riga moltiplicata per 3 )

$= -9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 14 & 12 & 29 \end{vmatrix} =$ ( sommando alla terza riga la seconda e sottraendo alla quarta riga 2 volte la seconda )

$= -9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{vmatrix} =$ ( sottraendo alla quarta riga il doppio della terza )

$= -9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ (essendo la matrice triangolare il determinante è il prodotto degli elementi diagonali )

$= (-9)(1)(7)(3)(3) = -567$ ]

(5) Determinare se i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti, e in caso affermativo trovare il massimo numero di vettori

linearmente indipendenti tra di essi :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

[ Consideriamo la matrice $4 \times 4$ avente per colonne i vettori assegnati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Essa ha determinante zero, perché la terza riga è combinazione lineare delle prime due, è la loro somma.
Ne segue che i vettori sono linearmente dipendenti.

Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è pari al rango della matrice, cioè al massimo ordine dei minori aventi determinante non nullo. Eliminiamo la terza riga, che è combinazione lineare delle prime due, e l' ultima colonna. Si ottiene la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ che ha determinante $1(12-8) - 2(8+4) + 3(4+3) = 4 - 24 + 21 = 1 \neq 0$.
Ne segue che il rango è 3, e i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, sono linearmente indipendenti, perché le colonne del minore non nullo sono le prime tre. In realtà anche le altre possibili scelte di tre vettori tra i quattro assegnati dà luogo a una famiglia linearmente indipendente, come si può verificare calcolando gli altri minori che si ottengono cancellando la terza riga e una colonna qualsiasi.
]

(6) *Proprietà degli "orlati" per il calcolo del rango di una matrice*

Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

[ La matrice ha quattro minori di ordine 3 (massimo rango possibile per una matrice $3 \times 4$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolando i quattro determinanti di queste sottomatrici di ordine tre si vede che sono tutti nulli.

D' altra parte esistono minori di ordine due con determinante non nullo, ad esempio il minore formato dalle prime due righe e colonne: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ che ha determinante 2.

Ne segue che il rango è 2.

In realtà c' è una proprietà che permette di evitare alcuni calcoli, la cosiddetta **proprietà degli orlati**:
Se una matrice $A$ ha un minore $B$ di ordine $k$ con determinante diverso da 0 (e quindi il rango è almeno $k$), per vedere se il rango è maggiore di $k$ è sufficiente vedere se c' è un determinante non nullo tra quelli che si ottengono aggiungendo una riga e una colonna a $B$ (senza considerare tutti i minori di ordine $k+1$).

Nell' esempio precedente, osservato che il minore di ordine due $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, per vedere se il rango è due o tre basta considerare i minori che si ottengono "orlando" il minore con un' altra riga e un' altra colonna, cioè $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, che ha determinante nullo, e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, che ha anche determinante nullo.
Ciò basta a dire che tutti i minori di ordine tre hanno determinante nullo, senza analizzare gli altri due.

Questa proprietà mostra quindi come calcolare il rango di una matrice: se tutti gli elementi sono nulli (matrice nulla), il rango è zero; altrimenti il rango è almeno 1, si prende un elemento non nullo e lo si "orla" in tutti i modi possibili, ottenendo tutte le sottomatrici di ordine due che contengono quell' elemento (senza considerare i minori di ordine 2 che non contengono quell' elemento).
Se i minori ottenuti in questo modo hanno tutti determinante zero, allora il rango è 1; altrimenti il rango è almeno 2, si prende un minore di ordine 2 con determinante non nullo e lo si orla in tutti i modi possibili, ottenendo tutte le sottomatrici di ordine tre che contengono quel minore di ordine due scelto (senza considerare i minori di ordine 3 che non contengono quell' elemento) ... ]

(7) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x & + & & & z & = 4 \\ 2x & + & y & - & z & = 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = 13 \end{cases}$$

[ Il sistema si scrive in forma compatta $A\,X = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti, e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.

Verifichiamo se la matrice $A$ dei coefficienti è non singolare, cioè ha determinante non nullo, in questo caso potremo usare la formula di Cramer.

$\det(A) = 1(2+3) + 1(6-1) = 10 \neq 0$.

