Analisi matematica 2 per Chimica (6 CFU) 2023-24
Docente Lucio Damascelli
Università di Tor Vergata
Alcuni esempi svolti a lezione, esercizi simili e di esame

CALCOLO DI DERIVATE PARZIALI

(1) Determinare l' insieme di definizione A, l' insieme B dove esistono le derivate parziali e le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, (, $f_z(x,y,z)$) delle seguenti funzioni.
a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$
b) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$
c) $f(x,y,z) = \sin(xy)\cos(z)$
d) $f(x,y) = \frac{y}{1-x}$
e) $f(x,y) = e^{x^3y^2}$
f) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$
g) $f(x,y) = x^2 y \sin(xy)$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
i) $f(x,y) = \log(y - x^2)$
j) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
k) $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 2)$
l) $f(x,y) = \arctan(\sqrt{1 + x^2y^4})$
m) $f(x,y) = x^y$
n) $f(x,y,z) = z^{xy}$
o) $f(x,y,z) = (xy)^z$
p) $f(x,y) = (xy)^{(xy)}$

[a) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 3x^2 - y$, $f_y(x,y) = 2y - x$

b) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y)$, $f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$

c) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = y\cos(xy)\cos(z)$, $f_y(x,y) = x\cos(xy)\cos(z)$, $f_z(x,y) = -\sin(xy)\sin(z)$

d) $A = B = [x \neq 1]$ (abbreviazione che useremo anche in seguito invece della notazione completa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$), $f_x(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{1-x}$

e) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 3x^2y^2e^{x^3y^2}$, $f_y(x,y) = 2x^3ye^{x^3y^2}$

f) $A = B = [y \neq 0]$ (abbreviazione che useremo anche in seguito invece della notazione completa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$), $f_x(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $f_y(x,y) = \frac{-3x^2}{y^4}$

g) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy)$, $f_y(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3y\cos(xy)$

h) $A = \mathbb{R}^2$, $B = [x^2 + y^2 \neq 0] = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $A = B = [y > x^2]$, $f_x(x,y) = \frac{-2x}{y-x^2}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$

j) $A = [x^2 + y^2 \leq 4] = \overline{B_2((0,0))}$, $B = [x^2 + y^2 < 4] = B_2((0,0))$, $f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

k) $A = [1 \leq x^2 + y^2 \leq 3] = \overline{B_{\sqrt{3}((0,0))}} \setminus B_1((0,0))$, $B = [1 < x^2 + y^2 < 3] = B_{\sqrt{3}((0,0))} \setminus \overline{B_1((0,0))}$, $f_x(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(4-x^2-y^2)^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{1-(4-x^2-y^2)^2}}$

l) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = \frac{1}{2+x^2y^4}\ \frac{1}{2\sqrt{1+x^2y^4}}\ 2xy^4 = \frac{xy^4}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2y^4}}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{2+x^2y^4}\ \frac{1}{2\sqrt{1+x^2y^4}}\ 4x^2y^3 = \frac{2x^2y^3}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2y^4}}$

m) $A = B = [x > 0]$, $f_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f_y(x,y) = x^y\log(x)$

n) $A = B = [z > 0]$, $f_z(x,y,z) = xyz^{xy-1}$, $f_x(x,y,z) = yz^{xy}\log(z)$, $f_y(x,y,z) = xz^{xy}\log(z)$

o) $A = B = [xy > 0]$ (unione di primo e terzo quadrante senza gli assi), $f_x(x,y,z) = yz(xy)^{z-1}$, $f_y(x,y,z) = xz(xy)^{z-1}$, $f_z(x,y,z) = (xy)^z\log(xy)$

p) $A = B = [xy > 0]$ (unione di primo e terzo quadrante senza gli assi), $f(x,y) = (xy)^{(xy)} = e^{(xy)\log(xy)}$, $f_x(x,y) = (xy)^{(xy)}[y\log(xy) + y]$, $f_y(x,y) = (xy)^{(xy)}[x\log(xy) + x]$

Sia $f = f(x,y) : A \to \mathbb{R}$, dove A è un aperto di $\mathbb{R}^2$, una funzione differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$.
Il **piano tangente** al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), dove $z_0 = f(x_0, y_0)$ (dove z_0 si calcola a partire da x_0, y_0), è il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

(2) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = e^{x^2} \arctan(y^2)$ calcolare il gradiente in un punto generico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e scrivere l' equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), dove $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

[$f_x(x,y) = 2xe^{x^2} \arctan(y^2)$, $f_y(x,y) = e^{x^2} \frac{2y}{1+y^4}$, $z_0 = f(0,1) = \frac{\pi}{4}$, $f_x(0,1) = 0$, $f_y(0,1) = 1$ Il piano tangente nel punto $(0, 1, \frac{\pi}{4})$ ha equazione $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, cioè $z = y - 1 + \frac{\pi}{4}$.]

(3) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = e^{x-y^2} + \sqrt{1 + x^2 + y^4}$ calcolare il gradiente in un punto generico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e la derivata di f nella direzione $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(1,1)$. Scrivere poi l' equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), dove $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

[$f_x(x,y) = e^{x-y^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^4}}$, $f_y(x,y) = -2ye^{x-y^2} + \frac{2y^3}{\sqrt{1+x^2+y^4}}$ In particolare il gradiente di f nel punto $(1,1)$ è il vettore $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, -2 + \frac{2}{\sqrt{3}})$. La funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, quindi è differenziabile, e la derivata direzionale si può calcolare con la formula del gradiente $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{v} = (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ Il piano tangente nel punto $(1, 1, 1 + \sqrt{3})$ ha equazione $z = 1 + \sqrt{3} + (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})(x - 1) + (-2 + \frac{2}{\sqrt{3}})(y - 1)$.]

(4) Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = \arctan\left[\sqrt{1 + x^2\, y^4}\right]$, $x, y \in \mathbb{R}$, dire motivando la risposta se la funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e scrivere l' equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), dove $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = f(x_0, y_0)$

[$f_x(x,y) = \frac{xy^4}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2\,y^4}}$, $f_y(x,y) = \frac{2x^2y^3}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2\,y^4}}$. f è differenziabile ovunque, essendo continue le sue derivate parziali. Il piano tangente nel punto $(0, 0, \frac{\pi}{4})$ ha equazione $z = \frac{\pi}{4}$.]

(5) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = (x\,y)^{\log(x\,y)}$, $x > 0$, $y > 0$
a) calcolare il gradiente in un punto generico (x,y) con $x > 0$, $y > 0$ b) dire se la funzione è differenziabile in ogni punto (x,y) con $x > 0$, $y > 0$

[La funzione $f(x,y) = (x\,y)^{\log(x\,y)} = e^{\log^2(x\,y)}$ è differenziabile nei punti indicati perché le sue derivate parziali sono continue: $f_x(x,y) = \frac{2\log(xy)}{x}\,(x\,y)^{\log(x\,y)}$, $f_y(x,y) = \frac{2\log(xy)}{y}\,(x\,y)^{\log(x\,y)}$]

(6) Data la funzione di due variabili: $f(x,y) = \arcsin(\frac{x^2y^2}{1+x^2y^2})$ trovare il dominio D e l' immagine I della funzione, verificare che esistono le derivate parziali in ogni punto di D e calcolarle, dire se f è differenziabile in D motivando la risposta.

[La funzione arcoseno è definita nell' intervallo $[-1,1]$ e ha per immagine l' intervallo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, e l' immagine dell' intervallo $[0,1)$ è l' intervallo $[0,\frac{\pi}{2})$. Al variare di $x,y \in \mathbb{R}^2$ la frazione $\frac{x^2y^2}{1+x^2y^2}$ è compresa tra 0 e 1 e descrive tutto l' intervallo $[0,1)$ (dato $t \in [0,+\infty)$, scegliendo $x = y = \sqrt[4]{t}$ vengono assunti tutti i valori della funzione $\frac{t}{t+1}$ per $t \geq 0$ ...) Quindi $D = \mathbb{R}^2$, $I = [0,\frac{\pi}{2})$. La funzione è differenziabile in D perché sono (definite essendo $\frac{x^2y^2}{1+x^2y^2} < 1$ e) continue in D le derivate parziali $f_x(x,y) = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)\sqrt{1+2x^2y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)\sqrt{1+2x^2y^2}}$]

(7) Data la funzione di due variabili : $f(x,y) = \arctan[\sqrt{y}\,\log(x)]$ trovare l' insieme di definizione A, discutere la derivabilità nei punti di A e calcolare le derivate parziali di f

[Il logaritmo è definito e derivabile in $(0,+\infty)$, la radice è definita e continua in $[0,+\infty)$, derivabile in $(0,+\infty)$. Ne segue che $A = (0,+\infty) \times [0,+\infty)$; inoltre nei punti (x,y) con $x > 0$, $y > 0$ f ha derivate parziali continue $f_x(x,y) = \frac{1}{1+y\log^2(x)}\frac{\sqrt{y}}{x}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{1+y\log^2(x)}\frac{\log(x)}{2\sqrt{y}}$, quindi è ivi differenziabile; nei punti $(x,0)$ con $x > 0$ la derivata rispetto a x esiste ed è nulla, mentre se $x \neq 1$ non esiste la derivata (destra) rispetto a y; nel punto $(1,0)$ la derivata destra rispetto a y è nulla]

(8) Calcolare insieme di definizione A e di derivabilità B e calcolare il gradiente in B delle seguenti *funzioni* (*importanti per il seguito*)
a) $f_1(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$; dire a parole cosa è questa funzione)

b) $f_2(\mathbf{x}) = f(x^1, \ldots, x^N) = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^N)^2}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^N$; dire a parole il nome di questa funzione e scrivere il gradiente in termini di questo nome . . .)

[$f_1(x, y)$ è l' argomento principale ϑ in coordinate polari del punto P che ha (x, y) come coordinate cartesiane se il punto P appartiene al semipiano $S =\ [\,x > 0\,]$
N. B. Qui e in seguito scriveremo spesso notazioni brevi come $[\,x > 0\,]$ invece della notazione completa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0\}$
Il gradiente di $f_1(x, y)$ è $\nabla f_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

$f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ è la norma del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definita e continua in $\mathbb{R}^n$.
È derivabile solo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ il suo gradiente è $\nabla f_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$
(se $n = 1$ ritroviamo che la funzione modulo è derivabile eccetto che in zero con derivata $\frac{x}{|x|} = \text{sgn}\ (x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$)
]

(9) Data la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \\ f_4(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ yz \\ xy \\ xz \end{pmatrix}$$

calcolare la matrice jacobiana $J_f(x, y, z)$ in un punto generico di $\mathbb{R}^3$ e dire se la funzione è differenziabile in (ogni punto di) $\mathbb{R}^3$.

[La matrice jacobiana (matrice 4×3) è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2y & -2z \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

La funzione è differenziabile perché tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, 4,\ j = 1, \ldots 3)$ sono continue.]

(10) Date le funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite da $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 2t \end{pmatrix}$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ calcolare la derivata di $\alpha(t) = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) direttamente, scrivendo esplicitamente la composta
ii) usando il teorema di differenziabilità delle funzioni composte

Verificare che è definita anche la funzione $h = f \circ g$, specificarne dominio e codominio, scriverla esplicitamente e calcolarne la matrice jacobiana.

[$\alpha(t) = -2t^2 - 2t + 1$, $\alpha'(t) = -4t - 2$,

$J_g(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$,

$J_f(t) = \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$J_g(x(t), y(t), z(t))\ J_f(t) = \nabla g(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{f}'(t) =$

$(2t, 2 - 2t, -4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4t - 2$

$f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ 1 - x^2 - y^2 + z^2 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$, con

matrice jacobiana $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ -2x & -2y & 2z \\ 4x & 4y & -4z \end{pmatrix}$]

(11) Date le funzioni $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite da

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ kt \end{pmatrix} , \quad g(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$$

calcolare la derivata di $\alpha(t) = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) direttamente, scrivendo esplicitamente la composta

ii) usando il teorema di differenziabilità delle funzioni composte

Verificare che è definita anche la funzione $h = f \circ g$, specificarne dominio e codominio, scriverla esplicitamente e calcolarne la matrice jacobiana.

[a) $\alpha(t) = R^2\, k\, t$, $\alpha'(t) = k\, R^2$,

$J_g(x, y, z) = \nabla g(x, y, z) = (2xz, 2yz, (x^2 + y^2))$,

$J_f(t) = \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ k \end{pmatrix}$,

$J_g(x(t), y(t), z(t))\ J_f(t) = \nabla g(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{f}'(t) =$

$(2Rkt\cos(t), 2Rkt\sin(t), R^2) \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ k \end{pmatrix} = k\, R^2$

$f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita da $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} R\cos((x^2 + y^2)z) \\ R\sin((x^2 + y^2)z) \\ k(x^2 + y^2)z \end{pmatrix}$

e la sua matrice jacobiana (matrice 3×3) è data da ...]

MASSIMI E MINIMI LIBERI DI FUNZIONI SCALARI DI PIÙ VARIABILI

NOTA.
Il Criterio di Sylvester per determinare se una matrice quadrata $n \times n$ simmetrica A è definita positiva/negativa, basato sul segno dei minori principali di una matrice, può essere posto in una forma semplice nel caso di funzioni di due variabili ($n = 2$), caso nel quale si riesce sempre a determinare il carattere della matrice
Data una matrice 2×2 simmetrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ il suo determinante è
$\det(A) = ac - b^2$, mentre la
TRACCIA di A è la somma degli elementi diagonali:
$\mathrm{Tr}\,(A) = a + c$.

Data una matrice 2×2 simmetrica A si hanno i seguenti casi.

- Se $\det(A) < 0$ allora A è indefinita.
- Se $\det(A) > 0$ allora A è definita positiva [rispettivamente negativa] se $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ [rispettivamente $\mathrm{Tr}\,(A) < 0$]
- Se $\det(A) = 0$ la matrice non è definita (positiva o negativa) ma è comunque una matrice semidefinita: A è semidefinita positiva [rispettivamente semidefinita negativa] se $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ [rispettivamente $\mathrm{Tr}\,(A) < 0$].

Si noti che se $n \geq 3$ e il determinante si annulla, non ci sono criteri altrettanto semplici e spesso non si riesce a determinare il carattere di una matrice.

Inoltre attenzione, in due dimensioni una matrice definita positiva o negativa ha sempre determinante positivo (e se il determinante è negativo la matrice è indefinita), ma ad esempio in dimensione 3 una matrice definita negativa ha determinante negativo.

(1) Data la funzione di due variabili $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$ trovare il valore di λ tale che il punto $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ sia un punto critico di f. Per tale valore trovare eventuali altri punti critici di f, e per ogni punto critico specificare se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 6x + 2\lambda y, 2\lambda x + 2y) = (0, 0)$ se e solo se $y = -\lambda x$. $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ è punto critico se $\lambda = 2$. Per tale valore i punti critici sono i punti $P_1 = (0, 0)$, punto di sella poiché la matrice hessiana ha determinante -4, e $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$, punto di minimo relativo (stretto) poiché la matrice hessiana ha determinante 4 e traccia 12]

(2) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + y^3 - \frac{15}{2}y^2 - 48x + 18\,y$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\nabla f(x,y) = (3x^2-48, 3y^2-15y+18) = (0,0)$ se e solo se $x = \pm 4$, $y = 2$ oppure $y = 3$. I punti critici sono dunque $P_1 = (4,3)$, $P_2 = (-4,3)$, $P_3 = (4,2)$, $P_4 = (-4,2)$. La matrice hessiana $H(x,y)$ è diagonale con gli elementi diagonali $(6x, 6y-15)$. Il punto P_1 è un punto di minimo locale stretto, la matrice hessiana essendo diag $(24,3)$, il punto P_4 è un punto di massimo locale stretto (diag $(-24,-3)$), i punti P_2 (diag $(-24,3)$), P_3 (diag $(24,-3)$) sono punti di sella, essendo det $H < 0$.]

(3) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella. Trovare estremo superiore ed inferiore della funzione e dire se ha massimo e/o minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$.

[$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 8x, 3y^2 - 6y) = (0,0)$ se e solo se $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$ oppure $y = 2$. I punti critici sono dunque $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_{3,4} = (\pm\sqrt{2}, 0)$, $P_{5,6} = (\pm\sqrt{2}, 2)$. La matrice hessiana è diagonale con gli elementi diagonali $(12x^2 - 8, 6y-6)$ e si deduce allora che P_1 è punto di massimo locale stretto, P_2, P_3 e P_4 sono punti di sella, mentre P_5 e P_6 sono punti di minimo locale stretto.

La funzione non ha massimi né minimo assoluto, perché $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} = +\infty$, $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} = -\infty$.

Infatti lungo la retta $x = 0$ la funzione vale $f(0,y) = y^3 - 3y^2$ e la funzione $g(y) = y^3 - 3y^2$ ha immagine $(-\infty, +\infty)$.]

(4) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella. Trovare estremo superiore ed inferiore della funzione e dire se ha massimo e/o minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$.

[$\nabla f(x,y) = (4x^3 + 2xy^2, 4y^3 + 2x^2y) = (0,0)$ se e solo se $x = y = 0$. Il punto critico è dunque $(0,0)$. La matrice hessiana ha entrate $H_{1,1} = 12x^2 + 2y^2$, $H_{1,2} = H_{2,1} = 4xy$, $H_{2,2} = 12y^2 + 2x^2$, e ha determinante nullo. Ciononostante si può vedere che l' origine è punto di minimo, non solo dall' analisi della funzione (che è nulla solo se $x = y = 0$ e positiva altrove), ma anche dal criterio basato sul carattere della matrice hessiana in un intorno di un punto critico: essa è semidefinita positiva in un intorno del punto critico (in questo esempio in tutto $\mathbb{R}^2$) avendo determinante $132\,x^2y^2 + 24\,x^4 + 24\,y^4 \geq 0$ e traccia $14\,x^2 + 14\,y^2 \geq 0$.

L' origine $(0,0)$ è (l' unico) punto di minimo assoluto, perché in tale punto la funzione è nulla, mentre negli altri punti di $\mathbb{R}^2$ è positiva. La funzione non ha massimo assoluto perché $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} = +\infty$, basta studiare $g(x) = f(x,0) = x^4$.]

(5) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\nabla f(x,y) = (\frac{-8}{x^2}+\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}+1) = (0,0)$ se e solo se $x = 4$, $y = 2$. La matrice hessiana ha entrate $H_{1,1} = \frac{16}{x^3}$, $H_{1,2} = H_{2,1} = \frac{-1}{y^2}$, $H_{2,2} = \frac{2x}{y^3}$, in particolare nel punto $(4,2)$ si ha che $H_{1,1} = \frac{1}{4}$, $H_{1,2} = H_{2,1} = \frac{-1}{4}$, $H_{2,2} = 1$. Essendo quindi definita positiva si deduce che l' unico punto critico è punto di minimo.]

(6) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = -2x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 5y - z^2 + 2z$ individuare i punti critici di f, specificando se si tratta di punti di minimo, massimo o sella.

[L' unico punto critico è il punto $(1,1,1)$, ed è un punto di massimo relativo (stretto) perché la matrice hessiana, con minori principali $-4, 15, -30$ è definita negativa]

(7) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = x^4 + x^3 + y^2 + z^2$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\nabla f(x,y,z) = (4x^3 + 3x^2, 2y, 2z) = (0,0,0)$ se e solo se $y = z = 0$, $x = 0$ oppure $x = -\frac{3}{4}$, i punti critici sono dunque $P_1 = (-\frac{3}{4}, 0, 0)$ e $P_2 = (0,0,0)$. La matrice hessiana è diagonale con gli elementi diagonali $(12x^2 + 6x, 2, 2)$. Nel punto P_1 è diag $(\frac{9}{4}, 2, 2)$, definita positiva perché i minori principali sono tutti positivi, quindi P_1 è di minimo relativo (stretto). In P_2 è diag $(0,2,2)$ con determinante 0, quindi non si può decidere in base ad essa. Osservando però la funzione si deduce che l' origine è un punto di sella, perché la restrizione di f all' asse x è $g(\varepsilon) = f(\varepsilon,0,0) = \varepsilon^4 + \varepsilon^3$, strettamente crescente in un intorno di 0 (con un flesso in 0).]

(8) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2 z$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\nabla f(x,y,z) = (-2x+2y, 2x-2\sqrt{2}yz, 2z-\sqrt{2}y^2)$. Si annulla nei punti $P_0 = (0,0,0)$ e $P_{1,2} = (\pm 1, \pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. La matrice hessiana ha entrate $H_{1,1} = -2$, $H_{1,2} = H_{2,1} = 2$, $H_{1,3} = H_{3,1} = 0$

$H_{2,2} = -2\sqrt{2}z$, $H_{2,3} = H_{3,2} = -2\sqrt{2}y$, $H_{3,3} = 2$. Si può dedurre che tutti i punti critici sono di sella osservando che il determinante è non nullo (-8 in P_0, -32 in $P_{1,2}$), quindi gli autovalori non sono nulli; in particolare non è possibile che la matrice sia semidefinita (positiva o negativa) senza essere definita (positiva o negativa). D' altra parte gli autovalori non possono avere tutti lo stesso segno perché non è verificata la condizione necessaria e sufficiente di definita positività, minori principali tutti positivi, né quella di definita negatività, minori con segno alterno $-, +, -$ in questo ordine. Nel nostro caso i minori principali sono -2, -4,-8 nel punto P_0, -2, 0,16 nei punti $P_{1,2}$.]

(9) Data la funzione di due variabili $f(x, y) = xy$ trovare i punti critici di f e specificare se si tratta di punto di minimo, massimo o sella. Trovare poi il massimo e il minimo assoluti di f sull' insieme $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

[Essendo $\nabla f(x, y) = (y, x)$, l' unico punto critico in tutto $\mathbb{R}^2$ della funzione è $P = (0, 0)$, che è un punto di sella, dato che la matrice hessiana ha determinante -1 ed è quindi indefinita. Per il Teorema di Weierstrass, essendo $\overline{B}$ compatto e f continua, esistono punti di massimo e minimo assoluto di f in $\overline{B}$. Se un punto di estremo si trova all' interno, cioè in $B =$ int $(\overline{B}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, deve essere un punto critico, e abbiamo visto che l' unico punto critico è un punto di sella.
Ne segue che i punti di massimo e minimo assoluti sono sulla frontiera, cioè sulla circonferenza $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, che è immagine della funzione $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Studiando la funzione composta $f \circ \alpha(t) = \cos(t)\sin(t)$ in $[0, 2\pi]$ si osserva che il massimo è $\frac{1}{2}$, assunto nei punti $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, che α manda nei punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, che sono quindi punti di massimo assoluto per f su B, mentre il minimo è $-\frac{1}{2}$, assunto nei punti $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, che α manda nei punti $(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, che sono quindi punti di massimo assoluto per f su $\overline{B}$.]

NOTA Per problemi di massimi/minimi assoluti di funzioni definite su insieme compatti vedi la sezione su massimi e minimi vincolati.

(10) Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti, della funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

[L' unico punto critico è l' origine, ed è un punto di minimo perché la matrice hessiana $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva. Tale

punto è anche di minimo assoluto, perché $f(0,0) = 0$ e altrove la funzione è sempre positiva. Infatti $f(x,0) = x^2$, mentre per ogni $y \neq 0$ fissato il trinomio (nella variabile x) x^2+xy+y^2 ha sempre segno positivo, essendo il discriminante $y^2 - 4y^2 = -3y^2 < 0$.
]

(11) Determinare massimo e minimo assoluto della funzione
$f(x,y) = x^2y^2e^{-x^2y^2}$

[Posto $t = x^2y^2 \geq 0$, e $g(t) = te^-t$, la funzione si può scrivere come $f(x,y) = g(x^2y^2)$.

Studiando la funzione $g(t) = te^-t$ in $[0,+\infty)$, si vede che $g'(t) = (1-t)e^-t$, quindi g cresce da $x = 0$, con $g(0) = 0$, a $x = 1$, con $g(1) = e^{-1}$, e poi decresce in $(1,+\infty)$, con $\lim_{x\to+\infty} g(t) = 0$, ha quindi in $[0,+\infty)$ un minimo assoluto in $t = 0$, con valore 0, e un massimo assoluto in $t = 1$, con valore e^{-1}.

Ne segue che il minimo assoluto di f è 0, ed è assunto nei punti con $t = x^2y^2 = 0$, cioè sugli assi cartesiani, mentre il massimo assoluto è e^{-1} ed è assunto nei punti con $t = x^2y^2 = 1$, cioè nei punti delle iperboli $xy = 1$ e $xy = -1$.]

(12) Determinare i punti critici della funzione
$f(x,y) = y\log(y+4x^2)$, specificandone la natura (massimo, minimo o sella).

[L' insieme di definizione della funzione è $D = [y > -4x^2]$, insieme dei punti che stanno sopra la parabola $y = -4x^2$.

Il gradiente è $\nabla f(x,y) = (\frac{8xy}{y+4x^2}, \log(y+4x^2) + \frac{y}{y+4x^2})$ e si annulla in $P_1 = (0, \frac{1}{e})$ e nei punti $P_2^{\pm} = (\pm\frac{1}{2}, 0)$.

La matrice hessiana è $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8y(y-4x^2)}{(y+4x^2)2} & \frac{32x^3}{(y+4x^2)2} \\ \frac{32x^3}{(y+4x^2)2} & \frac{y+8x^2}{(y+4x^2)2} \end{pmatrix}$

Essendo $H_f(0,\frac{1}{e}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ definita positiva, il punto P_1 è un punto di minimo.

Essendo $H_f(\pm\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & 2 \end{pmatrix}$ indefinita, i punti $P_2^{\pm}$ sono punti di sella.]

(13) Data la funzione di due variabili
$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy - 4x + y^2 - 2y$
trovare i punti critici di f, e per ogni punto critico specificare se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$P_1 = (0,1)$ punto di sella, $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ punto di minimo relativo (stretto).]

(14) (esercizio più impegnativo) Data la funzione
$f(x,y) = (x^2+y^2-4)(y-a)$, $a \ge 0$
a) Determinare i punti critici di f al variare di $a \ge 0$.
b) Studiare la natura dei punti critici (massimo, minimo o sella) nel caso $a = 2$.
c) Studiare la natura dei punti critici (massimo, minimo o sella) nel caso $a = 1$.

[$f_x(x,y) = 2x(y-a)$, $f_y(x,y) = 2y(y-a)+x^2+y^2-4 = 3y^2-2ay+x^2-4$.
Il gradiente si annulla se $x = 0$, $y = \frac{a\pm\sqrt{a^2+12}}{3}$, oppure se $|a| \le 2$, $y = a$, $x = \pm\sqrt{4-a^2}$.
Nel caso in cui $|a| = 2$, $y = a$ si ottengono i punti $(0,\pm 2)$, già ottenuti nel caso $x = 0$, ($y = \frac{a\pm\sqrt{a^2+12}}{3} = \frac{\pm 2\pm\sqrt{(\pm 2)^2+12}}{3}$).
Quindi se $|a| \ge 2$ ci sono due punti critici $(0, \frac{a\pm\sqrt{a^2+12}}{3})$, mentre se $|a| < 2$ oltre ai precedenti ci sono altri due punti critici $(\pm\sqrt{4-a^2}, a)$ e i punti critici sono quattro.
b) La funzione è $f(x,y) = (x^2+y^2-4)(y-2)$ e come visto ha i due punti critici $(0, \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3})$, cio è $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,-\frac{2}{3})$.
Le derivate seconde sono $f_{xx} = 2(y-2)$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x$, $f_{yy} = 6y-4$.
Nel punto $P_2 = (0,-\frac{2}{3})$ esse valgono $f_{xx} = -\frac{16}{3}$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = -8$, e tale punto è di massimo locale stretto perché la matrice hessiana è definita negativa.
Nel punto $P_1 = (0,2)$ le derivate valgono $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 8$ e non si può decidere in base all' analisi della matrice hessiana.
Tuttavia il punto $P_1 = (0,2)$ è un punto di sella perché se calcoliamo la funzione nei punti $(2\sqrt{\varepsilon}, 2\pm\varepsilon)$, arbitrariamente vicini al punto $(0,2)$, otteniamo valori $(\pm\varepsilon)(4\varepsilon \pm 4\varepsilon + \varepsilon^2)$, positivi o negativi a seconda del segno scelto se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo.
c) La funzione è $f(x,y) = (x^2+y^2-4)(y-1)$, come visto ha punti critici $P_1 = (0, \frac{1+\sqrt{1+12}}{3}) = (0, \frac{1+\sqrt{13}}{3})$, $P_2 = 0, \frac{1-\sqrt{1+12}}{3}) = (0, \frac{1-\sqrt{13}}{3})$, $P_3 = (\sqrt{4-1}, 1) = (\sqrt{3}, 1)$, $P_4 = (-\sqrt{4-1}, 1) = (-\sqrt{3}, 1)$.
Le derivate seconde sono $f_{xx} = 2(y-1)$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x$, $f_{yy} = 6y-2$.
Nei punti $P_3, P_4 = (\pm\sqrt{3}, 1)$ si ha che $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = f_{yx} = \pm 2\sqrt{3}$, $f_{yy} = 4$ ed essendo negativo il determinante della matrice hessiana tali punti sono punti di sella.
Nei punti P_1, P_2 le derivate seconde valgono $f_{xx} = \frac{-4\pm 2\sqrt{13}}{3}$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = \pm 2\sqrt{13}$, e il determinante è positivo, con

traccia positiva in P_1, che è quindi un punto di minimo locale stretto, e traccia negativa in P_2, che è quindi un punto di massimo locale stretto]

INTEGRALI DOPPI

(1) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, $D = [0,1]\times[0,1]$

[Essendo $e^{x+y} = e^x\,e^y$ a variabili separabili il calcolo è immediato: $\int_0^1 e^x\,dx\,\int_0^1 e^y\,dy = (e-1)^2$]

(2) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D x\,\cos(xy)\,dxdy$, $D = [0,\frac{\pi}{4}]\times[1,2]$

[Conviene calcolare prima l' integrale in dy e poi quello in dx: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\,\int_1^2 x\,\cos(xy)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx[\,\sin(xy)\,]\,|_{y=1}^{y=2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(2x) - \sin(x))\,dx = [\,-\frac{1}{2}\cos(2x)+\cos(x)\,]\,|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$]

(3) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D \frac{x^2}{1+x^2y^2}\,dxdy$, $D = [0,1]\times[0,1]$

[$\int_0^1 dx\,x^2\,\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,dy = \int_0^1 dx\,x^2\,\frac{1}{x}\arctan(xy)\,|_{y=0}^{y=1} =$
$\int_0^1 x\,\arctan(x)\,dx =$ (per parti) $\frac{x^2}{2}\arctan(x)\,|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2(+1-1)}{1+x^2}\,dx =$
$\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\,x-\arctan(x)\,]\,|_{x=0}^{x=1} =$
$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$]

(4) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D x^3\,e^{x^2y}\,dxdy$, $D = [1,2]\times[1,3]$

[Calcoliamo prima l' integrale in dy e poi quello in dx (si noti che seguendo l' ordine inverso si arriva ad integrali non calcolabili in termini di primitive elementari) e scriviamo $x^3 = x\,x^2$ per motivi che saranno chiari:
$\int_1^2 dx\;x\;\int_1^3 x^2\,e^{x^2y}\,dy = \int_1^2 dx\;x\,[\,e^{x^2y}\,]_{y=1}^{y=3} = \int_1^2 x(e^{3x^2}-e^{3x^2})\,dx =$
$[\,\frac{1}{6}e^{3x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\,]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{6}e^{12} - \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e$]

(5) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D x\,dxdy$,
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le x\le 2\,,\,e^x\le y\le e^{x^2}\}$

[$\int_1^2 dx\,x\,\int_{e^x}^{e^{x^2}} dy = \int_1^2 xe^{x^2} - xe^x\,dx = [\,\frac{1}{2}e^{x^2} - xe^x + e^x\,]_1^2 =$
$\frac{1}{2}e^4 - e^2 - \frac{1}{2}e$]

(6) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D \frac{\log(x)}{xy}\,dxdy$, dove
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le y\le e\,,\,1\le x\le y\}$

[$\int_1^e dy\,\frac{1}{y}\,\int_1^y \frac{\log(x)}{x}\,dx = \int_1^e dy\,\frac{1}{y}\,\frac{\log^2(y)}{2} =$
$\frac{\log^3(y)}{6}\,|_{y=1}^{y=e} = \frac{1}{6}$]

(7) Calcolare l' integrale $\iint_D \cos(y)e^x dxdy$,
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\,;\ 0 \le x \le \sin(y)\}$

[$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy\ \cos(y)\ \int_0^{\sin(y)} e^x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\, e^{\sin(y)} - 1\,)\ \cos(y)\, dy\ = e - 2$]

(8) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}}\, dxdy$ dove
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + 3 \le y \le 4x\}$

[Nelle disuguaglianze che definiscono D è implicito che $x^2 - 4x + 3 \le 0$ e quindi $1 \le x \le 3$; $\int_1^3 dx\, x \int_{x^2+3}^{4x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_1^3 (4x\sqrt{x} - 2x\sqrt{x^2+3})\, dx = \frac{8}{5}(3^{\frac{5}{2}} - 1) - \frac{2}{3}(12^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$]

(9) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D (3x^2 - 4x^3)\, dxdy$ dove
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^4 \le y \le x^3\}$

[Nelle disuguaglianze che definiscono D è implicito che $x^4 \le x^3$ e quindi $x \ge 0$, $x \le 1$, cioè $0 \le x \le 1$; $\int_0^1 dx\, (3x^2 - 4x^3) \int_{x^4}^{x^3} dy = \int_0^1 (x^3 - x^4)(3x^2 - 4x^3)\, dx = \frac{1}{2}(x^3 - x^4)^2|_{x=0}^{x=1} = 0$]

(10) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D \arctan(x)\, dxdy$, dove
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le 1\,,\ \frac{1}{1+x^2} \le y \le 1\}$

[$\int_0^1 dx\ \arctan(x) \int_{\frac{1}{1+x^2}}^1 dy\ =\ \int_0^1 \arctan(x)\, (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx\ =$ $[\, x\ \arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{\arctan^2(x)}{2}\ ]\,|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi^2}{32}$]

(11) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D \arcsin(x)\, dxdy$ dove
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le y \le \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\}$

[$\int_0^{\frac{1}{2}} dx\ \arcsin(x)\ \int_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\, dt = \frac{\pi^2}{72}$]

(12) Invertire l' ordine di integrazione nell' integrale iterato $\int_1^2 dx\ \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy$ per una funzione continua (cioè esprimere il dominio semplice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x \le 2\,, 0 \le y \le x^2\}$ come dominio semplice del tipo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ a \le y \le b\,,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$ e conseguentemente scrivere l' integrale come $\int_a^b dy\ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx$). Applicare il risultato al calcolo dell' integrale doppio su Ω della funzione $f(x,y) = \frac{y}{x^2} e^{\frac{-y}{x}}$

[Essendo $\max\{x^2 : 1 \le x \le 2\} = 4$, la y varia nell' intervallo $[0,4]$, mentre per y fissato la x dovrà essere minore o uguale a 2 e maggiore o uguale sia a 1 che a $\sqrt{y}$.
Quindi $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4\,,\, \max\{1, \sqrt{y}\} \le x \le 2\}$
e, essendo $\sqrt{y} \le 1$ se $0 \le y \le 1$, $\sqrt{y} \ge 1$ se $1 \le y \le 4$ si ha che
$\Omega = [\ 0 \le y \le 1\,,\, 1 \le x \le 2\,] \cup [\ 1 \le y \le 4\,,\, \sqrt{y} \le x \le 2\,]$
e quindi $\int_1^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_1^2 f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx$.
Se $f(x,y) = \frac{y}{x^2} e^{\frac{-y}{x}}$, la primitiva rispetto a x è la funzione $F(x,y) = e^{\frac{-y}{x}}$, e si ottiene
$\iint_\Omega \frac{y}{x^2} e^{\frac{-y}{x}}\,dxdy = \int_0^1 [F(2,y) - F(1,y)]\,dy + \int_1^4 [F(2,y) - F(\sqrt{y},y)]\,dy =$
$\int_0^1 [e^{\frac{-y}{2}} - e^{-y}]\,dy + \int_1^4 [e^{\frac{-y}{2}} - e^{-\sqrt{y}}]\,dy = \int_0^4 e^{\frac{-y}{2}}\,dy - \int_0^1 e^{-y}\,dy -$
$\int_1^4 e^{-\sqrt{y}}\,dy =$ (nell' ultimo integrale effettuiamo la sostituzione $y = t^2$, $dy = 2t\,dt$, $1 \le t \le 2$) $= [\,-2e^{\frac{-y}{2}}\,]\,|_0^4 + [\,e^{-y}\,]\,|_0^1 +$
$[\,2te^{-t}\,]\,|_1^2 + [\,2e^{-t}\,]\,|_1^2 = = -2e^{-2} + 2 + e^{-1} - 1 + 4e^{-2} - 2e^{-1} +$
$2e^{-2} - 2e^{-1} = 4e^{-2} + 1 - 3e^{-1}$]

CAMBI DI VARIABILE

(13) Calcolare l' integrale doppio $\iint_S \frac{\tan(x+y)}{x+y}\,dxdy$, dove S è il triangolo $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\,;\, y \ge 0\,;\, x + y \le 1\,,\}$

[Dato che la somma $x+y$ compare sia nell' insieme di integrazione che nella funzione integranda si può provare un cambio di variabile in cui tale somma sia una delle nuove variabili, ad es. $\begin{matrix} x+y=u \\ x=v \end{matrix}$.

Affinché sia una funzione biunivoca dobbiamo poter ricavare x e y in funzione di u e v, e questo ci darà anche il determinante jacobiano che compare nella formula di cambio di variabile
$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \iint_T f(x(u,v), y(u,v))\,|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|\,dudv$
dove $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ indica la matrice jacobiana della funzione $\mathbf{r}(u,v)$ di componenti $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ e $T = \mathbf{r}^{-1}(S)$ è l' insieme S descritto nelle nuove coordinate u, v (mentre $S = \mathbf{r}(T)$).

Abbiamo già la x in funzione di u, v, mentre sottraendo m. a m. le equazioni $x + y = u$, $x = v$ otteniamo $y = u - v$.

La matrice jacobiana di $\mathbf{r}(u,v) = \begin{cases} x(u,v) &= v \\ y(u,v) &= u - v \end{cases}$
è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e ha come determinante -1 e modulo del determinante 1.