Per il teorema di Cramer il sistema ha un' unica soluzione:
$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$ , $y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$ , $z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$ , dove

$$A_x = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è la matrice che si ottiene da $A$ sostituendo la prima colonna (dove compare $x$) con la colonna dei termini noti,

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{pmatrix}$$

è la matrice che si ottiene da $A$ sostituendo la seconda colonna (dove compare $y$) con la colonna dei termini noti,

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

è la matrice che si ottiene da $A$ sostituendo la terza colonna (dove compare $z$) con la colonna dei termini noti.

Calcolando i tre determinanti si ottiene
$\det A_x = 4(2+3) + 1(3-13) = 10$,
$\det A_y = 1(2+13) - 4(4+1) + 1(26-1) = 20$,
$\det A_z = 1(13-3) + 4(6-1) = 30$.

Si ottiene quindi che l' unica soluzione del sistema è
$x = \frac{10}{10} = 1$ , $y = \frac{20}{10} = 2$ , $z = \frac{30}{10} = 3$ . ]

(8) Trovare in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} & & k\,y & + & 3\,z & = 1 \\ k\,x & + & k\,y & & & = k \\ & & y & + & k\,z & = k \end{cases}$$

[ Il sistema si scrive in forma compatta $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti, e $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.

Il determinante di $A$ vale $\det(A) = -k(k^2 - 3)$ e si annulla per $k = 0$ e per $k = \pm\sqrt{3}$.
Se $k \neq 0$, $k \neq \pm\sqrt{3}$ il sistema ha un' unica soluzione che si trova con la regola di Cramer:
$A_x = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ k & k & 0 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$ , $\det(A_x) = -k(k^2-3)+k(-2k) = -k(k^2+2k-3)$ ,
$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ k & k & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$ , $\det(A_y) = 2k^2$ ,
$A_z = \begin{pmatrix} 0 & k & 1 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ , $\det(A_z) = -k(k^2 - 1)$, e quindi se $k \neq 0$, $k \neq \pm\sqrt{3}$ : $x = \frac{k^2+2k-3}{k^2-3}$ , $y = \frac{-2k}{k^2-3}$ , $z = \frac{k^2-1}{k^2-3}$.

Se $k = \pm\sqrt{3}$ la matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & 3 \\ \pm\sqrt{3} & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e per quanto visto ha determinante 0 e rango 2: ad esempio il minore $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ha determinante $3 \neq 0$.

La matrice completa del sistema, cioè la matrice $3 \times 4$ che si ottiene aggiungendo la colonna dei termini noti è la matrice $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & 3 & 1 \\ \pm\sqrt{3} & \pm\sqrt{3} & 0 & \pm\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e ha rango 3 come si vede considerando ad esempio il minore ottenuto cancellando la seconda colonna che ha determinante $\mp 6$.

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione se $k = \pm\sqrt{3}$.

Infine se $k = 0$ la matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , la matrice completa è $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il rango di $A$ è 2, e un minore non nullo è ad esempio il minore $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Orlando questo minore con un' altra riga o colonna di $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ottengono sempre minori con determinante nullo. Quindi anche il rango di $(A\,|B)$ è 2 e il sistema ha soluzioni. Queste sono infinite e si ottengono cancellando la seconda equazione (che non compare nel minore di ordine 2 considerato), dando un valore arbitrario $t$ alla variabile $x$ (che non compare nel minore considerato), e risolvendo il sistema nelle incognite $y$, $z$ così ottenuto: $\begin{cases} \quad\quad 3\,z & = 1 \\ y & = 0 \end{cases}$.

In altre parole se $k = 0$ le soluzioni sono della forma

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Osservazione generale* In casi come quest' ultimo si dice anche che il sistema ha $\infty^1$ soluzioni, intendendo che a 1 variabile si può dare un valore arbitrario. Più in generale si dice che il sistema ha $\infty^l$ soluzioni, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, se a $l$ variabili si può dare un valore arbitrario, e le altre sono determinate in funzione dei valori dati alle variabili "libere".