Inoltre le condizioni che definiscono S tradotte nelle nuove coordinate dicono che $v\,(=x\,) \ge 0$, $u\,(=x+y\,) \le 1$, $u - v\,(=$

$y) \geq 0$ cioè $u \geq v$. Ne segue che $T = [\, 0 \leq u \leq 1\, ;\, 0 \leq v \leq u\,]$, insieme semplice. Di conseguenza l' integrale si calcola come

$\int_0^1 du \int_0^u \frac{\tan(u)}{u}\, dv = \int_0^1 \frac{\tan(u)}{u}\, u\, du = \int_0^1 \tan(u)\, du =$
$-\log(\cos(u))\,|_{u=0}^{u=1} = -\log(\cos(1))$]

(14) Calcolare l' integrale doppio $\iint_S \frac{dxdy}{x^2 y}$, dove S è il quadrilatero $= [\, x \leq y \leq 2x\ ;\ 2-2x \leq y \leq 2-x\,]$ delimitato dalle rette $y = x$, $y = 2x$, $y = 2-2x$, $y = 2-x$ (disegnare le rette per visualizzarlo).

[Si osserva che $x \geq 0$, essendo $x \leq 2x$, e inoltre se $x = 0$ nessun y verifica entrambe le due equazioni (dalla prima $y = 0$, dalla seconda $y = 2$). Ne segue che nell' insieme considerato $x > 0$ e dividendo per $x > 0$ l' insieme può essere descritto come $[\, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\ ;\ 1 \leq \frac{2-y}{x} \leq 2\,]$. Viene in mente di porre quindi $\frac{y}{x} = u$, $\frac{2-y}{x} = v$, in modo che nelle nuove coordinate u, v l' insieme diventa il quadrato $T = [\, 1 \leq u \leq 2\ ;\ 1 \leq v \leq 2\,]$.

Affinché sia una funzione biunivoca dobbiamo poter ricavare x e y in funzione di u e v, e questo ci darà anche il determinante jacobiano che compare nella formula di cambio di variabile.

Sommando m. a m. si ottiene $u + v = \frac{2}{x}$, quindi $x = \frac{2}{u+v}$, e allora $y = xu = \frac{2u}{u+v}$.

La matrice jacobiana di $\mathbf{r}(u,v) = \begin{cases} x(u,v) &= \frac{2}{u+v} \\ y(u,v) &= \frac{2u}{u+v} \end{cases}$

è $\begin{pmatrix} \frac{-2}{(u+v)^2} & \frac{-2}{(u+v)^2} \\ \frac{2v}{(u+v)^2} & \frac{-2u}{(u+v)^2} \end{pmatrix}$ e ha come determinante $\frac{4(u+v)}{(u+v)^4} = \frac{4}{(u+v)^3}$.

Essendo $T = [\, 1 \leq u \leq 2\ ;\ 1 \leq v \leq 2\,]$ il nuovo insieme di integrazione, l' integrale si calcola come

$\iint_T \frac{(u+v)^3}{8u} \frac{4}{(u+v)^3}\, dudv = \int_1^2 dv \int_1^2 \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log(2)$]

COORDINATE POLARI

(15) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D xy\, dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq x\}$

[In coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$), $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$, e per l' insieme D si ha $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$. Si deve quindi calcolare

$\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\sin^2(\vartheta)\,|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}$]

(16) Calcolare l' integrale doppio $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, :\, x^2+y^2 \le 2\,,\, x \le y\}$

[In coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \le \vartheta \le \pi$), $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$, e per l' insieme D si ha $0 \le \rho \le \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{5}{4}\pi$. Si deve quindi calcolare $\int_0^{\sqrt{2}} \rho e^{\rho^2}\,d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\vartheta = \pi\,\frac{1}{2}[\,e^{\rho^2}\,]\,|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}(e^2-1)$

(17) Calcolare gli integrali doppi $\iint_{D_1} xy^2\,dxdy$, $\iint_{D_2} xy^2\,dxdy$ dove $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, :\, x^2+y^2 \le 1\,,\, x \ge |y|\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, :\, x^2+y^2 \le 1\,,\, x \ge y\}$

[In coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \le \vartheta \le \pi$), $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$. Le condizioni su ρ sono $0 \le \rho \le 1$ per entrambi gli insiemi.

Per l' insieme D_1 si ha $-\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, mentre per l' insieme D_2 si ha $-\frac{3}{4}\pi \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$.

Si deve quindi calcolare, per D_1, l' integrale
$\int_0^1 \rho^4 d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{5}\,\frac{1}{3}\,[\,\sin^3(\vartheta)\,]_{\vartheta=-\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} =$
$\frac{1}{15}(\,\frac{1}{(\sqrt{2})^3} - (-\frac{1}{(\sqrt{2})^3})\,) = \frac{2}{15\sqrt{8}} = \frac{1}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{30}$.

Per D_2 si procede analogamente; ϑ varia tra $-\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{1}{4}\pi$, ma il valore di $\sin^3(\vartheta)$ è lo stesso in $-\frac{3}{4}\pi$ e $-\frac{1}{4}\pi$, vale $-\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, quindi l' integrale ha lo stesso valore.]

(18) Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x^2+y^2 \le 3\,;\, 0 \le y \le x\}$.
Calcolare l' integrale doppio $\iint_B\ 2\,\log\,(\,1+x^2+y^2\,)\,dxdy$

[Usiamo coordinate polari:
$x = \rho\,\cos(\vartheta)$, $y = \rho\,\sin(\vartheta)$, $dx\,dy = \rho\,d\rho d\vartheta$
A priori $0 < \rho < +\infty$, $0 < \vartheta < 2\pi$. Nel nostro caso $\sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{3}$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$ e l' integrale si calcola come
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \rho\,2\,\log(1+\rho^2)\,d\rho$.

L' integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\vartheta$ vale $[\vartheta]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$ mentre l' integrale indefinito $\int 2\,\rho\,\log(1+\rho^2)d\rho$ si può risolvere con la sostituzione $1+\rho^2 = t$, $2\rho d\rho = dt$, ottenendo
$\int \log(1+\rho^2)\,2\rho\,d\rho = \int \log(t) =$ (per parti) $(\,t\log(t) - t\,)$
$(1+\rho^2)\log(1+\rho^2) - (1+\rho^2)$

In conclusione si ottiene
$\iint_B\ 2\,\log\,(\,1+x^2+y^2\,)\,dxdy =$
$\frac{\pi}{4}\,[\,(1+\rho^2)\log(1+\rho^2) - (1+\rho^2)\,]\,_{\rho=\sqrt{2}}^{\rho=\sqrt{3}} =$
$\frac{\pi}{4}(4\log(4) - 3\log(3) - 1)$]

(19) Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (\frac{\pi}{2})^2 \,;\, 0 \leq x \leq y\}$.
Calcolare l' integrale doppio $\iint_B \cos(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$

[Usiamo coordinate polari:
$x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $dx\,dy = \rho\, d\rho d\vartheta$
A priori $0 < \rho < +\infty$, $0 < \vartheta < 2\pi$.

Nel nostro caso l' insieme B è descritto in coordinate polari come

$B = [\,\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \,;\, 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}\,]$ e l' integrale si calcola come $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos(\rho)\, d\rho$.

L' integrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\vartheta$ vale $[\vartheta]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ mentre l' integrale indefinito $\int \rho\cos(\rho) d\rho$ si può risolvere per parti ottenendo $\int \rho\cos(\rho) d\rho = \rho\sin(\rho) + \cos(\rho)$. In conclusione si ottiene

$\iint_B \cos(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy =$
$(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\ [\,\rho\sin(\rho) + \cos(\rho)\,]_{\rho=0}^{\rho=\frac{\pi}{2}} \ =$

$\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi(\pi-2)}{8}$]

(20) Calcolare l' area dell' insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}\,,\, 0 \leq x \leq 1\,,\,\}$.

[In coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$), $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$, e per l' insieme D si ha che, essendo $\cos(\vartheta)$ positivo, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.
Dovendo essere contemporaneamente $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos(\vartheta)}, 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ si ha che $0 \leq \rho \leq \min\,(\frac{1}{\cos(\vartheta)}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\vartheta)} & \text{se } -\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{6} \text{ o } \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
Si deve quindi calcolare $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos(\vartheta)}} \rho\, d\rho + (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}})\,(\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \rho\, d\rho) =$
$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos(\vartheta)}} \rho\, d\rho + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \rho\, d\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{9}\pi$]

(21) Calcolare l' area dell' insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3}\,,\, x \geq 1\}$.

[In coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$), $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$. Per l' insieme D si ha che $\rho\cos(\vartheta) \geq 1$, e sia ρ che $\cos(\vartheta)$ sono positivi. Conviene esprimere ρ in funzione di ϑ, e determinare invece dalla relazione che esprime ϑ in funzione di ρ il minimo e massimo valore di ϑ, che varierà poi tra estremi fissi: essendo $\cos(\vartheta) \geq \frac{1}{\rho} \geq \min_{\,0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

si ottiene $\quad -\frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{6}\,, \quad \frac{1}{\cos(\vartheta)} \le \rho \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Si deve quindi calcolare $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos(\vartheta)}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \rho\, d\rho = \frac{2}{9}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}$]

(22) Calcolare gli integrali doppi $\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy\,, \quad \iint_D 9\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \le 4\,,\, y \ge 0\}$

[Nel primo integrale conviene usare coordinate polari centrate in $(2,0)$, $x = 2 + \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, (con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$, $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$,) nel nostro caso $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \vartheta \le \pi$ e l' integrale vale $\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^2 \rho\,[(2+\rho\cos(\vartheta))^2 + (\rho\sin(\vartheta))^2]\, d\rho =$ (essendo $\int_0^{\pi} \cos(\vartheta) d\vartheta = 0$) $\pi \int_0^2 (4\rho + \rho^3) d\rho = 12\pi$.
Nel secondo invece, per evitare un integrando che contiene la radice, conviene usare coordinate polari centrate nell' origine, $x = \rho\cos(\vartheta), y = \rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$, $dxdy = \rho d\rho d\vartheta$. In questo caso le condizioni sul dominio sono $\sin(\vartheta) \ge 0$, $(\rho\cos(\vartheta) - 2)^2 + (\rho\sin(\vartheta))^2 \le 4$, cioè $\rho^2 \le 4\rho\cos(\vartheta)$ (che implica $\cos(\vartheta) \ge 0$) e si ottiene $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 4\cos(\vartheta)$.
Bisogna allora calcolare l' integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{4\cos(\vartheta)} 9\rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 192\cos^3(\vartheta) d\vartheta$ $= 192 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(\vartheta))\cos(\vartheta) d\vartheta = 192(\sin(\vartheta) - \frac{1}{3}\sin^3(\vartheta))|_0^{\frac{\pi}{2}} = 128$]

(23) Calcolare l' area e il baricentro (supponendo densità costante) della figura $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{x^2+y^2} \le x + 2\}$.

[Trasformiamo le condizioni che definiscono il dominio elevando al quadrato: $4x^2 + 4y^2 \le x^2 + 4x + 4$, $3(x^2 - \frac{4}{3}x) + 4y^2 \le 4$ e completando il quadrato nella parentesi tonda (cioè aggiungendo e togliendo $\frac{4}{9}$ nella parentesi) si ottiene $3(x - \frac{2}{3})^2 + 4y^2 \le 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$. Dividendo per $\frac{16}{3}$ si ottiene infine che l' insieme D è descritto dalla disuguaglianza $\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \le 1$, cioè D è l' interno dell' ellisse con centro $(\frac{2}{3}, 0)$ e semiassi $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Utilizzando le *coordinate ellittiche* $x = \frac{2}{3} + a\rho\cos(\vartheta) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho\cos(\vartheta), y = b\rho\sin(\vartheta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho\sin(\vartheta)$, con le condizioni $0 \le \rho < 1$, $0 \le \vartheta < 2\pi$, l' elemento di area è $dxdy = ab\rho d\rho d\vartheta$ e si calcola immediatamente l' area dell' ellisse, che è $ab \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho\, d\rho = \pi ab = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$, e il baricentro, che coincide con il centro di simmetria $(\frac{2}{3}, 0)$.]

INTEGRALI TRIPLI

(1) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_A yz^2 e^{xyz}\, dxdydz$ dove
$A = [\, 0 \le x \le 1\, ;\, 0 \le y \le 1\, ;\, 0 \le z \le 1\,]$

[Conviene calcolare l' integrale usando il seguente ordine nelle integrazioni:
$\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 yz^2 e^{xyz}\, dx = \int_0^1 dz \int_0^1 dy\ z\,(e^{xyz})\ |_{x=0}^{x=1} =$
$\int_0^1 dz \int_0^1 (ze^{yz} - z)\, dy = \int_0^1 (e^z - 1 - z)\, dz = e - 1 - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}$
]

(2) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_A e^{y^2+x}\, dxdydz$ dove
$A = [\, 0 \le y \le 1\, ;\, 0 \le x \le 2y^2\, ;\, 0 \le z \le y\,]$

[Posto $D = [\, 0 \le y \le 1\, ;\, 0 \le x \le 2y^2\,] \subset \mathbb{R}^2$, integrando per fili paralleli all' asse z il valore dell' integrale è pari all' integrale doppio $\iint_D dxdy\ e^{y^2} e^x\ \int_0^y dz = \iint_D y\, e^{y^2} e^x\, dxdy$.
Usando le formule di riduzione su insiemi semplici nel piano si ottiene allora che
$\iiint_A e^{y^2+x}\, dxdydz = \int_0^1 dy\ ye^{y^2} \int_0^{2y^2} e^x\, dx = \int_0^1 ye^{y^2}(e^{2y^2} - 1)\, dy =$
$\int_0^1 ye^{3y^2} - ye^{y^2}\, dy = [\, \frac{1}{6} e^{3y^2} - \frac{1}{2} e^{y^2}\,]\ |_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{2} e + \frac{1}{3}$]

(3) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_A e^x\ \sin(z)\, dxdydz$ dove
$A = [\, 0 \le y \le \frac{\pi}{6}\, ;\, 0 \le x \le \sin(3\,y)\, ;\, 3y \le z \le \frac{\pi}{2}\,]$

[Integrando per strati si ottiene che
$\iiint_A e^x\ \sin(z)\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dy\ \iint_{A_y} e^x\ \sin(z)\, dxdz,$
dove per ogni y fissato A_y è il rettangolo
$A_y = [\, 0 \le x \le \sin(3\,y)\, ;\, 3y \le z \le \frac{\pi}{2}\,]$.
Ne segue che l' integrale si calcola come
$\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy\ \int_0^{\sin(3\,y)} e^x\, dx\ \int_{3y}^{\frac{\pi}{2}} \sin(z)\, dz =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (e^{\sin(3\,y)} - 1)\cos(3\,y)\, dy = \frac{1}{3}\,(e - 2)$
]

(4) Calcolare il volume e il baricentro (supponendo densità costante) del tetraedro $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0,\ x + y + z \le 1\}$

[Dalle condizioni che definiscono il dominio si possono ricavare gli estremi fissi tra cui varia ad esempio x, per poi esprimere y e z in funzione di x e integrare per strati, cioè considerando $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1\, ,\, (y, z) \in D_x = \{y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0, z \ge 0,\ y + z \le 1 - x\}$. Iterando il procedimento si arriva al calcolo del volume: $\int_T dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx\ \int_0^{1-x} dy\ \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx\ \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = \int_0^1 [(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2]\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 1^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{1}{6}$.

Allo stesso risultato si arriva integrando per fili, cioè considerando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ e $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D\,,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$.
In modo analogo si calcola ad esempio l' integrale $\int_T x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)\,dx = \frac{1}{24}$, e quindi la coordinata x del baricentro sarà $\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$, analogamente lo stesso valore si ottiene per le altre coordinate del baricentro.]

(5) Siano $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2+y^2 \leq 3\,;\ 0 \leq x \leq y\}$ e $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B\,;\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$.
Calcolare l' integrale triplo $\iiint_A e^z\ dxdydz$

[Integrando per fili si ottiene che
$\iiint_A e^z\,dxdydz = \iint_B dxdy\ \int_0^{x^2+y^2} e^z\,dz = \iint_B (e^{x^2+y^2}-1)\,dxdy$
.

Usando coordinate polari l' insieme B si può descrivere come $B = [\,\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\,;\ \sqrt{2} \leq \rho \leq \sqrt{3}\,]$ e l' integrale si calcola come
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\ \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \rho(e^{\rho^2}-1)\,d\rho = (\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\frac{1}{2}(e^{\rho^2}-\rho^2)\,|_{\rho=\sqrt{2}}^{\rho=\sqrt{3}} = \frac{\pi}{8}(e^3-e^2-1)$
]

(6) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_V \log(\sqrt{x^2+z^2})\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+z^2 \leq e^2\,;\ z \leq x\,;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2+z^2}\}$.

[Posto $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+z^2 \leq e^2\,;\ z \leq x\}$ si ha che $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D\,;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2+z^2}$ e si può integrare per fili paralleli all' asse y.

Inoltre in coordinate polari $x = \rho\cos(\vartheta)$, $z = \rho\sin(\vartheta)$ (con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty,\ \ \pi \leq \vartheta \leq \pi$, $dxdz = \rho d\rho d\vartheta$) le condizioni che definiscono D sono $1 \leq \rho \leq e\,;\ -\frac{3}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{1}{4}\pi$.
Integrando per fili paralleli all' asse y si ottiene

$\int_D dxdz\ \log(\sqrt{x^2+z^2})\ \int_0^{\frac{1}{x^2+z^2}} dy = \int_D \frac{\log(\sqrt{x^2+z^2})}{x^2+z^2}\,dxdz$
$= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_1^e \frac{\log(\rho)}{\rho}\,d\rho = \pi(\frac{1}{2}\ \log^2(\rho))\,|_{\rho=1}^{\rho=e} = \frac{1}{2}\pi.$]

(7) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_V z\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2-z \leq x^2+y^2 \leq 2z-z^2\}$.

[Nelle disuguaglianze è implicito che $2-z \leq 2z-z^2$, cioè che $1 \leq z \leq 2$. Si può allora integrare per strati ottenendo $\iiint_V z\,dxdydz = \int_1^2 dz\ z\ \int_{D_z} dxdy = \int_1^2 dz\ z$ Area (D_z), dove per ogni z fissato D_z è la corona circolare $D_z = [\,2-z \leq x^2+y^2 \leq 2z-z^2\,]$ di area $\pi[\,2z-z^2-(2-z)\,] = \pi(-z^2+3z-2)$.
Il valore dell' integrale è quindi $\int_1^2\ \pi(-z^3+3z^2-2z)\,dz = \frac{1}{4}\pi$
]

(8) Calcolare l' integrale triplo della funzione $f(x,y,z) = z$ sul dominio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1\,;\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 + z^2\}$.

[Sia $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 + z^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1+z^2} + \frac{y^2}{4(1+z^2)} \leq 1\}$ l' ellisse di semiassi $a = a_z = \sqrt{1+z^2}$, $b = b_z = 2\sqrt{1+z^2}$ e area $\int_{D_z} dxdy = \pi ab = \pi\, 2(1+z^2)$.
Integrando per strati perpendicolari all' asse z si ottiene $\iiint_V z\, dxdydz = \int_0^1 dz\, z \int_{D_z} dxdy = \int_0^1 2\pi z(1+z^2)\, dz \;= 2\pi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}\pi$.]

(9) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro del cilindro omogeneo di altezza h e cerchio di base di raggio R: $C = \{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h\,;\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

[Essendo un solido di rotazione conviene usare le coordinate cilindriche, $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$, e nel nostro caso $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$, $0 \leq \rho \leq R$. Si ha allora che il volume del cilindro è dato dall' integrale $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h dz \int_0^R \rho\, d\rho = 2\pi\, h\, \frac{R^2}{2} = \pi R^2 h$.
Le coordinate x e y del baricentro sono nulle poiché, essendo $\int_0^{2\pi} \cos(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta$, è $\int_C xdxdydz = \int_C ydxdydz = 0$, mentre la coordinata z è data da $\frac{1}{\mathrm{vol}\,(C)} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h z\, dz \int_0^R \rho d\rho$ $= \frac{1}{\pi R^2 h}\, 2\pi \frac{R^2}{2} \frac{h^2}{2} = \frac{1}{\pi R^2 h}\, \pi R^2 \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$.
Il baricentro è quindi il punto $(0,0,\frac{h}{2})$ come prevedibile per ragioni di simmetria.]

(10) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro del cono omogeneo di altezza h e cerchio di base di raggio R: $K = \{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h\,;\, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2)\}$

[Essendo un solido di rotazione conviene usare le coordinate cilindriche, $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, con le condizioni a priori $0 \leq \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$, e nel nostro caso $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$, $0 \leq \rho \leq \frac{Rz}{h}$. Si ha allora che il volume del cono è dato dall' integrale $2\pi \int_0^h dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} \rho d\rho = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$.
Le coordinate x e y del baricentro sono nulle essendo $\int_K xdxdydz = \int_K ydxdydz = 0$, mentre la coordinata z è data da $\frac{\int_K zdxdydz}{\mathrm{vol}\,(K)} =$ $(\frac{\pi}{3} R^2 h)^{-1} \int_K zdxdydz = (\frac{\pi}{3} R^2 h)^{-1}\, 2\pi \int_0^h dz\, z \int_0^{\frac{Rz}{h}} \rho d\rho =$ $(\frac{\pi}{3} R^2 h)^{-1}\, \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = (\frac{\pi}{3} R^2 h)^{-1}\, \frac{\pi}{4} R^2 h^2 = \frac{3}{4} h$]

(11) Siano r, R tali che $0 < r < R$ e sia T il toro, generato dalla rotazione di angolo 2π attorno all' asse z del cerchio $B = B_r((R, 0))$ di centro $(R, 0)$ e raggio r nel piano xz, di equazione $(x - R)^2 + z^2 \leq r^2$. Calcolare il volume di T e l' integrale triplo $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$

[Il volume del solido di rotazione T, che in coordinate cilindriche è descritto come $T = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\,;\, (\rho, z) \in B\}$ $= \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\,;\, (\rho - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$, è dato dall' integrale $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int\int_B \rho d\rho dz =$ (essendo la variabile ρ muta possiamo scriverlo, tornando alle variabili del dominio nel piano xz) $2\pi \iint_B x dx dz$.
Usando le coordinate polari centrate in $(R, 0)$, $x = R + \rho' \cos(\vartheta')$, $z = \rho' \sin(\vartheta')$, $0 \leq \rho' \leq r$, $0 \leq \vartheta' \leq 2\pi$, ed essendo $\int_0^{2\pi} \cos(\vartheta') d\vartheta' = 0$, si ottiene che il volume è pari a $2\pi \int_0^r d\rho' \int_0^{2\pi} d\vartheta' \rho'(R + \rho' \cos(\vartheta')) = (2\pi)^2 \int_0^r \rho' R d\rho' = (2\pi)^2 R \frac{r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2$
Analogamente, essendo $\int_0^{2\pi} \cos(\vartheta') d\vartheta' = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta') d\vartheta' = \frac{\vartheta' + \sin(\vartheta')\cos(\vartheta')}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi$, l' integrale triplo vale $2\pi \iint_B \rho^2 d\rho dz =$ $2\pi \iint_B x^2 dx dz = 2\pi \int_0^r d\rho' \int_0^{2\pi} d\vartheta'\ \rho'(R + \rho' \cos(\vartheta'))^2 =$
$2\pi \left(2\pi \int_0^r \rho' R^2 d\rho' + \pi \int_0^r \rho'^3 d\rho'\right) = 2\pi^2 R^2 r^2 + \frac{\pi^2}{2} r^4$.

OSSERVAZIONE: il volume è $(2\pi R)\pi r^2$ come ci si può aspettare dal teorema di Pappo-Guldino se si osserva che il baricentro di B è nel punto $(R, 0)$ come segue da considerazioni di simmetria, o dal calcolo diretto delle coordinate del baricentro, contenuto nel calcolo precedente.]

(12) Calcolare il volume del solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2\,;\, 6x - 8 \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}$

Poniamo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x - 8 \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}$. Integrando per fili (o per strati, la variabile z è completamente separata dalle altre due, l' insieme è di tipo cilindrico) il volume è dato da vol $(V) = \int_0^2 dz \iint_D dxdy = 2$Area (D).

Si tratta quindi di capire cosa è D (e l' esercizio di fatto è un esercizio sugli integrali doppi, sulle aree di domini piani).

Le disuguaglianze che definiscono D si possono riscrivere separatamente, completando i quadrati.

La prima come $-8 \leq x^2 - 6x + y^2$ o anche aggiungendo 9 a entrambi i membri, come
$1 \leq x^2 - 6x + 9 + y^2$, cioè $1 \leq (x - 3)^2 + y^2$.

La seconda analogamente diventa $x^2 - 4x + y^2 \leq 0$ o anche aggiungendo 4,
$x^2 - 4x + 4 + y^2 \leq 4$, cioè $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$.

I punti dell' insieme D sono quindi i punti esterni al cerchio C_1 di centro $(3, 0)$ di raggio 1 e interni al cerchio C_2 di centro

$(2,0)$ di raggio 2. Dato che C_1 è contenuto in C_2 si ha che Area $(D) =$ Area $(C_2 \setminus C_1) =$ Area $(C_2) -$ Area $(C_1) = \pi(4-1) = 3\pi$, e quindi il volume del solido è 6π.

(13) Calcolare il volume della sfera $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ e dell' ellissoide $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

[Per la sfera usiamo le coordinate sferiche $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, con $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$ con le condizioni a priori $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le condizioni che definiscono V si traducono in $\rho^2 \leq R^2$, quindi tenendo conto delle condizioni a priori abbiamo $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ e il volume è $\int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi = \frac{R^3}{3}\,2\pi\,2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Avremmo potuto usare le coordinate $x = R\rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = R\rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = R\rho\cos(\varphi)$, con $dxdydz = R^3\rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$, dove $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ottenendo lo stesso risultato.

Ciò suggerisce (essendo la sfera un ellissoide con $a = b = c = R$) per il calcolo del volume dell' ellissoide la variante ellissoidale delle coordinate:
$x = a\rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = b\rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = c\rho\cos(\varphi)$, con $dxdydz = abc\,\rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$,
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Il volume risulta allora $abc\int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi = abc\,\frac{1}{3}\,2\pi\,2 = \frac{4}{3}\pi abc.$]

(14) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_V x\,y\,z\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\,;\, x \geq 0\,;\, y \geq 0\,;\, z \geq 0\}$.

[Usiamo le coordinate sferiche $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, con $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$ con le condizioni a priori $0 \leq \rho < \infty$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le condizioni che definiscono V sono $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ e si deve calcolare l' integrale della funzione $\rho^5\sin^3(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$:
$\int_0^1 \rho^5\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,d\vartheta =$
$\frac{\rho^6}{6}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \quad \frac{\sin^4(\varphi)}{4}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \quad \frac{\sin^2(\vartheta)}{2}\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{48}$]

(15) Sia $D = [\,1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\,;\, z \geq 0\,;\, x^2+y^2 \leq 3z^2\,]$ Calcolare il volume di D e l' integrale triplo $\iiint_D z\,dxdydz$

[Usiamo le coordinate sferiche $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, con $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$ con le condizioni a priori $0 \leq \rho < \infty$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le condizioni che definiscono V si scrivono in coordinate polari come $1 \leq \rho^2 \leq 9$, $\rho\cos(\varphi) \geq 0$, $\rho^2\sin^2(\varphi) \leq 3\cos^2(\varphi)$.

La prima dà $1 \le \rho \le 3$, le altre due insieme danno che φ è nel primo quadrante e $\tan(\varphi) \le \sqrt{3}$.

Ne segue che $D = [\,1 \le \rho \le 3\,; 0 \le \vartheta \le 2\pi\,;\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\,]$.

Tenendo conto del determinante jacobiano, nel calcolo del volume si deve integrare la funzione $\rho^2 \sin(\varphi)$, mentre nel calcolo dell' integrale la funzione $\rho^3 \sin(\varphi)\cos(\varphi)$.

Procedendo al calcolo si ha che vol $(D) = \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^3 \rho^2\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\varphi)\, d\varphi = 2\pi \frac{27-1}{3}(-\frac{1}{2}+1) = \frac{26}{3}\pi$,
$\iiint_D z\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^3 \rho^3\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi = 2\pi \frac{81-1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4} = 15\pi$]

NOTA Dai calcoli eseguiti si ottiene che se D è un solido omogeneo la coordinata z del baricentro è $\frac{15\pi}{\frac{26}{3}\pi} = \frac{45}{26}$, e si vede facilmente che le altre due coordinate del baricentro sono nulle, quindi il baricentro ha coordinate $(0, 0, \frac{45}{26})$.

(16) Calcolare l' integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = x\, y^2\, z$ sui domini
$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,;\, x \ge 0\,;\, z \ge 0\,\}$,
$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1\,;\, x \ge 0\,;\, z \ge 0\,\}$

[Per V_1 usiamo le coordinate sferiche $z = \rho\cos(\varphi)$ $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi) d\rho d\varphi d\vartheta$ con le condizioni a priori $0 \le \rho < \infty$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Le condizioni che definiscono V_1 sono $0 \le \rho \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ e si calcola
$\int_0^1 \rho^6 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta) d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi = \frac{2}{105}$.
Il calcolo nel caso del dominio V_2 (che è parte dell' interno dell' ellissoide di equazione $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ di semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 2$, $c = 3$) è analogo, usando la *variante ellissoidale* delle coordinate sferiche, cioè $x = a\,\rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = b\,\rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = c\,\rho\cos(\varphi)$, $dxdydz = abc\,\rho^2\sin(\varphi) d\rho d\varphi d\vartheta$ con le condizioni (a priori per l' interno dell' ellissoide $0 \le \rho < 1$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$, per il nostro dominio V_2:)
$0 \le \rho \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ e si deve calcolare
$ab^2c\, abc \int_0^1 \rho^6 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\vartheta)\cos(\vartheta) d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi = a^2b^3c^2 \frac{2}{105} = \frac{1}{2}\; 8\; 9\, \frac{2}{105} = \frac{72}{105}$.]

(17) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_V e^y\, dxdydz$
dove $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,;\, x \ge 0\,;\, z \ge 0\}$.

[Conviene usare le coordinate sferiche con la colatitudine rispetto all' asse y (cioè considerando $\varphi \in [0, \pi]$ l' angolo con l' asse y), ad esempio con il ruolo di y e z invertito rispetto alle coordinate di solito considerate: $y = \rho\cos(\varphi)$ $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$,

$z = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < \infty$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Nel nostro caso $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Ci si riconduce quindi a calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 d\rho\ \rho \int_0^{\pi} e^{\rho\cos(\varphi)}\rho\sin(\varphi)d\varphi$ $= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho(e^{\rho} - e^{-\rho})\,d\rho = \frac{\pi}{e}$]

(18) Calcolare l' integrale triplo $\iiint_V \frac{y^2}{y^2+z^2}\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 \le 4\,;\, y^2+z^2 \le x^2\,;\, x \ge 0\}$.

[Conviene usare le coordinate sferiche con la colatitudine rispetto all' asse x (cioè considerando $\varphi \in [0,\pi]$ l' angolo con l' asse x): $x = \rho\cos(\varphi)$ $y = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $z = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < \infty$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$. Nel nostro caso le condizioni $1 < x^2+y^2+z^2 \le 4\,;\, x \ge 0$ si traducono in $1 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, mentre $y^2+z^2 \le x^2$ si traduce in $\sin^2(\varphi) \le \cos^2(\varphi)$, cioè (essendo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Inoltre la funzione integranda è $\frac{y^2}{y^2+z^2} = \frac{\rho^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\vartheta)}{\rho^2\sin^2(\varphi)} = \cos^2(\vartheta)$ e l' integrale vale $\int_0^{2\pi}\cos^2(\vartheta)d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\varphi)d\varphi \int_1^2 \rho^2 d\rho = \pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{3}(2^3-1) = \frac{7}{6}\pi(2-\sqrt{2})$]

(19) Calcolare il volume del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2\,;\, z \ge x^2+y^2\}$.

[Benché il solido sia una parte di una sfera piena (intersecata con una parte di spazio limitata da un paraboloide) è difficile esprimere la condizione $z \ge x^2+y^2$ in coordinate sferiche. Passando invece alle coordinate cilindriche ($x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$), le disuguaglianze che definiscono V diventano $\rho^2+z^2 \le 2$, $z \ge \rho^2$. Si ottiene quindi la relazione $\rho^2 \le z \le \sqrt{2-\rho^2}$, che implica $\rho^2 \le \sqrt{2-\rho^2}$, vera per $0 \le \rho \le 1$. Si deve quindi calcolare l' integrale $\int_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\ \rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = 2\pi[\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) - \frac{1}{4}]$.]

(20) Calcolare il volume di V e l' integrale triplo $\iiint_V \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdydz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1\,;\, y^2+z^2 \le 1\}$.

[Il dominio è l' intersezione di due cilindri con assi di simmetria paralleli agli assi z e x. Per il calcolo del volume conviene integrare per strati rispetto all' asse y: $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le y \le 1\,;\, (x,z) \in D_y\}$, dove $D_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-y^2} \le x\,,\, z \le \sqrt{1-y^2}\}$, è un quadrato di lato $2\sqrt{1-y^2}$ e area

$4(1-y^2)$. Si ottiene vol $(V) = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz =$ $\int_{-1}^{1} 4(1-y^2)dy = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.
Per l' integrale triplo, usando coordinate cilindriche rispetto all' asse z di simmetria del primo cilindro ($x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$), le disuguaglianze che definiscono V diventano $0 \le \rho \le 1$, $-\sqrt{1-\rho^2\sin^2(\vartheta)} \le z \le \sqrt{1-\rho^2\sin^2(\vartheta)}$. La funzione integranda in coordinate cilindriche è $\frac{\rho^2\sin^2(\vartheta)}{\rho^2}\rho = \rho\sin^2(\vartheta)$ e si deve quindi calcolare l' integrale $\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\, \rho\sin^2(\vartheta) \int_{-\sqrt{1-\rho^2\sin^2(\vartheta)}}^{\sqrt{1-\rho^2\sin^2(\vartheta)}} dz =$
$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2\sin^2(\vartheta)}\, 2\rho\sin^2(\vartheta)d\rho =$
$\int_0^{2\pi} d\vartheta\, [\,-\frac{2}{3}(1-\rho^2\sin^2(\vartheta))^{\frac{3}{2}}\,]\,|_0^1 =$
$\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}[\,1-(1-\sin^2(\vartheta))^{\frac{3}{2}})\,]\,d\vartheta =$
$\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}[\,1-(\cos^2(\vartheta))^{\frac{3}{2}})\,]\,d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}[\,1-|\cos(\vartheta|)^3\,]\,d\vartheta =$
$\frac{2}{3}[\,2\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(\vartheta))\cos(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\sin^2(\vartheta))\cos(\vartheta)\,d\vartheta\,] =$
$\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}$.]

CURVE E INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE

(1) Data la curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) &= t-1 \\ y(t) &= 1-t^2\,,\ 0\le t\le 1 \\ z(t) &= \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$$
calcolare il versore tangente, la lunghezza di γ e l' integrale curvilineo di prima specie $\int_\gamma e^{(x+1+z)}\,ds$.

[Il vettore velocità è $\mathbf{r}'(t)=(1,-2t,2t^2)$,
la velocità scalare è
$v(t)=\|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{1+4t^2+4t^4}=\sqrt{(1+2t^2)^2}=1+2t^2$,
quindi il versore tangente in funzione di t è
$\mathbf{T}(t)=\frac{1}{1+2t^2}\,(1,-2t,2t^2)=(\frac{1}{1+2t^2},\frac{-2t}{1+2t^2},\frac{2t^2}{1+2t^2})$.
La lunghezza della curva è $l(\gamma)=\int_0^1(1+2t^2)\,dt=\frac{5}{3}$, e infine l' integrale curvilineo vale $\int_\gamma e^{(x+1+z)}\,ds=\int_0^1 e^{t+\frac{2}{3}t^3}(1+2t^2)\,dt=e^{\frac{5}{3}}-1$.]

(2) Calcolare il versore tangente, la lunghezza di γ e gli integrali curvilinei di prima specie $\int_\gamma \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,ds$, $\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\,ds$,
dove γ è la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t)\,,\ \ 0\le t\le 1 \\ z(t) &= t \end{cases}$$

[Il vettore velocità è $\mathbf{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))=(-\sin(t),\cos(t),1)$,
l' elemento di lunghezza è
$ds=\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+1}dt=\sqrt{2}dt.$
Quindi il versore tangente è
$\mathbf{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t),\cos(t),1)=(\frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}},\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.
La lunghezza è
$l(\gamma)=\int_0^1\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}$
e gli integrali curvilinei valgono
$\int_\gamma \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,ds=$
$\int_0^1(\frac{1}{\cos^2(t)+\sin^2(t)+t^2})\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\sqrt{2}\arctan(1)=\sqrt{2}\frac{\pi}{4}$
,
$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\,ds=$
$\int_0^1(\frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)-t^2})}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\sqrt{2}\arcsin(1)=\sqrt{2}\frac{\pi}{2}$]

(3) Calcolare la lunghezza del(la curva cartesiana associata al) grafico della funzione $\quad y = x^{\frac{3}{2}}$, $\quad 0 \le x \le \frac{5}{9}$.

[Il grafico della funzione $y = y(x)$, $a \le x \le b$, corrisponde alla parametrizzazione $x = t$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, cioè si identifica la variabile indipendente con il parametro e in tal caso il vettore velocit à è $\mathbf{r}'(t) = (1, y'(t))$, mentre l' elemento di lunghezza è $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$. Nel nostro caso si ha che $y'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ e l' elemento di lunghezza è
$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$.

Quindi la lunghezza è data dall' integrale
$\int_0^{\frac{5}{9}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$
$(1 + \frac{9}{4}x = t \; ; \; x = \frac{4}{9}t - \frac{4}{9} \; ; \; dx = \frac{4}{9}dt)$
$= \frac{4}{9}\,\frac{2}{3}\,[\,(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\,]\,|_0^{\frac{5}{9}} = \frac{19}{27}$.]

(4) Sia γ il grafico (cioè la curva cartesiana associata al grafico) della funzione $\quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\quad -R \le x \le R$ (grafico della semicirconferenza superiore di raggio R centrata nell' origine). Calcolare la lunghezza di γ e l' integrale curvilineo $\int_\gamma \frac{y}{1+x^2}\, ds$

[Si ha che $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ e l' elemento di lunghezza è $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{1}{1-(\frac{x}{R})^2}}\, dx$, quindi la lunghezza è data dall' integrale
$\int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{1}{1-(\frac{x}{R})^2}}\, dx = (\frac{x}{R} = t \; ; \; dx = R\, dt) = R\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\, dt =$
$R\,[\,\arcsin(1) - \arcsin(-1)\,] = \pi R$
(come ci aspettiamo dovendo essere la lunghezza di tutta la circonferenza $2\pi R$).