In generale, come vedremo da altri esempi, nell' applicazione del teorema di Rouché- Capelli si ha la seguente situazione nel caso in cui il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa e il sistema ha quindi soluzione (se invece il rango della matrice completa è maggiore del rango della matrice dei coefficienti il sistema non ha soluzioni).
Sono possibili due casi, detto $r \in \mathbb{N}$ il rango della matrice dei coefficienti (e della matrice completa):

Se $r = n$ (e questo è possibile solo se $m \geq n$, se cioè il sistema ha un numero di equazioni maggiore o uguale a quello delle incognite) la soluzione è unica, e si ottiene risolvendo (con il metodo di Cramer o altri che vedremo) ignorando le eventuali $m - n$ equazioni corrispondenti alle righe che non compaiono nel minore di ordine $r = n$ con determinante non nullo trovato.

Se invece $r < n$ il sistema ha $\infty^{n-r}$ soluzioni, ottenute dando un valore arbitrario alle $n - r$ incognite che non compaiono nel minore con determinante non nullo trovato nella matrice $A$ (e anche $(A\,|B)$ avendo quest' ultima lo stesso rango $r$), e risolvendo rispetto alle altre variabili il sistema che si ottiene cancellando le equazioni corrispondenti alle righe che non compaiono nel minore considerato. ]

(9) Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare $A\,X = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti, e $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2k \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.

[ Il determinante di $A$ vale $\det(A) = k(2k-1) + k(-k) = k(k-1)$ e si annulla per $k = 0$ e per $k = 1$.
Se $k \neq 0$, $k \neq 1$ il sistema ha un' unica soluzione che si può trovare con la regola di Cramer.
$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2k \end{pmatrix}$ ha determinante $-4k$ ,
$A_y = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & -2 & 1 \\ k & 2 & 2k \end{pmatrix}$ ha determinante $-2k(k+1)$ ,
$A_z = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante $4k$ e quindi
$x = \frac{-4k}{k(k-1)} = -\frac{-4}{k-1}$, $y = \frac{-2k(k+1)}{k(k-1)} = -\frac{-2(k+1)}{k-1}$, $z = \frac{-4k}{k(k-1)} = \frac{-4}{k-1}$.

Se $k = 1$ il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è 2, mentre il rango della matrice completa $(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ è 3, ad esempio è non nullo il determinante del minore ottenuto cancellando la prima colonna. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione.

Per $k = 0$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2, come si vede considerando il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna. Anche il rango della matrice completa $(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è 2, perché ogni minore di ordine 3 ha una riga nulla.

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzioni, e queste si ottengono cancellando la prima equazione e dando valori arbitrari alla prima variabile $x$, perché prima riga e colonna non compaiono nel minore considerato.

Le soluzioni si ottengono quindi ponendo $x = t \in \mathbb{R}$, $y, z$ soluzioni del sistema di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e termine noto $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè $x = t\ ,\ \ y = 2\ ,\ \ z = -4$. Le $\infty^1$ soluzioni si possono anche scrivere nella forma $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ t \in \mathbb{R}$ ]

(10) Dire se il sistema $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$ ha soluzioni, e in caso affermativo calcolarle.

[ Il rango della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ è 1, come si vede facilmente essendo le righe proporzionali (o calcolando i determinanti dei 3 minori di ordine 2, tutti nulli), mentre la matrice completa $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2, essendo ad esempio non nullo il determinante del minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ formato dalle ultime due colonne.

Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione. ]

(11) Discutere in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema di 3 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + ky = 3 \\ 3x - 2y = k \end{cases}$$

[ Il sistema si scrive in forma compatta $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti, e $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & k \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.

La matrice $A$ ha rango 2 (massimo rango per una matrice $3 \times 2$) perché il determinante del minore $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ è $7 \neq 0$. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione se e solo se

anche la matrice completa $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & k & 3 \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix}$ ha rango due, cioè se essa ha determinante nullo.
Il determinante della matrice completa è
$\det(A\,|B) = k^2 + 6 + 3(2k-9) - 2(-4-3k) = k^2 + 12k - 13$, ed è nullo se $k = 1$ oppure $k = -13$.
Quindi se $k \neq 1$, $k \neq -13$, il sistema non ha soluzioni, mentre se $k = 1$ oppure $k = -13$ esso ha soluzione unica (perché il rango è 2 e coincide con il numero delle incognite), La soluzione si trova risolvendo il sistema che si ottiene cancellando la seconda equazione (e risolvendo ad esempio con il metodo di Cramer o altro metodo per sistemi $2 \times 2$).
Se $k = 1$ il sistema ottenuto cancellando la seconda equazione è $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ e ha soluzione $x = 1$, $y = 1$.
Se $k = -13$ il sistema è $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 3x - 2y = -13 \end{cases}$ e ha soluzione $x = -5$, $y = -1$ . ]

(12) Discutere in funzione dei parametri $k\,,\, l \in \mathbb{R}$ il sistema di 2 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + k\,z = l \end{cases}$$

[ Il sistema si scrive in forma compatta $A\,X = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ l \end{pmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti, e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema.

Il determinante della matrice che si ottiene cancellando la terza colonna è 0, mentre i determinanti dei minori che si ottengono cancellando prima o seconda colonna sono entrambi pari a $k - 2$.
Ne segue che il rango della matrice $A$ è 2 se $k \neq 2$, mentre se $k = 2$ il rango è 1 (le due righe sono proporzionali e quindi ce ne è solo una linearmente indipendente, equivalentemente tutti i minori di ordine 2 hanno determinante nullo).

Se $k \neq 2$ per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema ha sempre soluzione, qualunque sia il valore di $k$, perché la matrice

completa $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & l \end{pmatrix}$ è una matrice $2 \times 4$ e il massimo rango che può avere è 2, che è il rango che ha effettivamente: il minore scelto per la matrice $A$, ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ ottenuto cancellando la prima colonna è anche minore con determinante $k - 2 \neq 0$ per la matrice completa.
Il sistema ha quindi $\infty^1$ soluzioni, ed esse si ottengono dando un valore arbitrario $x = t$ alla variabile $x$ (che non compare nel minore considerato), e risolvendo il sistema nelle incognite $y, z$ che si ottiene:
$\begin{cases} y & + & z & = & 1 - t \\ 2y & + & k\,z & = & l - 2t \end{cases}$

Questo sistema ha per ogni $t$ fissato la soluzione unica (in funzione di $t$) $\quad y = \frac{k-kt+2t-l}{k-2}$ , $z = \frac{l-2}{k-2}$ ,.

Quindi se $k \neq 2$, $l \in \mathbb{R}$ il sistema ha le soluzioni
$x = t$, $y = \frac{k-kt+2t-l}{k-2} = -t + \frac{k-l}{k-2}$ , $z = \frac{l-2}{k-2}$ , $t \in \mathbb{R}$.

Rimane da discutere cosa accade quando $k = 2$.
In questo caso il sistema è
$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2\,z & = & l \end{cases}$ , la matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e ha rango 1.

La matrice completa è $(A\,|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & l \end{pmatrix}$ e si vede subito che se $l \neq 2$ essa ha rango 2, ad esempio considerando il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & l \end{pmatrix}$ che ha determinante $l - 2 \neq 0$, mentre se $l = 2$ anche la matrice completa ha rango 1.

Per il Teorema di Rouché-Capelli se $k = 2$, $l \neq 2$ il sistema non ha soluzione.

Infine se $k = 2$, $l = 2$ essendo $n = 3$ il numero delle incognite e $r = 1$ il rango (della matrice dei coefficienti e della matrice completa), il sistema ha $\infty^{n-r} = \infty^2$ soluzioni che si ottengono scegliendo un minore di ordine 1, ad esempio l' elemento $a_{13} = 1$, cancellando la seconda equazione, e dando valori arbitrari alle variabili $x, y$ che non compaiono nel minore. L' equazione diventa $z = 1 - x - y$ e le soluzioni sono quindi
$x = t$ , $y = s$ , $z = 1 - t - s$ , $s, t \in \mathbb{R}$.