L' integrale curvilineo vale
$\int_\gamma \frac{y}{1+x^2}\, ds = \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2-x^2}}{1+x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}} dx =$
$R\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx = R\,(\arctan(R) - \arctan(-R)) = 2R\arctan(R)$
]

(5) Calcolare la lunghezza della curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) & = e^t \cos(t) \\ y(t) & = e^t \sin(t) \end{cases}, \; 0 \le t \le 2$$

[Il vettore velocità è $\; r'(t) = (x'(t), y'(t),) = (e^t \cos(t) - e^t \sin(t), e^t \sin(t) + e^t \cos(t))$. L' elemento di lunghezza è
$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt =$
$[\, e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}\sin^2(t) - 2e^{2t}\sin(t)\cos(t) + e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}\sin^2(t) +$

$2e^{2t}\sin(t)\cos(t)\ ]^{\frac{1}{2}}dt = \sqrt{2e^{2t}}dt = \sqrt{2}e^t dt.$
Quindi la lunghezza è $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}(e^2-1)$.]

(6) Calcolare la lunghezza della curva γ (detta astroide) di equazioni parametriche
$\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

[Il vettore velocità è $r'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$.
L' elemento di lunghezza è
$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|dt = [\ 9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t) =]^{\frac{1}{2}}dt =$
$\sqrt{9\cos^2(t)\sin^(t)\,(\cos^2(t)+\sin^2(t)\,)}\,dt = \sqrt{9\cos^2(t)\sin^(t)}dt =$
$3|\ \sin(t)\cos(t)\,|$.
Quindi la lunghezza è $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 3|\ \sin(t)\cos(t)\,|\,dt = 6$.]

(7) Data la curva γ di equazioni parametriche
$\begin{cases} x(t) &= \int_1^t 2se^{s^2}\cos(s)\,ds \\ y(t) &= \int_1^t 2se^{s^2}\sin(s)\,ds \end{cases}$, $1 \le t \le 2$,
calcolare la curvatura (senza segno) $k(t)$ e la lunghezza $l(\gamma)$ della curva.

[Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $x'(t) = 2te^{t^2}\cos(t)$, $y'(t) = 2te^{t^2}\sin(t)$, la velocità scalare è $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 2te^{t^2}$, il versore tangente è $\mathbf{T}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $\mathbf{T}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, la curvatura è $k(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{v(t)} = \frac{1}{2te^{t^2}}$, la lunghezza è $l(\gamma) = \int_1^2 v(t)dt = \int_1^2 2te^{t^2}dt = e^4 - e$]

(8) Calcolare la lunghezza della curva γ di equazioni parametriche
$\begin{cases} x(t) &= t^5\cos(t) + \int_0^t s^5\sin(s)\,ds \\ y(t) &= t^5\sin(t) - \int_0^t s^5\cos(s)\,ds \end{cases}$, $0 \le t \le 1$

[Per il teorema fondamentale del calcolo integrale
$x'(t) = 5t^4\cos(t) - t^5\sin(t) + t^5\sin(t) = 5t^4\cos(t)$,
$y'(t) = 5t^4\sin(t) + t^5\cos(t) - t^5\cos(t) = 5t^4\sin(t)$,
la velocità scalare è $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 5t^4$,
la lunghezza è $l(\gamma) = \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1$]

INTEGRALI CURVILINEI DI SECONDA SPECIE, FORME DIFFERENZIALI, TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

(1) a) Dire se è chiusa nel suo insieme di definizione D la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$
$[\,2xy + \cos(x)\,]\,dx + [\ x^2 + \sin(y)\,]\,dy$.
b) Dire se ω è esatta in D e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
c) Se γ è una curva regolare che ha come punto iniziale $(0, \frac{\pi}{2})$ e punto finale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ quanto vale $\int_\gamma \omega$?

[Sì, è chiusa, essendo
$\frac{\partial}{\partial y}(\,2xy + \cos(x)\,) = \frac{\partial}{\partial x}(\,x^2 + \sin(y)\,) = 2x$.
Dunque è esatta in $D = \mathbb{R}^2$, perché è chiusa in D e D è un aperto semplicemente connesso.
Le primitive sono le funzioni
$U(x,y) = x^2\,y + \sin(x) - \cos(y) + c$
e si possono trovare con il metodo degli integrali indefiniti:
$U_1(x,y) = \int[\,2xy + \cos(x)\,]\,dx = x^2y + \sin(x) + A(y)$,
con $A(y)$ funzione qualsiasi di y, verifica $\frac{\partial U_1}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$;
$U_2(x,y) = \int[\ x^2 + \sin(y)\,]\,dy = x^2y - \cos(y) + B(x)$,
con $B(x)$ funzione qualsiasi di x verifica $\frac{\partial U_2}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$.

Scegliendo $A(y) = -\sin(y)$, $B(x) = \cos(x)$ (cioè prendendo la parte comune una volta sola e quelle non comuni di U_1 e U_2) si ottiene che $U_1 = U_2$ e chiamando $U(x,y)$ questa funzione ottenuta essa verifica entrambe le condizioni per essere una primitiva e, a meno di costanti, è l' unica primitiva: se $c \in \mathbb{R}$, $U(x,y) + c$ verifica $\nabla U = (P,Q)\ \ldots$
In alternativa si può trovare come prima, integrando solo rispetto a x, che un' eventuale primitiva deve avere la forma $U(x,y) = \int[\,2xy + \cos(x)\,]\,dx = x^2y + \sin(x) + A(y)$, con $A(y)$ da determinarsi, e una tale funzione verifica $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$. Si impone poi che essa verifichi anche $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, nel nostro caso $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \sin(x) + A(y)) = x^2 + A'(y) = x^2 + \sin(y)$, e si ottiene $A'(y) = \sin(y)$, quindi $A(y) = -\cos(y) + c$, e quindi $U(x,y) = x^2\,y + \sin(x) - \cos(y) + c$.

In modo analogo si può integrare rispetto a y ottenendo $U(x,y) = x^2y - \cos(y) + B(x)$, e poi si impone che $\frac{\partial U_1}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$, nel nostro caso $2xy + B'(x) = 2xy + \cos(x)$, che dà $B(x) = \sin(x)$ e infine $U(x,y) = x^2\,y + \sin(x) - \cos(y) + c$.

L' integrale curvilineo, essendo la forma esatta, si può calcolare con la differenza della primitiva nel punto finale e della la primitiva nel punto iniziale: $\int_\gamma \omega = U((\frac{\pi}{2}, \pi)) - U((0, \frac{\pi}{2}))$
$= \frac{\pi^2}{4}\,\pi + \sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\pi) = \frac{\pi^3}{4} + 2.$]

(2) a) Dire se è chiusa nel suo insieme di definizione D la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$
$[\,x + y\,]\,dx + [\,x + y\,]\,dy$.
b) Dire se ω è esatta in D e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
c) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è il grafico dell' arco di parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$

[Sì, è chiusa, essendo $\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial y}(x+y)$.
Dunque è esatta in $D = \mathbb{R}^2$, perché è chiusa in D e D è un aperto semplicemente connesso. Le primitive sono le funzioni
$U(x,y) = xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$ (con il metodo degli integrali indefiniti). Infine γ va da $P_0 = (0,0)$ a $P_1 = (1,1)$, quindi
$\int_\gamma \omega = U((1,1)) - U((0,0)) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$.]

(3) a) Dire se è chiusa nel suo insieme di definizione D la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$
$[\,\frac{2xy^4}{1+x^2y^4} + e^x\,]\,dx + [\,\frac{4x^2y^3}{1+x^2y^4} + \frac{1}{1+y^2}\,]\,dy$.
b) Dire se ω è esatta in D e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
c) Se γ è una curva regolare che ha come punto iniziale $(0,0)$ e punto finale $(1,1)$ quanto vale $\int_\gamma \omega$?

[Sì, è chiusa, essendo $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{4x^2y^3}{1+x^2y^4}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{2xy^4}{1+x^2y^4}) = \frac{8xy^3}{(1+x^2y^4)^2}$.
Dunque è esatta in $D = \mathbb{R}^2$, perché è chiusa in D e D è un aperto semplicemente connesso.
Le primitive sono le funzioni
$U(x,y) = \log(1 + x^2y^4) + e^x + \arctan(y) + c$ (con il metodo degli integrali indefiniti). Infine
$\int_\gamma \omega = U((1,1)) - U((0,0)) = \log(2) + e + \frac{\pi}{4} - 1$.]

(4) Dire se è chiusa nel suo insieme di definizione D la forma differenziale
$\omega(x,y) = \frac{e^x}{1+e^x+y^2}\,dx + \frac{2y}{1+e^x+y^2}\,dy$
b) Dire se ω è esatta in D e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[Sì, è chiusa, essendo $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2y}{1+e^x+y^2}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{e^x}{1+e^x+y^2}) = \frac{-2ye^x}{(1+e^x+y^2)^2}$.
Dunque è esatta in $D = \mathbb{R}^2$, aperto semplicemente connesso. Le primitive sono le funzioni $U(x,y) = \log(1 + e^x + y^2) + c$.]

(5) Data la forma differenziale
$\omega(x,y) = (e^y + \sin(x))\, dx \; + (xe^y + \cos(y))\, dy$
a) Verificare che è chiusa in $\mathbb{R}^2$
b) Dire se è esatta in $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[La forma è chiusa nell' insieme di definizione $D = \mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, dunque è ivi esatta, perché
$\frac{\partial}{\partial x}(xe^y + \cos(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(e^y + \sin(x)) = e^y$.
Le primitive si possono calcolare con il metodo degli integrali indefiniti e sono le funzioni
$U(x,y) = x\, e^y - \cos(x) + \sin(y) + c$]

(6) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x\,[\,1+y\log^2(x)\,]}\, dx + \frac{\log(x)}{2\sqrt{y}\,[\,1+y\log^2(x)\,]}\, dy$
a) Verificare che è chiusa in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
b) Dire se è esatta in A e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
c) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ ha parametrizzazione
$\begin{cases} x &= \sqrt{t} \\ y &= 1 + 3\log(t) \end{cases}, \; 1 \le t \le e$

[$U(x,y) = \arctan(\sqrt{y}\, \log(x)) + c$, $\int_\gamma \omega = U((\sqrt{e}, 4)) - U(1,1) = \frac{\pi}{4}$]

(7) Calcolare $\int_\gamma \left[\left(y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx + \left(\alpha x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dy \right]$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, dove γ un circuito regolare percorso in senso antiorario che racchiude una regione D con area $(D) = 1$.
Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma è esatta in $D = \mathbb{R}^2$.
Per tali valori trovare una primitiva di ω.

[Essendo tutte le funzioni in gioco di classe $C^1(\overline{D})$, per il Teorema di Green l' integrale è pari all' integrale doppio $\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) \right] = \iint_D (\alpha - 1) dxdy = (\alpha - 1)\text{Area}(D) = \alpha - 1$. Se (e solo se) $\alpha = 1$ la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2$, semplicemente connesso, dunque è ivi esatta, e le primitive, che possono essere trovate ad esempio con il metodo degli integrali indefiniti, sono le funzioni $U(x,y) = xy + \sqrt{1 + x^2 + y^2} + c$]

(8) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = 2xy\, e^{x^2 y}\, dx + x^2\, e^{x^2 y} dy$
a) Dire se è chiusa in $\mathbb{R}^2$
b) Dire se è esatta in $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo calcolarne una

primitiva.
c) Se γ è una curva regolare che ha come punto iniziale $(0,0)$ e punto finale $(\sqrt{\frac{3}{2}},2)$ quanto vale $\int_\gamma \omega$?

[La forma è chiusa nel dominio semplicemente connesso $\mathbb{R}^2$, quindi esatta, essendo $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\, e^{x^2 y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy\, e^{x^2 y}\right) = (2x + 2x^3 y)e^{x^2 y}$. Le primitive sono le funzioni
$U(x,y) = e^{x^2 y} + c$, mentre $\int_\gamma \omega = U(\sqrt{\frac{3}{2}},2) - U(0,0) = e^3 - 1$
]

(9) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy$
a) Dire se è chiusa nel suo insieme di definizione $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza unitaria di equazione $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario
c) Dire se è esatta nei seguenti insiemi: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 2, y > -3, (x,y) \neq (0,0)\}$
d) Calcolare $\int_{\gamma_1} \omega$ dove γ_1 è l' ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ percorsa in senso orario
e) Calcolare $\int_{\gamma_2} \omega$ dove γ_2 è la circonferenza di raggio 1 e centro $(2,2)$ di equazione $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ percorsa in senso orario

[La forma è chiusa, essendo
$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
Con la parametrizzazione usuale
$x = \cos(t);\;\; y = \sin(t)\;;\quad ; 0 \leq t \leq 2\pi$
$dx = -\sin(t)dt\;\; ;\;\; dy = \cos(t)dt$
si calcola facilmente l' integrale curvilineo
$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)-\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\,(\cos(t))\, dt = \int_0^{2\pi}\, dt = 2\pi$.
ω non è esatta in D né in B, perché una circuitazione su una curva contenuta in essi non è nulla (e NON perché i domini non sono semplicemente connessi, forme chiuse in domini non semplicemente connessi possono essere o meno esatte).
La forma è invece esatta in A, che è semplicemente connesso.
$\int_{\gamma_1} \omega = -2\pi$ essendo ω chiusa e γ_1 omotopa in D a $-\gamma$, curva opposta a γ.
Infine $\int_{\gamma_2} \omega = 0$ perché $\gamma_2 \subset A$ dove ω è esatta (equivalentemente γ_2 è omotopa a un punto in D)]

(10) Data la forma differenziale $\omega(x, y, z) =$
$[\, 2xy^3z^4 + 2x\,]\, dx + [\, 3x^2y^2z^4 + 2y\,]\, dy + [\, 4x^2y^3z^3 + 2z\,]\, dz$
a) Dire se è chiusa in $\mathbb{R}^3$
b) Dire se è esatta in $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[La forma è chiusa nel dominio semplicemente connesso $\mathbb{R}^3$, quindi esatta, essendo
$\frac{\partial}{\partial x}\,(3x^2y^2z^4 + 2y) = \frac{\partial}{\partial y}\,(2xy^3z^4 + 2x) = 6xy^2z^4$,
$\frac{\partial}{\partial x}\,(4x^2y^3z^3 + 2z) = \frac{\partial}{\partial z}\,(2xy^3z^4 + 2x) = 8xy^3z^3$,
$\frac{\partial}{\partial y}\,(4x^2y^3z^3 + 2z) = \frac{\partial}{\partial z}\,(3x^2y^2z^4 + 2y) = 12x^2y^2z^3$.
Le primitive si possono ottenere con il metodo degli integrali indefiniti, e sono le funzioni
$U(x, y, z) = x^2y^3z^4 + x^2 + y^2 + z^2 + c.$]

(11) Data la forma differenziale $\omega(x, y, z) =$
$[\, 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1\,]\, dx + [\, x^2z - 4xy\,]\, dy + [\, x^2y + 2xz - 2\,]\, dz$
a) Dire se è chiusa in $\mathbb{R}^3$
b) Dire se è esatta in $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[La forma è chiusa nel dominio semplicemente connesso $\mathbb{R}^3$, quindi esatta, essendo
$\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2z - 4xy) = \frac{\partial}{\partial y}\,(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) = 2xz - 4y$,
$\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2y + 2xz - 2) = \frac{\partial}{\partial z}\,(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) = 2xy + 2z$,
$\frac{\partial}{\partial y}\,(x^2y + 2xz - 2) = \frac{\partial}{\partial z}\,(x^2z - 4xy) = x^2$.
Le primitive si possono ottenere con il metodo degli integrali indefiniti, e sono le funzioni
$U(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z + c.$]

(12) Trovare una funzione $g(x, y)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che la forma differenziale
$\omega(x, y, z) = 2x^3\, z\, dx + (2yz + \cos(y))dy + \ g(x, y)dz$
sia chiusa in $\mathbb{R}^3$.
Calcolarne poi la primitiva che vale $2 + \frac{\pi^2}{4}$ nel punto $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$.

[Affinché la forma sia chiusa deve essere $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(2x^3z) = 2x^3$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(2yz + \cos(y)) = 2y$, quindi si può scegliere $g(x, y) = \frac{1}{2}x^4 + y^2$. Con questa scelta la forma è chiusa, essendo verificata anche la relazione $\frac{\partial}{\partial y}(2x^3\, z) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(2yz + \cos(y))$, ed è quindi esatta, essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso. Le primitive si possono trovare con il metodo degli integrali indefiniti, e sono le funzioni della forma $\frac{1}{2}x^4z + y^2z + \sin(y) + c$ con c costante reale.

Imponendo che $U(1, \frac{\pi}{2}, 1) = 2+\frac{\pi^2}{4}$ si ottiene $c = \frac{1}{2}$, quindi la primitiva cercata è la funzione $U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^4z+y^2z+\sin(y)+\frac{1}{2}$.
]

(13) Data la forma differenziale $\omega(x, y) = \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}x\,dx + \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}ydy$ determinare l' insieme di definizione, dire se è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva.

[Il dominio della forma, che si può verificare essere chiusa, è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, che non è semplicemente connesso, e dalla chiusura della forma non si può dedurre la sua esattezza. La forma è comunque esatta.
Infatti la forma data corrisponde a un **campo radiale**, cioè a un campo vettoriale della forma
$\mathbf{F}(x, y) = g(r)\hat{r}$,
dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la norma del vettore (x, y),
$\hat{r} = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ è il versore radiale e
$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.
Tali campi sono conservativi, poiché se G è una primitiva della funzione g si ha che $G(r) = G(\sqrt{x^2 + y^2})$ è una primitiva del campo F, essendo $\nabla G(x, y) = G'(r)\nabla r(x, y) = g(r)(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$.
In questo caso $\mathbf{F}(x, y) = \frac{\log(r)}{r}(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}) = g(r)\hat{r}$, con $g(r) = \frac{\log(r)}{r}$, e quindi una primitiva è $U(x, y) = G(r) = \frac{1}{2}\log^2(r) = \frac{1}{2}\log^2(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{8}\log^2(x^2 + y^2)$]

INTEGRALI DI SUPERFICIE, FLUSSI ATTRAVERSO SUPERFICI ORIENTATE

(1) Calcolare l' area della superficie di Σ, sfera centrata nell' origine di raggio R, di equazione $x^2+y^2+z^2=R^2$.

[Usiamo la parametrizzazione $r(u,v)=\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$

suggerita dalle coordinate sferiche:
$\begin{cases} x &= R\sin(u)\cos(v) \\ y &= R\sin(u)\sin(v) \\ z &= R\cos(u) \end{cases}$, $(u,v)\in D=[\,0\le u\le\pi\ ;\ 0\le v\le 2\pi\,]$.

I vettori derivate parziali rispetto alle variabili parametriche u,v sono $r_u=\begin{cases} x_u &= R\cos(u)\cos(v) \\ y_u &= R\cos(u)\sin(v) \\ z_u &= -R\sin(u) \end{cases}$,
$r_v=\begin{cases} x_v &= -R\sin(u)\sin(v) \\ y_v &= R\sin(u)\cos(v) \\ z_v &= 0 \end{cases}$.