Le $\infty^2$ soluzioni si possono anche scrivere nella forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(13) Determinare in funzione del parametro $t$ il numero di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nel caso in cui siano infinite.
$A\,X = B$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -2 & t & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$

[ 1 soluzione per $t \neq 0\,,3$, nessuna soluzione per $t = 0$, infinite soluzioni per $t = 3$: $x + 3z = 1$ , $y + 2z = 0$ (ad esempio $z = a$, $x = 1 - 3a$, $y = -2a$ con $a \in \mathbb{R}$ ) ]

(14) Studiare in funzione del parametro $t$ l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono
$$\begin{cases} x & + & ty & = & 2 \\ & & 2y & = & 2t \\ -x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

[ $x = -2$ , $y = -2$ , per $t = -2$ ; $x = 1$ , $y = 1$ , per $t = 1$ ]

(15) Studiare in funzione del parametro $t$ l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite
$$\begin{cases} x & + & ty & & & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & t \end{cases}$$

[ 1 soluzione $\forall\ t \neq 0$ ; $\infty$ soluzioni se $t = 0$: $(1, a, 1 - a)$, $a \in \mathbb{R}$ ]

(16) Studiare in funzione del parametro $t$ l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono
$$\begin{cases} 4x & + & ty & = & 6 \\ & & 10y & = & t \\ -x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

[ Non esistono soluzioni se $t \neq -10$ e $t \neq 6$.
$x = -1$ , $y = -1$ , per $t = -10$ ; $x = \frac{3}{5}$ , $y = \frac{3}{5}$ , per $t = 6$ ]

(17) Discutere in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema di 2 equazioni in 3 incognite
$$\begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & (k-2)y & + & k\,z & = & 2 \end{cases}$$

[ Se $k = 6$ ci sono $\infty^2$ soluzioni, $y = t$, $z = s$, $x = 1 - 2t - 3s$, con $t, s \in \mathbb{R}$ equivalentemente $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se $k \neq 6$ ci sono $\infty^1$ soluzioni, $x = t$, $y = t - 1$, $z = 1 - t$ con $t \in \mathbb{R}$, equivalentemente $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

]

(18) Discutere in funzione di $t$ il numero di soluzioni del sistema $\begin{cases} -2x - y - 3t^2 z = 1 \\ x + y + (t^2+1)z = t \\ 2x + 2y + 4z = 2. \end{cases}$ calcolandole quando sono infinite.

[ $\exists!$ sol. se $t \neq \pm 1$. Se $t = 1$ $\exists\, \infty$ sol, $x = -z-2, y = -z+3$. Nessuna sol. se $t = -1$. ]

## Autovalori ed autovettori

(1) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda)$ e le sue radici sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 8$.

*Osservazione* In generale se $A$ è una matrice triangolare superiore (o inferiore), allora anche la matrice $A - \lambda I$ è triangolare superiore e il suo determinante è il prodotto degli elementi diagonali, quindi gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale.

Gli autovettori corrispondenti all' autovalore $\lambda = 2$ sono le soluzioni del sistema $A\,X = 2\,X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, equivalentemente le soluzioni non tutte nulle del sistema $(A - 2I)X = \mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, cioè del sistema $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, che sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Si possono anche scrivere come $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gli autovettori corrispondenti all' autovalore $\lambda = 8$ sono le soluzioni del sistema $A\,X = 8\,X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, equivalentemente le soluzioni non tutte nulle del sistema $(A - 8I)X = \mathbf{0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, cioè del sistema $\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, che sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Si possono anche scrivere come $s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dato che la matrice $2 \times 2$ ha due autovalori distinti essa è diagonalizzabile. Una base di autovettori, è data dalla coppia $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice nella base $\mathbf{v}_1$ , $\mathbf{v}_2$ della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, che nella base canonica è rappresentata dalla matrice $A$, è la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ]

(2) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile (in campo reale).

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e non ha radici reali. Quindi non esistono autovalori (reali) e la matrice non è diagonalizzabile (in campo reale). ]

(3) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ e ha la radice doppia $\lambda = 1$, che è quindi l' unico autovalore di molteplicità algebrica 2.
Gli autovettori corrispondenti all' autovalore $\lambda = 1$ sono le soluzioni del sistema $(A-1I)(X) = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sistema che si riduce all' equazione $x + y = 0$.
Le soluzioni sono della forma $(t, -t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$, spazio di dimensione 1.
Ne segue (essendo la molteplicità geometrica strettamente minore di quella algebrica) che la matrice non è diagonalizzabile. ]

(4) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ L' esercizio è vuoto: ovviamente $A$ è già diagonale e la base canonica è già una base di autovettori, ma svolgiamo l' esercizio per capire quello che può accadere in dimensione superiore.