Il loro prodotto vettoriale è
$r_u \wedge r_v = (\,R^2\sin^2(u)\cos(v)\,,\,R^2\sin^2(u)\sin(v)\,,\,R^2\sin(u)\cos(u)\,)$
e si può scrivere come
$r_u\wedge r_v=R^2\sin(u)\quad(\,\sin(u)\cos(v)\,,\,\sin(u)\sin(v)\,,\,\cos(u)\,)$.

Il vantaggio dell' ultima scrittura è che la norma del vettore $(\,\sin(u)\cos(v)\,,\,\sin(u)\sin(v)\,,\,\cos(u)\,)$ è pari a $\sin^2(u)\cos^2(v)+\sin^2(u)\sin^2(v)+\cos^2(u)=1$, quindi esso è il versore normale (esterno perché essendo proporzionale a $\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{cases}$ è diretto nella direzione che dall' origine va ai punti della sfera), e la norma $\|r_u\wedge r_v\|=R^2\sin(u)$.

Ne segue che l' elemento di superficie è $d\sigma=R^2\,\sin(u)\,dudv$, e l' area della sfera sarà data da
$\iint_D R^2\,\sin(u)\,dudv=R^2\int_0^{2\pi}dv\int_0^{\pi}\sin(u)\,du=R^2\,2\pi\,2=4\pi R^2$.
]

(2) Calcolare l' area di Σ e l' integrale di superficie $\iint_\Sigma z\,e^{z^2}d\sigma$, dove Σ è la semisfera superiore di raggio 1, cioè l' insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\ ;\ z\ge 0\}$, esprimendo questa superficie come grafico di una funzione.

[Essendo $z \geq 0$ si può esplicitare z in funzione di x, y ottenendo una superficie cartesiana: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Si ha che $d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
L' area è $\iint_D d\sigma = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi$, mentre l' integrale di superficie è $\iint_\Sigma z\, e^{z^2} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} e^{1-x^2-y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} e^{1-\rho^2} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho e^{1-\rho^2} d\rho = \pi(e - 1)$.

È chiaro che avendo già fatto i calcoli nel precedente esercizio si possono alternativamente usare le equazioni parametriche della (semi)sfera superiore, che coincidono con quelle della sfera con la differenza che $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$: $r = r(u, v)$ con
$x = \sin(u)\cos(v)$, $y = \sin(u)\sin(v)$, $z = \cos(u)$,
$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2\pi$,
$d\sigma = \|r_u \times r_v\| = \sin(u)dudv$
e calcolare prima l' area, con i calcoli fatti prima modificati, che sarà la metà dell'area della sfera completa, come prevedibile, e poi calcolare
$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) e^{\cos^2(u)} \sin(u) du = \pi(e - 1)$]

(3) Calcolare l' area della superficie (tronco di cono) Σ, data dal grafico della funzione $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e l' integrale superficiale $\iint_\Sigma z^2 d\sigma$.

[$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$.
Usando le coordinate polari l' area è
$\iint_D d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{2}\rho\, d\rho = \sqrt{2}\pi$,
mentre l' integrale di superficie è
$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{2}\rho^3\, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$,]

(4) Calcolare l' integrale di superficie $\iint_\Sigma \frac{4\,z}{\sqrt{1+y^2\, e^{(2y^2)}+x^2(1+2y^2)^2 e^{(2y^2)}}}\, d\sigma$, dove Σ è il grafico della funzione $z = g(x, y) = xye^{y^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,;\, x \geq 0\,; y \geq 0\}$

[$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + y^2 e^{2y^2} + x^2(1 + 2y^2)^2 e^{2y^2}}$ e si deve calcolare $\iint_D 4xye^{y^2} dxdy$. In coordinate polari
$\int_0^1 d\rho\, 2\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2 \sin^2(\vartheta)} 2\rho^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) d\vartheta = e - 2$]

(5) Calcolare l' area della superficie cartesiana data dal grafico della funzione $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ al variare di (x, y) in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\}$

[In coordinate polari $\iint_D \sqrt{1 + |\nabla z|^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 \rho\sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{\pi}{12}(2^{\frac{3}{2}} - 1)$]

(6) Calcolare l' integrale di superficie
$\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+e^{2x}\cos^2(ay)+a^2e^{2x}\sin^2(ay)}} d\sigma$
dove Σ è la superficie cartesiana associata al grafico di
$z = g(x, y) = e^x \cos(a\,y)$,
$(x, y) \in D = [0 \leq y \leq \frac{\pi}{2a}\,;\ 0 \leq x \leq \sin(a\,y)]$

[L' elemento di superficie è dato da
$d\sigma = \sqrt{1 + e^{2x}\cos^2(a\,y) + a^2e^{2x}\sin^2(a\,y)}\, dxdy$,
e l' integrale da calcolare è l' integrale doppio
$\iint_D e^x \cos(a\,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos(a\,y) \int_0^{\sin(a\,y)} e^x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (e^{\sin(a\,y)} - 1) \cos(a\,y)\, dy = \frac{1}{a}\,(e - 2)$
]

(7) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x\,,\ -y\,,\ z^2)$ uscente dalla superficie S, frontiera del solido (di rotazione) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2\,e^{z^2}\ ;\ 0 \leq z \leq 1\}$.

[La divergenza del campo è
div $(\mathbf{F})(x, y, z) = 1 - 1 + 2z = 2z$.
Per il teorema della divergenza il flusso è pari all' integrale triplo $\iiint_V 2z dxdydz = 2\pi(e - 1)$
(in coordinate cilindriche $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$; nel nostro caso $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}e^{\frac{z^2}{2}}$) e si deve calcolare
$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz\ 2z \int_0^{\sqrt{2}e^{\frac{z^2}{2}}} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 2z\frac{\rho^2}{2}\,\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}e^{\frac{z^2}{2}}}\ dz =$
$= 2\pi \int_0^1 2ze^{z^2}\, dz = 2\pi\, e^{z^2}\,\Big|_{z=0}^{z=1} = 2\pi(e - 1)$.]

(8) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{x^3}{3}\,,\ \frac{y^3}{3}\,,\ 0)$ uscente dalla superficie S, frontiera di $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

[Per il teorema della divergenza il flusso è pari all' integrale triplo, che si può calcolare in coordinate sferiche,
$\iiint_B (x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3(\varphi) d\varphi = \frac{8}{15}\pi$]

(9) Dato il dominio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le \frac{4}{3}\,;\, x^2+y^2 \le z^2\,;\, 0 \le z \le 1\,\}$, e detta S la sua frontiera, calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x\,z\,,\, -y\,,\, z)$ uscente da S.

[Per il teorema della divergenza il flusso è pari all' integrale triplo (che può essere calcolato in coordinate cilindriche o sferiche) $\iiint_V z dxdydx$.

In coordinate sferiche $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \le \vartheta \le \pi$), $dxdydz = \rho^2\sin(\varphi)d\rho d\varphi d\vartheta$. Nel nostro caso le condizioni sono $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le \min\left(\frac{1}{\cos(\varphi)}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\varphi)} & \text{se } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \text{se } \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$ e si calcola

$\int_0^{2\pi} d\vartheta[\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \sin(\varphi)\cos(\varphi) \int_0^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \rho^3 d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \sin(\varphi)\cos(\varphi) \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \rho^3 d\rho\ ] = \frac{7}{36}\pi$.

In coordinate cilindriche $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, $z = z$, con le condizioni a priori $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $0 \le \vartheta < 2\pi$ (oppure $-\pi \le \vartheta \le \pi$) $dxdydz = \rho d\rho d\vartheta dz$, e nel nostro caso $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le z \le 1$, $0 \le \rho \le \min\left(z, \sqrt{\frac{4}{3} - z^2}\right) = \begin{cases} z & \text{se } 0 \le z \le \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{4}{3} - z^2} & \text{se } \sqrt{\frac{2}{3}} \le z \le 1 \end{cases}$ e si deve calcolare

$\int_0^{2\pi} d\vartheta[\ \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} dz\ z \int_0^z \rho d\rho + \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 dz\ z \int_0^{\sqrt{\frac{4}{3}-z^2}} \rho d\rho\ \ ] = \frac{7}{36}\pi$]

(10) Calcolare il flusso Φ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x\,z\,,\, y\,z\,,\, z)$ attraverso la superficie (laterale) S del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\,,\, 0 \le z \le 4\}$, avente l' orientazione che contiene il versore (normale) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ (applicato in un qualunque punto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, z)$, $0 \le z \le 4$.

[Calcoliamo il flusso in due modi diversi.

PRIMO MODO. Parametrizzando il cilindro con le equazioni $\mathbf{r}(\vartheta, t)$ date da $x = 2\cos(\vartheta)$, $y = 2\sin(\vartheta)$, $z = t$, $(\vartheta, t) \in R = [0, 2\pi] \times [0, 4]$, si ha che al prodotto vettoriale $\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_t = (2\cos(\vartheta), 2\sin(\vartheta), 0)$ corrisponde il versore normale $\mathbf{N}(\vartheta, t) = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), 0)$ che dà l' orientazione considerata (per $0 \le t \le 4$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ il versore normale è $\frac{1}{\|\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_t\|}(\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$). Il flusso è allora $\int_R \mathbf{F}(x(\vartheta, t), y(\vartheta, t), z(\vartheta, t)) \cdot (\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_t)\, d\vartheta\, dt = \int_R 4t\, d\vartheta\, dt = 64\pi$.

SECONDO MODO (*Teorema della divergenza dopo aver "chiuso" la superficie*).

La frontiera del cilindro solido $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le$

$4\,,\, 0 \le z \le 1\}$ orientata con il versore normale esterno è costituita dall' unione del cilindro C con l' orientazione assegnata, del cerchio pieno $D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\, z = 0\}$ con l' orientazione data dal versore $(0, 0, -1)$ ovunque, e del cerchio pieno $D_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\,,\, z = 4\}$ con l' orientazione data dal versore $(0, 0, 1)$ ovunque. Questi due cerchi possono essere considerati domini in $\mathbb{R}^2$ in cui l' integrale di superficie coincide con l' integrale doppio (la parametrizzazione è $x = x, y = y, z = cost$, in modo che l' elemento di area è $dxdy$ e l' integrale di superficie di una funzione $f(x, y, z)$ è pari all' integrale doppio della funzione di due variabili, ad esempio sul cerchio superiore $g(x, y) = f(x, y, 4)$). Inoltre essendo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \pm \mathbf{F}_3 = \pm z$ (con il segno $+$ su D_4, $-$ su D_0), il flusso è nullo sul cerchio D_0, dove $z = 0$, mentre sul cerchio D_4, il flusso vale $\Phi_4 = \int_{x^2+y^2\le 4} 4\, dxdy = 16\pi$.
Per il teorema della divergenza $\Phi + 16\pi = \Phi + \Phi_4 = \iiint_D (2z + 1)\, dxdydz = \int_0^4 dz\, (2z + 1) \int_{x^2+y^2\le 4} dxdy = 80\pi$, e quindi $\Phi = (80 - 16)\pi = 64\pi$.]

(11) Considerata la superficie conica $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\,;\, 0 \le z \le 1\}$, avente l' orientazione uscente dal cono pieno $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2\,;\, 0 \le z \le 1\}$, sia γ la curva che parametrizza il bordo ∂S^+ con l' orientazione indotta. Usando il teorema di Stokes calcolare la circuitazione lungo γ del campo vettoriale
$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + e^{\arctan(x)}\,,\, z + \log(1 + y^2)\,,\, e^{\sin(z)})$

[Il rotore di $\mathbf{F}$ è $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x, y, z) = (\ \partial_y(e^{\sin(z)}) - \partial_z(z+\log(1+y^2))\,, \partial_z(y + e^{\arctan(x)}) - \partial_x(e^{\sin(z)})\,,\, \partial_x(z + \log(1 + y^2)) - \partial_y(y + e^{\arctan(x)})\ ) = (-1, 0, -1)$.
La superficie è la parte del cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ tra le altezze 0 e 1, e può essere parametrizzata come superficie cartesiana data dal grafico di $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $x^2 + y^2 \le 1$, oppure con la parametrizzazione vettoriale $\mathbf{r}(u, v)$ di equazioni $x = v\cos(u)\,,\, y = v\sin(u)\,,\, z = v$, $(u, v) \in D$, con $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le v \le 1\,,\, 0 \le u \le 2\pi\}$.
Usando ad esempio questa parametrizzazione il vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (v\cos(u), v\sin(u), -v)$ dà l' orientazione assegnata (il versore uscente da K ha coordinata z negativa), e per il teorema di Stokes la circuitazione richiesta è pari a
$\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\cdot(\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v))\, dudv = \int_0^1 dv \int_0^{2\pi} du\, (-v\cos(u) + v) = \pi$.]

(12) Considerata la superficie orientata $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, avente l' orientazione data dal versore normale diretto secondo le z crescenti, sia γ la curva che parametrizza il bordo ∂S^+ con l' orientazione indotta.
Date tre funzioni $A, B, C \in C^1(\mathbb{R})$, (verificare che non dipende da A, B, C e) calcolare la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (z + A(x)\,,\, x + B(y)\,,\, y + C(z))$ lungo γ.
a) Usando il teorema di Stokes
b) Direttamente trovando una parametrizzazione di γ.

[a) $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (\,\partial_y(y + C(z)) - \partial_z(x + B(y))\,,\, \partial_z(z + A(x)) - \partial_x(y + C(z))\,,\, \partial_x(x + B(y)) - \partial_y(z + A(x))\,) = (1,1,1)$. La superficie è la parte del piano di equazione $x + y + z = 0$ che interseca il cilindro pieno di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$, e ha come vettore normale $(1,1,1)$ (essendo (a,b,c) normale al piano $ax + by + cz + d = 0$ in ogni suo punto) e versore normale $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Può essere parametrizzata (usando la parametrizzazione cartesiana del piano e usando il cilindro per limitare le coordinate) con la parametrizzazione vettoriale $\mathbf{r}(u,v)$ di equazioni $x = u\,,\, y = v\,,\, z = -u - v$, $(u,v) \in D$, con $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.
Con questa parametrizzazione il vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (1,1,1)$ dà l' orientazione assegnata, e per il teorema di Stokes la circuitazione richiesta è pari al flusso del rotore attraverso S^+, che vale $\iint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v))\,dudv = 3\iint_D dx\,dy = 3\pi$.

b) Il bordo di S è costituito dall' insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$, e ricordando la parametrizzazione cartesiana del piano in termini di u e v, il fatto che $x^2 + y^2 = 1$ si traduce nella parametrizzazione della curva limite nel piano $u\,v$ come $u = \cos(t)$, $v = \sin(t)$. Possiamo quindi parametrizzare la curva nello spazio come la curva γ di equazioni parametriche $x = \cos(t)\,,\, y = \sin(t)\,,\, z = -\cos(t) - \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e l' orientazione che si ottiene è consistente con quella assegnata su S. Inoltre $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, dove $\mathbf{F_1}(x,y,z) = (z\,,\, x\,,\, y)$, $\mathbf{F_2}(x,y,z) = (A(x)\,,\, B(y)\,,\, C(z))$ e $\mathbf{F_2}$ è un campo conservativo, essendo definito in $\mathbb{R}^3$ e ivi irrotazionale. Quindi $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_\gamma \mathbf{F_1}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^{2\pi}(-\cos(t) - \sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) + \sin(t)(\sin(t) - \cos(t))\,dt = 3\pi$.

Osservazione. Si ricordi che la parametrizzazione γ dà l' orientazione positiva su ∂S, indotta dall' orientazione data su S dal versore normale $\mathbf{N}$, se detto $\mathbf{T}_\gamma$ il versore tangente a γ in un punto $P \in \partial S$, $\mathbf{T}_S$ il versore in P che appartiene al piano tangente a S, punta verso l' esterno di S ed è perpendicolare a $\mathbf{T}_\gamma$, si ha che $\mathbf{N} = \mathbf{T}_S \times \mathbf{T}_\gamma$ (informalmente " un osservatore diretto secondo il versore normale $\mathbf{N}$ che percorre la curva nel verso positivo vede la superficie S alla sua sinistra").]

(13) Considerata la porzione della sfera di raggio 2 data dalla superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,;\, z \geq 0\}$, avente l' orientazione data dal versore esterno alla sfera, sia γ la curva che parametrizza il bordo ∂S^+ con l' orientazione indotta.
Calcolare l' area di S, il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x,y,z) = (xz\,,\, yz\,,\, 0)$ uscente da S e la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2\,,\, x^2\,,\, y^2)$ lungo γ.

[Essendo $z \geq 0$ si può esplicitare z e ottenere la superficie cartesiana $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ avente per bordo orientato la circonferenza $x^2+y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$ percorsa in senso antiorario.
Si ha che $\mathbf{r}_x(x,y) \times \mathbf{r}_y(x,y) = (\,\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,,\, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,,\, 1\,)$, l' elemento di area è $\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$ e l' area vale $\iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy =$ (in coordinate polari)
$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho = 4\pi(2-\sqrt{3})$.
Il flusso è dato dall ' integrale doppio
$\iint_D \mathbf{G}(x,y,z(x,y))\cdot(\mathbf{r}_x(x,y) \times \mathbf{r}_y(x,y))\, dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy = \frac{\pi}{2}$.
La circuitazione può essere calcolata usando la parametrizzazione $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \sqrt{3}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e si ottiene $\int_0^{2\pi} [\,3(-\sin(t)) + \cos^2(t)\cos(t) + \,]\, dt = 0$.
In alternativa, usando il teorema di Stokes, si ha che $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (\,2y\,,\, 2z\,,\, 2x\,)$, $\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \cdot (\mathbf{r}_x(x,y) \times \mathbf{r}_y(x,y)) = \frac{2xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + 2y + 2x$, che integrato sul dominio D dà 0.]

(14) Considerata la superficie orientata $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, avente l' orientazione data dal versore diretto verso le z crescenti, sia γ la curva che parametrizza il bordo ∂S^+ con l' orientazione indotta.
Calcolare l' area di S, il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (z\,,\, -x^2\,,\, 2zy)$ attraverso S^+, e la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.

[Dalle relazioni che definiscono S si deduce che $z = y$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$ e si può quindi parametrizzare S come $x = u\,;\, y = v\,;\, z = v$, $(u,v) \in D$ con $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+2v^2 \leq 1\}$ ellisse piena di semiassi 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nel piano $u\,v$ (ma l' insieme S

che si considera è invece un cerchio pieno nello spazio, come intersezione di una sfera piena e un piano). Con questa parametrizzazione $\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) = (0,-1,1)$ è diretto secondo l' orientazione assegnata, e $\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\| = \sqrt{2}$.
L' area è quindi $\sqrt{2}\iint_D dudv = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\pi = \pi$ (come prevedibile, il cerchio, come la sfera, ha raggio 1).
Il flusso si calcola analogamente come $\iint_D \mathbf{F}(u,v,v)\cdot\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_d udv = \iint_D (u^2+2v^2)dudv$. Usando coordinate ellittiche $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos(\vartheta)$, $dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}}d\rho d\vartheta$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, si ottiene $2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi$.
Si ha poi che $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (2z,1,-2x)$, e per il teorema di Stokes la circuitazione è pari a $\iint_D \mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dudv = \iint_D (-1-2u)\, dudv = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$.
La circuitazione può essere calcolata anche direttamente parametrizzando γ come $x = \cos(t)$, $y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)$, $0 \le t \le 2\pi$ $\dots$]

(15) Considerata la superficie orientata $S^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, avente l' orientazione data dal versore diretto verso le z crescenti, calcolare l' area di S e la circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (z\,,\,x\,,\,y)$ lungo γ, la curva che parametrizza il bordo ∂S^+ con l' orientazione indotta.
Trovare poi parametrizzazioni di S^+ e ∂S^+ .