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2$ e ha la radice doppia $\lambda = 2$, che è quindi l' unico autovalore di molteplicità algebrica 2.
Gli autovettori corrispondenti all' autovalore $\lambda = 2$ sono le soluzioni del sistema $(A - 2I)(X) = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sistema verificato per ogni scelta $x = t$, $y = s$, $t, s \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni sono quindi della forma $(t, s) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ al variare di $t, s \in \mathbb{R}$, spazio di dimensione 2 una cui base è la base canonica $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
Ne segue (essendo la molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, che uguaglia la dimensione 2 dello spazio) che la matrice è diagonalizzabile (ovviamente è già diagonale e la base canonica è già una base di autovettori, ma come detto prima abbiamo svolto l' esercizio per capire quello che può accadere in dimensione superiore). ]

(5) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Gli autovalori sono
$\lambda = 1$, con autospazio $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, e
$\lambda = 2$ con autospazio $t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, equivalentemente $t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. La matrice è diagonalizzabile. ]

(6) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile (in campo reale).

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 6$, con discriminante negativo. Ne segue che (in campo reale) non esistono autovalori né autovettori (né quindi la matrice è diagonalizzabile). ]

(7) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. L' unico autovalore è
$\lambda = -1$, con molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica solo 1 (quindi la matrice non è diagonalizzabile): l' autospazio dell' autovalore $\lambda = -1$ è dato dal sottospazio di dimensione uno (cioè dai multipli di un solo vettore fissato) $t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
]

(8) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Essendo la matrice triangolare inferiore il polinomio caratteristico è il prodotto degli elementi diagonali di $A - \lambda I$: $p(\lambda) = (-2 - \lambda)^3$. C' è quindi solo un autovalore, $\lambda = -2$, di molteplicità algebrica 3. Le soluzioni del sistema $(A - \lambda I)X = (A + 2I)X = \mathbf{0}$ sono le soluzioni di $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che ha come soluzioni i vettori della forma $\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, spazio di dimensione 1. Quindi c'è solo un autovalore, $\lambda = -2$, con autospazio di dimensione 1, generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Essendo quindi 1 la molteplicità geometrica dell' autovalore $\lambda = -2$, che ha invece molteplicità algebrica 3, la matrice non è diagonalizzabile, ]

(9) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 3\\0 & 1 & 0\\3 & -3 & -2\end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)+3(-3)(1-\lambda) = -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5 = -(\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5)$. Provando a vedere se ci sono radici tra i divisori di 5, termine noto, si trova che $\lambda = 1$ annulla il polinomio.
Si può allora scomporre il polinomio con la regola di Ruffini, trovando $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda-5) = (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-5)$. Risolvendo l' equazione di secondo grado $\lambda^2+4\lambda-5 = 0$ (o procedendo con il metodo di Ruffini anche qui) si trova che le radici sono $\lambda = 1$, $\lambda = -5$. In altre parole il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+5)$ e si annulla per $\lambda = -5$ e per $\lambda = 1$ (quest' ultima radice doppia).

L' autospazio dell' autovalore $\lambda = -5$, cioè l' insieme delle soluzioni del sistema $\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\0 & 6 & 0\\3 & -3 & 3\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ è costituito dai vettori della forma $t\mathbf{v}_3$, dove $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

L' autospazio dell' autovalore $\lambda = 1$, cioè l' insieme delle soluzioni del sistema $\begin{pmatrix}-3 & 3 & 3\\0 & 0 & 0\\3 & -3 & -3\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ è costituito dai vettori della forma $X = \begin{pmatrix}s+u\\s\\u\end{pmatrix}$, con $s, u \in \mathbb{R}$ qualunque, e si possono anche scrivere come $s\mathbf{v}_1 + u\mathbf{v}_2$, $s, u \in \mathbb{R}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ne segue che la molteplicità geometrica dell' autovalore $\lambda = 1$ è pari a 2, che ne è la molteplicità algebrica. La somma delle molteplicità geometriche di tutti gli autovalori è dunque 3, dimensione dello spazio in cui ci troviamo, e quindi la matrice è diagonalizzabile, e i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice (della trasformazione lineare associata alla matrice $A$ nella base canonica) è la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