[L' intersezione di una sfera piena con un piano passante per il centro è un cerchio di raggio pari al raggio della sfera, in questo caso 1, quindi l' area è π. Il versore normale al piano è $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, mentre il rotore di $\mathbf{F}$ vale $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (1,1,1)$. Ne segue che il flusso del rotore con questa orientazione è pari a $\int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \sqrt{3}\int_S\, d\sigma = \sqrt{3}$ Area (S) $= \sqrt{3}\pi$.
Volendo vederlo più in dettaglio e trovare parametrizzazioni di S^+ e ∂S^+ si può procedere ad esempio così.
Il versore normale al piano è $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Completandolo con vettori che diano una base ortonormale si possono ad esempio (tra molte scelte) scegliere i versori $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. La matrice che ha per colonne questi vettori applicata alle nuove coordinate u,v,w relative a questa base fornisce le coordinate originarie, ed è una matrice ortogonale con determinante 1, non cambia dunque l' orientazione. Quindi le formule di cambio di coordinate sono
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w,\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w,\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w.$
Rispetto a queste coordinate si ha che $x + y + z = \sqrt{3}w$,

$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Si può quindi parametrizzare S con le equazioni precedenti con $w = 0$, al variare di u, v nel cerchio di raggio 1, cioè considerare la parametrizzazione

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v$, $z = -\frac{2}{\sqrt{6}}v$

$(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Si può allora verificare che $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, l' elemento di area è $d\sigma = dudv$ e quindi l' area della superficie è data da π, area del cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$ nel piano uv.

Infine una parametrizzazione positiva di ∂S^+ si ottiene dalla parametrizzazione precedente, parametrizzando in modo standard il bordo ∂D del dominio dei parametri, che è la circonferenza di raggio 1:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)$, $z = -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Osservazione. Una trasformazione lineare ortogonale $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con determinante 1 conserva le norme, i volumi, le aree di superfici, le lunghezze, le orientazioni ... Quindi sapendo che esiste una trasformazione ortogonale con determinante 1 che porta una base ortonormale $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{N}$ nella base canonica, si può (come abbiamo fatto inizialmente) dedurre anche senza calcolare esplicitamente le formule di cambiamento di coordinate, che nelle coordinate (u, v, w) relative a questa base valgono le relazioni $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$, mentre $x+y+z = 0$, cioè $\mathbf{N} \cdot (x, y, z) = 0$ si esprime come $w = 0$, dopodiché si può lavorare direttamente nelle variabili u, v, w dove le condizioni sono particolarmente semplici, e descrivono il cerchio all' altezza $w = 0$ il cui bordo è l' equatore percorso in senso antiorario ...]

FUNZIONI IMPLICITE, MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

(1) Data l' equazione $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,1)$ un' unica funzione $y = y(x)$ con $y(0) = 1$
b) Mostrare che $x = 0$ è un punto critico di $y(x)$
c) Determinare la natura di tale punto critico

[In questo esempio non sarebbe necessario utilizzare il Teorema di Dini, perché vicino al punto $(0,1)$ (dove la y è positiva e quindi la radice si prende con il segno positivo) si può esplicitare la y in funzione della x ottenendo $y = y(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$, da cui si vede anche che $x = 0$ è punto di massimo di tale funzione.

Tuttavia ignoriamo questa nostra conoscenza per mostrare come, data un' equazione $G(x,y) = 0$ e un punto iniziale (x_0, y_0) in cui le ipotesi del teorema di Dini siano verificate, si possa calcolare nel punto iniziale x_0 non solo il valore della funzione "esplicita" ma anche le sue derivate.

Le derivate parziali sono $G_x(x,y) = 2x$, $G_y(x,y) = 2y$, e $G(0,1) = 0$, $G_x(0,1) = 0$, $G_y(0,1) = 2$. Si può quindi esplicitare localmente $y = y(x)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{G_x(0,1)}{G_y(0,1)} = 0$.
Il valore della derivata si può anche ricavare derivando l' equazione $G(x,y) = 0$, tenendo presente che $y = y(x)$, e questo metodo ci darà poi anche le derivate successive della $y(x)$ nel punto x_0. Si parte quindi dalla relazione
$x^2 + y^2(x) - 1 = 0.$
Derivando (pensando ora $y = y(x)$ funzione di x) si ottiene
$2x + 2yy' = 0.$
Ponendo $x = 0$, $y = y(0) = 1$ si ricava
$y'(0) = 0.$
Derivando ancora si ottiene
$2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$
e ponendo $x = 0, y = y(0) = 1$, e (avendolo ricavato prima) $y' = y'(0) = 0$ si ottiene
$y''(0) = -1.$
Essendo $y'(0) = 0$, $y''(0) < 0$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo (stretto) per la funzione $y = y(x)$.

In modo analogo se si parte invece dal punto $(0,-1)$ si ottiene localmente una funzione $y(x)$ che ha in $x = 0$ un minimo relativo stretto (ovviamente anche in questo caso, in questo particolare esempio, la funzione $y = y(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$ si può ricavare subito esplicitamente)]

(2) Data l' equazione $G(x,y) = xy + \log(xy) - 2x + 1 = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (1,1)$ un' unica funzione $y = y(x)$ con $y(1) = 1$
b) Mostrare che $x = 1$ è un punto critico di $y(x)$
c) Determinare la natura di tale punto critico

[Le derivate parziali di G sono $G_x(x,y) = y + \frac{1}{x} - 2$, $G_y(x,y) = x + \frac{1}{y}$; si ha che $G(1,1) = 0$, $G_x(1,1) = 0$, $G_y(1,1) = 2$. Si può quindi esplicitare localmente $y = y(x)$ con $y(1) = 1$, $y'(1) = -\frac{G_x(1,1)}{G_y(1,1)} = 0$.
Il valore della derivata si può anche ricavare derivando l' equazione $G(x,y(x)) = 0$, tenendo presente che $y = y(x)$, si ottiene $y + xy' + \frac{y+xy'}{xy} - 2 = y + xy' + \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} - 2 = 0$ e per $x = 1$, $y = y(1) = 1$ si ha $y'(0) = 0$. Derivando ancora si ottiene $y' + y' + xy'' - \frac{1}{x^2} + \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0$ e ponendo $x = 1, y(1) = 1, y'(0) = 0$ si ottiene il valore $y''(0) = \frac{1}{2}$. Ne segue che il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo (stretto) per la funzione $y = y(x)$.
]

(3) Data l' equazione $G(x,y) = \sin(y)\cos(x) + y - e^x + x^2 + 1 = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,0)$ un' unica funzione $y = y(x)$ con $y(0) = 0$
b) Calcolare derivate prima e seconda di $y(x)$ nel punto $x = 0$
c) Calcolare il $\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - \frac{1}{2}x}{\sin(x)\log(1+x)}$

[$G(0,0) = 0$, $G_x(0,0) = -1$, $G_y(0,0) = 2$, quindi localmente si può esplicitare $y = y(x)$ e $y'(0) = -\frac{G_x(0,0)}{G_y(0,0)} = \frac{1}{2}$. Alternativamente si può trovare il valore della derivata in 0 derivando l' equazione $G(x,y(x) = 0$ rispetto a x, tenendo presente che $y = y(x)$. Derivando ancora si trova infine che $y''(0) = -\frac{1}{2}$. Posto $a(x) = y(x) - \frac{1}{2}x$, $b(x) = \sin(x)\log(1+x)$, essendo $a(0) = b(0) = a'(0) = b'(0) = 0$, usando il teorema di L' Hospital si trova che $\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - \frac{1}{2}x}{\sin(x)\log(1+x)} = \frac{a''(0)}{b''(0)} = \frac{y''(0)}{2} = -\frac{1}{4}$
]

(4) Data l' equazione $G(x,y) = \int_0^y e^{t^2}\,dt - e^x + xy^2 + x + 1 + 2\int_0^x \arctan(t)\,e^t\,dt = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,0)$ un' unica funzione $y = y(x)$ con $y(0) = 0$
b) Mostrare che $x = 0$ è un punto critico di $y(x)$
c) Determinare la natura di tale punto critico

[Le derivate parziali di G sono $G_x(x,y) = -e^x + y^2 + 1 + 2\arctan(x)e^x$, $G_y(x,y) = e^{y^2} + 2xy$, $G(0,0) = 0$, $G_x(0,0) = 0$, $G_y(0,0) = 1$. Si può quindi esplicitare localmente $y = y(x)$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{G_x(0,0)}{G_y(0,0)} = 0$.
Il valore della derivata si può anche ricavare derivando l' equazione $G(x, y(x)) = 0$, tenendo presente che $y = y(x)$, si ottiene $e^{y^2}(x)y'(x) - e^x + y^2(x) + 2xy(x)y'(x) + 1 + 2\arctan(x)e^x = 0$ e per $x = 0$, $y = y(0) = 0$ si ha $y'(0) = 0$.
Derivando ancora e ponendo $x = y(0) = y'(0) = 0$ si ottiene il valore $y''(0) = -1$. Ne segue che il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo (stretto) per la funzione $y = y(x)$.]

(5) Data l' equazione $G(x,y,z) = y^3 - x^2 - z^2 + e^{xz} - 1 = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,1,1)$ un' unica funzione $z = z(x,y)$ con $z(0,1) = 1$ e calcolare le derivate parziali $z_x(0,1)$, $z_y(0,1)$
b) Il Teorema di Dini è applicabile per esplicitare localmente $y = y(x,z)$ in un intorno del punto $Q = (0,0,0)$?
c) Si può esplicitare localmente $y = y(x,z)$ in un intorno del punto $Q = (0,0,0)$?

[a) $\nabla G(x,y,z) = (-2x + ze^{zx}, 3y^2, -2z + xe^{zx})$, $\nabla G(0,1,1) = (1,3,-2)$, quindi si può esplicitare localmente $z = z(x,y)$ con $z(0,1) = 1$ e $z_x(0,1) = -\frac{G_x(0,1,1)}{G_z(0,1,1)} = \frac{1}{2}$, $z_y(0,1) = -\frac{G_y(0,1,1)}{G_z(0,1,1)} = -\frac{3}{2}$
b) No, perché $G_y(0,0,0) = 0$. Tuttavia le ipotesi del Teorema di Dini sono solo sufficienti per poter esplicitare, infatti in questo caso
c) sì, è possibile esplicitare $y = \sqrt[3]{x^2 + z^2 - e^{xz} + 1}$]

(6) Data l' equazione $G(x,y,z) = x\,y\,z + e^{x+y+z} + \sin[\frac{\pi}{2}(x-y-z)] - e^{3z} = 0$ mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (1,1,1)$ un' unica funzione $z = z(x,y)$ con $z(1,1) = 1$ e calcolare le derivate parziali $z_x(1,1)$, $z_y(1,1)$.

[$z_x(1,1) = \frac{1+e^3}{2e^3-1} = z_y(1,1)$]

(7) (Dopo aver verificato che il vincolo $G(x,y) = \log(1+x^2) + \arctan(y^2) - \frac{\pi}{4} = 0$ è un vincolo regolare e l' insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 0\}$ è compatto) trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = y$ sull' insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = \log(1+x^2) + \arctan(y^2) \leq \frac{\pi}{4}\}$.

[Essendo $\nabla f(x,y) = (0,1)$ non ci sono punti critici interni. Il vincolo è regolare, essendo $\nabla G = (0,0)$ in $(0,0)$ non

appartenente al vincolo. Inoltre è chiuso ed è limitato, perché $\log(1+x^2) \leq \frac{\pi}{4}$, $\arctan(y^2) \leq \frac{\pi}{4}$, quindi, essendo le funzioni log e arctan funzioni crescenti e invertibili si ha che $(1+x^2) \leq e^{\frac{\pi}{4}}$, $(y^2) \leq \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ e allora $|y| \leq 1$, $|x| \leq \sqrt{e^{\frac{\pi}{4}} - 1}$.
Studiando il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 0 & = \lambda \frac{2x}{1+x^2} \\ 1 & = \lambda \frac{2y}{1+y^4} \\ \log(1+x^2) + \arctan(y^2) & = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

si osserva che $\lambda\,,\ y \neq 0$, quindi $x = 0$.

Dal vincolo si ricava $\arctan(y^2) = \frac{\pi}{4}$, quindi $y^2 = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ e allora $y^2 = 1$, $y = \pm 1$.
I punti critici vincolati sono allora i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Calcolando la funzione $f(x, y) = y$ in tali punti si ha che $f(0, 1) = 1$, $f(0, -1) = -1$ e si deduce che il punto $(0, 1)$ e il punto $(0, -1)$ sono rispettivamente il punto di massimo e il punto di minimo assoluto, con i valori 1 e -1.]

(8) Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione
$f(x, y, z) = x^2 + y^2$
sull' insieme (compatto) S definito dai vincoli
$g_1(x, y, z) = 2\,x + 2\,y + z = 0, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

[I vincoli sono regolari, poiché i gradienti $\nabla g_1(x, y, z) = (2, 2, 1)$ e $\nabla g_2(x, y, z) = (2x, \frac{1}{2}y, 0)$ sono linearmente dipendenti solo se $x = y = 0$ e nessun tale punto soddisfa il vincolo g_2. Il sistema di Lagrange ha la forma

$$\begin{cases} 2x & = 2\lambda + 2\mu x \\ 2y & = 2\lambda + \frac{1}{2}\mu y \\ 0 & = \lambda \\ 2\,x + 2\,y + z & = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Si ottiene subito $\lambda = 0$, e analizzando le prime due equazioni del sistema si vede che ci sono 4 casi, a seconda che x e y si annullino o meno; è impossibile che $x = y = 0$, per l' ultima equazione, ed è impossibile anche che $x \neq 0\,,\ y \neq 0$, perché sarebbe $\mu = 1$, $\mu = 4$. Rimangono quindi due possibilità, $y = 0, x \neq 0$, che conduce dalle ultime due equazioni ai punti $(\pm 1, 0, \mp 2)$ di minimo assoluto, con valore 1, oppure $x = 0, y \neq 0$, che conduce dalle ultime due equazioni ai punti $(0, \pm 2, \mp 4)$ di massimo assoluto, con valore 4.]

(9) Trovare, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 - z^2$ sull' insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

[I punti critici interni sono i punti di coordinate $(0, y, 0)$, $|y| < 1$, nei quali la funzione vale 0 (non saranno massimi né minimi assoluti, si vede peraltro subito che sono punti di sella). Il massimo assoluto è 1, ed è assunto nei punti $(\pm 1, 0, 0)$, Il minimo assoluto è -1, ed è assunto nei punti $(0, 0, \pm 1)$, gli altri punti critici vincolati sono i punti $(0, \pm 1, 0)$ nei quali la funzione vale 0 .]

(10) Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x + y^2$
sull' insieme (compatto) S definito dal vincolo
$g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$.

[Essendo $\nabla f(x, y) = (1, 2y)$ non ci sono punti critici interni.
Studiando sul bordo il sistema di Lagrange $\begin{cases} 1 & = \lambda\, 2x \\ 2y & = \lambda\, 2y \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$
si osserva che λ, $x \neq 0$, $x = \frac{1}{2\lambda}$. Se $y \neq 0$ segue che $\lambda = 1$, quindi $x = \frac{1}{2}$ e dal vincolo si ottiene $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se invece $y = 0$ dal vincolo si ottiene $x = \pm 1$. Nei punti $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ la funzione vale $\frac{5}{4}$ e saranno i punti di massimo assoluto, nei punti $(\pm 1, 0)$ la funzione vale rispettivamente ± 1, il punto $(-1, 0)$ sarà il punto di minimo assoluto.]

(11) Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^4 + y^4$ sull' insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$.

[Il minimo assoluto è 0, assunto nei punti $(0, 0, z)$ con $|z| \leq \sqrt{3}$, il massimo assoluto è 9, assunto nei punti $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$.
Gli altri punti critici vincolati, che anche se a posteriori non sono estremi assoluti sono <u>da esaminare</u> per determinare gli estremi assoluti, sono i punti $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ con tutte le combinazioni possibili di segno, in tali punti la funzione vale $\frac{9}{2}$.]

(12) Fissato $\alpha > 0$, trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull' insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = \alpha\,,\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Dedurre la
disuguaglianza media geometrica / media aritmetica:
dati $x, y, z \geq 0$ si ha che $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

[Il vincolo è compatto essendo chiuso e limitato ($0 \leq x, y, z \leq \alpha$). Esistono dunque massimo e minimo assoluto per il Teorema di Weierstrass. Il minimo assoluto si trova subito, è 0 ed è assunto nei punti con almeno una coordinata nulla. Se troviamo

un solo punto critico vincolato, con coordinate tutte non nulle esso sarà dunque il massimo assoluto. Il sistema di Lagrange ha la forma $\begin{cases} yz &= \lambda \\ xz &= \lambda \\ xy &= \lambda \\ x+y+z &= \alpha \end{cases}$ Escludendo i casi in cui $\lambda = 0$ e una almeno tra le coordinate è nulla si trova che $yz = xz = xy$ con tutte le coordinate positive, quindi $x = y = z = \frac{\alpha}{3}$.
Ne segue che il massimo è $(\frac{\alpha}{3})^3$, assunto nel punto $(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$ e, essendo $\alpha = x + y + z$, si deduce la disuguaglianza $xyz \leq (\frac{x+y+z}{3})^3$ per ogni $x, y, z \geq 0$, equivalente a $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

Osservazione La disuguaglianza si generalizza a $n \geq 1$ termini: dato $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, dati $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, vale la *disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica*:
$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$]

SERIE NUMERICHE

(1) Stabilire il carattere, e calcolare la somma se convergente, della serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n 2^n}{3^n}$

[Il termine generale $\frac{1+(-1)^n 2^n}{3^n} = (\frac{1}{3})^n + (-\frac{2}{3})^n$ è la somma di termini generali di due serie geometriche, di ragioni $\frac{1}{3}$ e $-\frac{2}{3}$ entrambe comprese tra -1 e 1. Ne segue che la serie converge e la somma ($\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1$) è
$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$]

(2) Determinare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{n})^n$

[La serie è a termini positivi e il termine generale non è infinitesimo, essendo $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \neq 0$, quindi la serie non converge non essendo rispettato il criterio necessario.]

(3) Determinare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

[La serie è a termini positivi e il termine generale è infinitesimo, essendo $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2} = \lim_{n\to\infty}[\,(1-\frac{1}{n})^n]^n = (\frac{1}{e})^{+\infty} = 0$. Inoltre applicando il criterio della radice si ha che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\{[\,(1-\frac{1}{n})^n]^n\}^{\frac{1}{n}} =$
$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} < 1$, quindi la serie converge.]

(4) Determinare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

[La serie è a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto si ha, se $a_n = \frac{n!}{n^n}$, che
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)\,(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(\,\frac{n+1}{n}\,)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$.
Dato che $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ si ha che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$, quindi la serie converge.]

(5) Determinare il carattere della serie numerica
$\sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})$

[La serie è a termini positivi e il termine generale è infinitesimo, perché $b_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \to 0$ per $n \to \infty$. Inoltre essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(b_n)}{b_n} = 1$, la serie si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ che converge perché (essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+3)} = 1$) il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n^2}$, con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.]