]

(10) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Gli autovalori sono $\lambda = 2$, di molteplicità algebrica 1, con autospazio generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e
$\lambda = 0$, di molteplicità algebrica 2 e autospazio (i cui elementi sono le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che si riduce all' equazione $x + y + z = 0$, con soluzioni $x = t$, $y = s$, $z = -t - s$ ) generato da $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matrice è diagonalizzabile. ]

(11) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det (A - \lambda I) = -\lambda^3 + 20\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 20)$. Gli autovalori sono le soluzioni dell' equazione $-\lambda(\lambda^2 - 20) = 0$, cioè i tre valori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, e $\lambda_3 = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$ (ognuno di molteplicità algebrica 1).

L' esercizio richiede il calcolo di un autovettore, e scegliamo quello relativo all' autovalore più semplice, $\lambda = 0$. Gli autovettori relativi all' autovalore $\lambda = 0$ sono le soluzioni del sistema $A\,X = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che hanno la forma $t\,\mathbf{v}_1$, $t \in \mathbb{R}$, dove $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ genera l' autospazio relativo all' autovalore $\lambda = 0$.

Si noti che senza calcolare gli autovettori relativi agli altri autovalori $\pm 2\sqrt{5}$, possiamo dire che la matrice è diagonalizzabile. Infatti avendo tre autovalori distinti avrà tre autovettori linearmente indipendenti (per ognuno degli autovalori si sceglie un autovettore che genera l' autospazio corrispondente, che avrà dimensione 1 per ognuno dei tre autovalori semplici).

]

(12) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1)$. L' unico autovalore reale è $\lambda = 0$, e ha molteplicità algebrica 1, quindi anche la molteplicità geometrica sarà 1 (è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica, ma è sempre almeno 1 ...). Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile in campo reale.

Gli autovettori relativi all' unico autovalore reale, cioè $\lambda = 0$, sono le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sono i vettori della forma $t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sottospazio unidimensionale di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ]

(13) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -12 & 2 & 6 \\ 8 & -6 & -11 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Diagonalizzabile, autovalori $\lambda = -7$ di molteplicità algebrica 2, con autospazio generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e

$\lambda = 2$ con autospazio generato da $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ]

(14) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$.

Gli autovalori sono $\lambda = 1$, di molteplicità algebrica 1, con autospazio generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e
$\lambda = -1$, di molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica solo 1: l' autospazio di $\lambda = -1$ è un sottospazio di dimensione uno ed è generato da $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice non è diagonalizzabile. ]

(15) Calcolare in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$ autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ Essendo la matrice triangolare il polinomio caratteristico si calcola subito come $p(\lambda) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)(k - \lambda)$. Se $k \neq 1, 4$ la matrice ha 3 autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile.

Se $k = 4$ l' autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2, ma anche la molteplicità geometrica è 2, quindi $A$ è diagonalizzabile: gli autovettori risolvono $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \mathbf{0}$ e l' autospazio è generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Se invece $k = 1$ l' autovalore 1, che ha molteplicità algebrica 2, ha molteplicità geometrica 1, quindi $A$ non è diagonalizzabile: gli autovettori risolvono $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \mathbf{0}$ e l' autospazio ha dimensione 1 ed è generato da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

]

(16) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ $\lambda = -1+\sqrt{5}$ , $\mathbf{v} = (2, 3+\sqrt{5})$ ; $\lambda = -1-\sqrt{5}$ , $\mathbf{v} = (2, 3-\sqrt{5})$. La matrice è diagonalizzabile perché ha due autovalori distinti. ]

(17) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ $\lambda = \pm\sqrt{5}$ ; $\lambda = 0$ : $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$. La matrice è diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. ]

(18) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e dire se è diagonalizzabile.

[ $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ ; $\lambda = 0$ : $\mathbf{v} = (4, 1, -1)$. La matrice è diagonalizzabile perché ha tre autovalori distinti. ]