(6) Trovare i numeri reali x per i quali la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n \sin^n(x)$ converge, e per tali x calcolare la somma della serie.

[È una serie geometrica di ragione $-2\sin(x)$, converge se $2|\sin(x)| < 1$, cioè se $-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, e per tali x converge a $s(x) = \frac{1}{1+2\sin(x)}$]

(7) Determinare in funzione del parametro $\alpha > 0$ il carattere della serie numerica: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \sin^2(\frac{1}{n^3})\,[\,1 - \cos(\,\frac{1}{n}\,)\,]$

[La serie è a termini positivi, ed essendo
$\lim_{n\to\infty} n^8 \sin^2(\frac{1}{n^3})(1-\cos(\frac{1}{n})) = \frac{1}{2}$
il termine generale
$n^{\alpha-8} n^8\,[\sin^2(\frac{1}{n^2})\,[\,1-\cos(\,\frac{1}{n}\,)\,)\,] = \frac{1}{n^{6-\alpha}}\sin^2(\frac{1}{n^2})\,[\,1-\cos(\,\frac{1}{n}\,)$
è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{2}\frac{1}{n^{8-\alpha}}$.
{ Equivalentemente se $\alpha \geq 8$ il termine generale non tende a zero, e la serie non converge, mentre per la formula di Taylor se $\alpha < 8$ si ha che $1-\cos(\,\frac{1}{n}) = 1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, $\sin^2(\frac{1}{n^2}) = (\,\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\,)^2 = \frac{1}{n^6} + o(\frac{1}{n^6})$, quindi $n^\alpha \sin^2(\frac{1}{n^3})[\,1 - \cos(\,\frac{1}{n}\,)\,] = n^\alpha\,[\frac{1}{2}\frac{1}{n^8} + o(\frac{1}{n^8})\,] = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{8-\alpha}} + o(\frac{1}{n^{8-\alpha}})$. }

Per il criterio di confronto asintotico la serie converge se e solo se $8-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 7$.]

(8) Studiare in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:
$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha + \cos(n^\alpha)}$

[Se $\alpha \leq 0$ non converge non essendo rispettato il criterio necessario di convergenza a zero del termine generale $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha+\cos(n^\alpha)}$. Se $\alpha > 1$ converge assolutamente per confronto (e confronto asintotico), essendo ad esempio $|a_n| \leq \frac{1}{n^\alpha - 1}$, con $\frac{1}{n^\alpha-1}$ asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n^\alpha}$. Se $0 < \alpha \leq 1$ non converge assolutamente, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz (la crescenza del denominatore in funzione di $n \geq 1$, può essere verificata osservando che la derivata della funzione $g(x) = x^\alpha + \cos(x^\alpha)$ è $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,(1-\sin(x^\alpha)) \geq 0$ se $x > 0$.
]

(9) Studiare la convergenza delle serie:
$\sum_{n=1}^{+\infty}[\,\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n}\,]$, $\sum_{n=1}^{+\infty}[\,\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}\,]$

[La serie è a termini positivi, e usando l' identità $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ il termine generale della prima serie si può scrivere come $\frac{2n}{n(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}$ asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$, quindi la

serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.
Analogamente il termine generale della seconda serie si può scrivere come $\frac{1}{(\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ asintoticamente equivalente a $\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, e quindi la serie converge per confronto con la serie armonica generalizzata di termine generale $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.]

(10) Determinare in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie numerica: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha [\, e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2\,]$

[È una serie a termini positivi, e si ha che $n^\alpha[e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2] = n^\alpha[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - 2 + o(\frac{1}{n^2})] = \frac{1}{n^{2-\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2-\alpha}})$.
Si ha quindi che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha[e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2]}{\frac{1}{n^{2-\alpha}}} = 1$, e per il criterio di confronto asintotico la serie converge se e solo se $\alpha < 1$ perché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge se e solo se $2 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.]

(11) Studiare convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n[\, e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{-1}{n}}\,]$

[Per il criterio di confronto asintotico la serie non converge assolutamente, perché $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{-1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} - (1 - \frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$, e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ diverge.
La serie converge però semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo la successione $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{-1}{n}}$ positiva, infinitesima e decrescente ($\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, quindi $\frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1}$, $e^{\frac{1}{n}} \geq e^{\frac{1}{n+1}}$, $-e^{\frac{-1}{n}} \geq -e^{\frac{-1}{n+1}}$.)]

(12) Studiare la convergenza delle serie:
$\sum_{n=1}^{+\infty}[\, \sqrt[3]{n^3+1} - n\,]$, $\sum_{n=1}^{+\infty}[\sqrt[3]{n^3+n} - n]$

[Si può usare l' identità $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ e scrivere per la prima serie $[\, \sqrt[3]{n^3+1} - n\,] = \frac{[\,\sqrt[3]{n^3+1}-n]}{1} = \frac{n^3+1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2} \leq \frac{1}{3n^2}$ e quindi la serie converge. Analogamente per la seconda $[\,\sqrt[3]{n^3+n} - n\,] = = \frac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}$ da cui si evince che il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{3n}$ e la serie diverge. In alternativa si arriva alle stesse conclusioni utilizzando lo sviluppo di Taylor $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(\frac{1}{x})$ per $x \to 0$: $\sqrt[3]{n^3+1} - n = n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}} - n = n(1 + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})) - n = \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$, mentre $\sqrt[3]{n^3+n} - n = n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - n = n(1+\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})) - n = \frac{1}{3n}+o(\frac{1}{n}))$.]

(13) Studiare la convergenza delle serie:
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$
[Usando il criterio della radice ($a_n \geq 0$), calcoliamo nel primo caso $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1$, e quindi la serie diverge. Nel secondo caso $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1$ e quindi la serie converge.]

(14) Studiare la convergenza delle serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$
[Scrivendo $(n+1)! = (n+1)\,n!$, $(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n$, calcoliamo nel primo caso $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)\,n!}{(n+1)(n+1)^n}\frac{n^n}{2^n\,n!} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1$ e quindi la serie converge per il criterio del rapporto . Nel secondo caso abbiamo $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)\,n!}{(n+1)(n+1)^n}\frac{n^n}{3^n\,n!} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$ e quindi la serie diverge.]

(15) Studiare convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n + \arctan(e^n)}{n^2\log(n+1)}$

[Il termine generale è $(-1)^n a_n + b_n$, dove $a_n = \frac{n}{n^2\log(n+1)} = \frac{1}{n\log(n+1)}$, $b_n = \frac{\arctan(e^n)}{n^2\log(n+1)}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge perché $0 \leq b_n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$, mentre $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ diverge assolutamente ($\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n+1)} = +\infty$ ad es. per confronto con un integrale improprio), ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz ($\frac{1}{n\log(n+1)}$ è infinitesima e decrescente).
In conclusione la serie converge semplicemente (come somma di serie convergenti) e non converge assolutamente (come somma di serie una assolutamente divergente e una assolutamente convergente: $|\frac{(-1)^n n+\arctan(e^n)}{n^2\log(n+1)}| \geq \frac{1}{n\log(n+1)} - \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2\log(n+1)}$) .]

(16) Studiare convergenza semplice e assoluta in funzione del parametro $x > 0$ della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log(x))^n}{n^2}$

[Il termine generale $a_n = \frac{(\log(x))^n}{n^2}$ tende a zero per $n \to \infty$ solo se $|\log(x)| \leq 1$, $-1 \leq \log(x) \leq 1$, cioè se $\frac{1}{e} \leq x \leq e$. Ne segue che se $0 < x < \frac{1}{e}$ oppure $x > e$ la serie non converge.
Inoltre $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(|\log(x)|)}{\sqrt[n]{n^2}}$ tende a $|\log(x)|$.
Per il criterio della radice se $|\log(x)| < 1$, cioè $\frac{1}{e} < x < e$ la serie converge assolutamente.
Rimane da vedere cosa accade nei punti $\frac{1}{e}$, e. Sostituendo nei punti $x = \frac{1}{e}$, $x = e$, si vede che anche in tali punti la serie converge assolutamente, perché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log(\frac{1}{e}))^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log(e))^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$]

(17) Studiare convergenza semplice e assoluta delle serie
a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n}{3n^2+5}$
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n^2+3n)\,\sin(\frac{1}{n})}{3n^2+5}$
c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))$
d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} b^n (1+\frac{1}{n})^{n^2}$, con $b>0$
e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n! 3^n}$

[a) Diverge, a_n non tende a zero; b) Diverge, cfr.asint. con $\sum \frac{2}{3n}$; c) Diverge assolutamente, perché $1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ asintoticamente si comporta come $\frac{1}{2n}$, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo $1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ positiva, infinitesima e decrescente; d) La radice n-esima del termine generale è $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} b\,(1+\frac{1}{n})^n \to b\,e$. Per il criterio della radice se $b > \frac{1}{e}$ la serie non converge, mentre converge se $0 < b < \frac{1}{e}$. Se $b = \frac{1}{e}$ e la serie converge, perché $\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \leq 1$, quindi $\frac{1}{n^2}(\frac{1}{e})^n(1+\frac{1}{n})^{n^2} = \frac{1}{n^2}(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e})^n \leq \frac{1}{n^2}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. e) Converge per il criterio del rapporto, essendo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)(\frac{n+1}{n})^n \frac{1}{n+1} \frac{3^n}{3^{n+1}} \to \frac{e}{3} < 1$]

(18) Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}]$ converge, e che la sua somma coincide con $\gamma = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)]$.
Nota: La costante γ è detta *costante di Eulero- Mascheroni* e una sua approssimazione con quattro decimali è $\gamma = 0.5772$.

[Si ha che $\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ e quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Inoltre la somma parziale n-esima di questa serie è $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}(\log\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1) - \log(k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)$, e quindi $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}] = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)]$.]

(19) Sia $\{a_n\}$ una successione tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente.
Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Mostrare con un controesempio che se la convergenza della serie non è assoluta non è detto che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converga.

[Per il criterio necessario $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, quindi definitivamente $|a_n| \leq 1$ e quindi $a_n^2 \leq |a_n|$. Per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.
Se la convergenza non è assoluta l' implicazione non è vera in

generale. Ad esempio se $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz, ma la serie di termine generale $a_n^2 = \frac{1}{n}$ è la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.]

(20) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni tali che le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergono.
Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n$ converge assolutamente.

[Utilizzando la disuguaglianza $|ab| = |a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, si ha che $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, e per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$, che converge (avendo come termine generale la somma dei termini generali di serie convergenti) converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n\, b_n|$.]

SERIE DI POTENZE

Ricordiamo che una SERIE DI POTENZE (centrata in 0) è una serie numerica con un parametro $x \in \mathbb{R}$ della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$, dove b_n è una successione reale. Una caratteristica di una tale serie è che esiste $R \in [0, +\infty]$ (numero non negativo, o $+\infty$), detto *raggio di convergenza della serie* tale che:
a) se $R = 0$ la serie converge solo per $x = 0$;
b) se $R = +\infty$ la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;
c) se $0 < R < +\infty$ la serie converge assolutamente per $-R < x < R$ e non converge se $|x| > R$. Nei punti $x = \pm R$ dipende da caso a caso e se richiesto bisogna analizzare questi casi limite.
Se esistono i seguenti limiti, il raggio di convergenza è dato da
$R = [\,\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\,]^{-1}$ (criterio della radice) o
$R = [\,\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}\,]^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}\,]$ (criterio del rapporto) ,
con l' intesa che $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.
Si noti che nei limiti compaiono gli inversi dei limiti che compaiono nei criteri della radice e del rapporto per serie numeriche. Infatti se cerchiamo ad esempio con il criterio della radice (considerazioni del tutto analoghe per il criterio del rapporto) gli x tali che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^n$ converge assolutamente, essendo $a_n = |b_n x^n| = |b_n||x|^n$ il termine generale della serie dei moduli, siamo ricondotti a studiare il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n||x|^n}$ = (se esiste il limite) $|x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$
e la serie converge se $|x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} := R$, cioè se $x \in (-R, R)$, dove R è il raggio di convergenza definito in precedenza.
In ogni caso in ognuno dei seguenti esercizi si può interpretare la domanda come "trovare i punti x per cui la serie converge assolutamente", e se ad es. la risposta è $R = 4$ significa che la serie converge assolutamente per $-4 < x < 4$, non converge se $|x| > 4$, mentre nei punti $x = \pm 4$ bisogna studiare i singoli casi.

(1) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{4n}\, n!}{n^n}\, x^n$

[$R = e^{-3}$, si può trovare usando il criterio del rapporto: $\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{4n} n!}{e^4 e^{4n}(n+1)n!} \frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{e^4} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{e^4} = \frac{1}{e^3}$]

(2) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (\, n\, \sin(\frac{1}{2\,n})\,)^n\, x^n$

[$R = 2$, si può trovare usando il criterio della radice: $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,\sin(\frac{1}{2\,n})} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\sin(\frac{1}{2\,n})} = 2$]

(3) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n\, n^n\,(\,e^{\frac{1}{n}} - 1)\,)^n\, x^n$

[$R = \frac{1}{2}$, criterio della radice]

(4) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,3^n}{4^n+n^2}\, x^n$

[$R = \frac{4}{3}$, criterio del rapporto]

(5) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2)^n\,[\ \log(1+\frac{1}{2n})\ \,]^n\,[\ \sin(\frac{3}{n})\ \,]^n\, x^n$

[$R = \frac{2}{3}$, criterio della radice]

(6) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)!}{n!\,n^n}\, x^n$

[$R = \frac{e}{4}$, criterio del rapporto]

(7) Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n\, x^n$

[$R = +\infty$, si può usare il criterio della radice; essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(n)}{n}} = e^0 = 1$, risulta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0_+$.]

(8) Studiare in funzione dei parametri $q \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica: $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\ \left[\sin(\frac{1}{n})\right]^\alpha$

[Se $|q| > 1$ non converge perché il termine generale $a_n \not\to 0$, se $|q| < 1$ converge assolutamente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, se $q = 1$ converge (assolutamente essendo a termini positivi) se e solo se $\alpha > 1$, se $q = -1$ converge assolutamente se $\alpha > 1$, mentre per il criterio di Leibniz converge semplicemente se $0 < \alpha \leq 1$]

(9) a) Discutere convergenza e convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^2+n}$ in funzione di $x \in \mathbb{R}$.
b) Nel caso di $x = -1$ trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che la somma parziale n-esima approssimi la somma della serie con un errore $\leq \frac{1}{10}$.

[Converge assolutamente se $|x| < 1$, non converge se $x = 1$ oppure $|x| > 1$, converge semplicemente ma non assolutamente se $x = -1$ per il criterio di Leibniz.

In quest' ultimo caso l' errore è maggiorato dal primo termine trascurato, $\frac{1}{n+2}$, e $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{10}$ se $n+2 \geq 10$, $n \geq 8$]

(10) Determinare, in funzione di $\alpha \geq 0$, il raggio di convergenza della serie di potenze $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha \log n}\right)^{n^2} \; x^n$

[$R = 1$ se $\alpha \geq 1$, $R = +\infty$ se $0 \leq \alpha < 1$: usando il criterio della radice si calcola $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n^\alpha \log n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1 - \frac{1}{n^\alpha \log n})^{n^\alpha \log n}]^{\frac{n}{n^\alpha \log n}} =$ (formalmente) $\begin{cases} (\frac{1}{e})^{+\infty} = 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < 1 \\ = (\frac{1}{e})^0 = 1 & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$
]

(11) Sviluppare in serie di Mac Laurin (cioè in serie di Taylor attorno a $x = 0$) la funzione $f(x) = \log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$ specificando il raggio di convergenza e la eventuale convergenza agli estremi dell' intervallo di convergenza.

[Per le proprietà del logaritmo si ha che $\log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) = \frac{1}{2}[\log(1+x) - \log(1-x)]$, e ricordando gli sviluppi $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, valido per $-1 < x \leq 1$, $-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, valido per $-1 \leq x < 1$ si ottiene lo sviluppo, valido per $-1 < x < 1$ (che ovviamente dà raggio di convergenza $R = 1$) : $\log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}$]

(12) Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ specificando il raggio di convergenza e la eventuale convergenza agli estremi dell' intervallo di convergenza.

[Si ha che $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, e decomponendo in fratti semplici $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} == \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$. Ricordando lo sviluppo $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, valido per $-1 < x < 1$, si ottiene anche che $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ se $-2 < x < 2$, e quindi $\frac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})x^n$ se $-1 < x < 1$.]

(13) Data la serie di potenze $\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\, 2n + \frac{2}{(n-1)!}\,)x^{2n}$,
dire per quali x converge e per tali valori calcolare la somma della serie.

[Dallo sviluppo $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, che implica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} := f(x)$, valido per $-1 < x < 1$, derivando termine a termine (è lecito per la convergenza totale, quindi uniforme, della serie e delle serie derivate in ogni compatto contenuto nell'

intervallo $(-1,1)$) si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n\,x^{2n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} 2n\,x^{2n-1} = xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$.
Analogamente dallo sviluppo $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n = e^x$, che implica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{2n} = e^{x^2} := g(x)$, valido per $x \in \mathbb{R}$, si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)!}\,x^{2n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n)!}\,x^{2n-1} = xg'(x) = 2x^2e^{x^2}$. Ne segue che la somma della serie, che converge per $-1 < x < 1$, è $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n + \frac{1}{(2n-1)!})x^{2n} = xf'(x) + xg'(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + 2x^2e^{x^2}$.]

(14) Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$,
dire per quali x converge e per tali valori calcolare la somma della serie.

[Se $-1 < x < 1$ vale lo sviluppo $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ (che si ottiene integrando da 0 a x lo sviluppo $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1^n)t^{2n}$). Si può integrare termine a termine (cosa lecita per la convergenza totale, quindi uniforme, della serie in ogni compatto contenuto nell' intervallo $(-1,1)$). Si ottiene che $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}dt = \int_0^x \arctan(t)\,dt =$ (per parti) $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = x\arctan(x) - \log(\sqrt{1+x^2})$.
Quindi la somma della serie è $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, e in realtà lo sviluppo vale per $-1 \le x \le 1$. Infatti in $[-1,1]$ la convergenza della serie è totale, quindi uniforme, perché $\sum_{n=1}^{+\infty}\sup_{|x|\le 1}|\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n-1)} < +\infty$ per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Per continuità la somma della serie ha la stessa forma anche per $x = \pm 1$, e si ha in particolare che $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \arctan(1) - \log(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2)$]

(15) Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\,n^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$,
a) trovare il raggio di convergenza in funzione di β, discutere la convergenza agli estremi dell' intervallo di convergenza b) nel caso di $\beta = -1$ calcolare la somma della serie

[Il raggio di convergenza è $R = 1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^\beta}$ per ogni scelta di β, quindi la serie converge assolutamente per ogni $x \in (-1,1)$. Se $\beta \ge 0$ la serie non converge agli estremi, non è verificato il criterio necessario di convergenza. Se $\beta < -1$ la serie converge in entrambi gli estremi Se invece $-1 \le \beta < 0$ la serie non converge nel punto $x = 1$ (ha la forma di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = -\beta \le 1$) mentre converge per il criterio di Leibniz nel punto $x = -1$ (assume la forma $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = -\beta > 0$).

Nel caso di $\beta = -1$ la serie, che per quanto visto converge in $[-1, 1)$, converge a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ (ricordando lo sviluppo $-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ che si ottiene integrando da 0 a x, con $-1 \leq x < 1$ lo sviluppo $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$).
In particolare si ottiene la relazione $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\log(2)$]