Analisi Matematica 3
Corso di laurea in Matematica
Diario delle lezioni 2016-17

27-09-2016

Struttura vettoriale euclidea dello spazio $\mathbb{R}^N$. Dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma euclidea e distanza.
Spazi con prodotto scalare, normati, metrici, inclusioni tra di essi.
Nozioni topologiche e loro proprietà in $\mathbb{R}^N$ (in spazi metrici): punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione di un insieme, intorno di un punto, insiemi aperti e chiusi, chiusura di un insieme.
Successioni in spazi metrici e loro limiti, relazione tra chiusura di un insieme e successioni, caratterizzazione dei chiusi con le successioni.
Successioni di Cauchy, spazi metrici completi. Sottoinsiemi di spazi metrici completi sono chiusi se e solo se sono completi.
Definizione di limiti e funzioni continue tra spazi metrici, in particolare funzioni $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, punto all' infinito di $\mathbb{R}^N$ e relative definizioni di limite.
Insiemi convessi e stellati in spazi vettoriali, curve continue in aperti di $\mathbb{R}^N$, insiemi aperti connessi (per archi) in $\mathbb{R}^N$.
Sottosuccessioni, insiemi compatti (per successioni).

29-09-2016

Successioni in $\mathbb{R}^N$, disuguaglianze tra componenti e norma euclidea, limiti per componenti, esempi.
Limiti, derivate e integrali (per componenti) di una funzione vettoriale di una variabile reale definita su un intervallo, esempi.
Teorema di Bolzano-Weierstrass (in $\mathbb{R}^N$ K è compatto se e solo se è chiuso e limitato).
Teorema (immagini continue di compatti sono compatte), che ha come Corollario il Teorema di Weiesrtrass sull' esistenza di punti di massimo e minimo assoluto per funzioni a valori reali definite su un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico.
Uniforme continuità di funzioni tra spazi metrici, Teorema di Heine-Cantor (uniforme continuità di funzioni continue su compatti).
Primi cenni operativi sul metodo di calcolo delle derivate parziali di funzione scalare di più variabili, esempi ed esercizi.

Primi esempi di calcolo di limiti di funzioni di due variabili.
Richiami sulle coordinate polari nel piano, uso in negativo per la non esistenza del limite, difficoltà. Limite uniforme rispetto alla variabile angolare, uso "in positivo" per il calcolo dei limiti.

Osservazione: La grande quantità di materiale teorico delle prime lezioni (con dimostrazioni dei teoremi principali) è dovuta al fatto che gli studenti hanno già in parte studiato queste nozioni e teoremi nel corso di Analisi matematica 2, e studieranno in dettaglio la topologia nel corso parallelo di Geometria 3.

Completeremo in lezioni successive questi richiami e approfondimenti sulla topologia di $\mathbb{R}^N$ con altre nozioni e teoremi relativi alla connessione e compattezza.

4-10-2016

Definizione delle derivate parziali e direzionali per funzioni di più variabili. Vettore gradiente. Esempi.

Esempi di funzioni dotate di derivate parziali ma non continue in un punto, necessità di una nozione più forte.
Definizione di differenziabilità per funzioni reali di variabile reale, equivalenza con la nozione di derivabilità.
Definizione astratta di differenziabilità di una funzione reale di più variabili reali come possibilità di una "linearizzazione locale", definizione di differenziale di una funzione in un punto come operatore lineare $T = T_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
Teorema sulle condizioni necessarie di differenziabilità e conseguente rappresentazione del differenziale di una funzione (come operatore lineare) attraverso la matrice riga che corrisponde al vettore gradiente e definizione equivalente di differenziabilità.

6-10-2016

Significato geometrico della direzione del gradiente (se non nullo) come direzione di massima crescita locale.

Piano (iperpiano) tangente al grafico di una funzione differenziabile di due (N) variabili in un punto.

Teorema del differenziale totale (condizione sufficiente di differenziabilità). Funzioni di classe $C^1(A)$, A aperto in $\mathbb{R}^N$.

Teorema di Lagrange o del valor medio per funzioni scalari di più variabili.
Primi esempi delle difficoltà per determinare continuità e differenziabilità per alcune funzioni.

11-10-2016

Funzioni vettoriali di più variabili reali $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, derivabilità parziale, vettori derivate parziali (per componenti come sempre con le funzioni a valori in $\mathbb{R}^N$).
Matrice jacobiana $J_f(x)$ di una funzione derivabile parzialmente a valori vettoriali. Definizione (astratta e concreta come nel caso scalare)

di funzione differenziabile.
Differenziale $f'(x) = df(x) = Df(x)$ come operatore lineare $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ rappresentato nelle basi canoniche dalla matrice jacobiana.
Norma euclidea di una matrice (una tra molte definizioni possibili, identificando una matrice $M \times N$ a un punto di $\mathbb{R}^{NM}$).
Teorema di differenziabilità di una funzione composta.

Conseguenze del teorema di differenziabilità delle funzioni composte: regola "della catena" per il calcolo delle derivate parziali di $g \circ f$ quando $f : A \subseteq \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^N$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $f(A) \subseteq B$. Casi particolari, caso particolare importante in cui $P = M = 1$, esempi vari.
Esercizi sulla continuità e differenziabilità di una funzione di due variabili. Disuguaglianze di Young.

13-10-2016

Teorema (disuguaglianza) del valor medio per funzioni vettoriali.
Derivate direzionali seconde, in particolare derivate parziali seconde, di funzioni scalari di più variabili reali, varie notazioni. Matrice hessiana di una funzione scalare di più variabili. Funzioni due volte differenziabili in A e di classe $C^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^N$.

Teorema sul calcolo delle derivate direzionali seconde attraverso la matrice hessiana.
Teorema di Schwarz di inversione dell' ordine di derivazione per funzioni due volte differenziabili, in particolare per funzioni di classe $C^2(A)$.

Richiami sulle forme quadratiche. Forma quadratica associata ad una matrice simmetrica A. Differenziale secondo come applicazione bilineare, o forma quadratica.
Formule di Taylor del (primo e) secondo ordine per una funzione di classe $C^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^N$: resto in forma di Lagrange e resto in forma di Peano.

18-10-2016

Esercizi sull' applicazione delle disuguaglianze di Young alla determinazione della continuità e differenziabilità di una funzione.

Forme definite positive (negative), semidefinite positive (negative), indefinite. Diagonalizzabilità tramite trasformazioni ortogonali di matrici simmetriche. Criteri per le forme diagonali, criteri in $\mathbb{R}^2$. Minori principali, criterio di Sylvester.

Massimi e minimi relativi liberi (interni). Condizione necessaria del primo ordine per estremi (Teorema di Fermat in più dimensioni).
Condizioni necessarie del secondo ordine.
Condizioni sufficienti del secondo ordine basate sul segno della matrice

hessiana. Difficoltà della determinazione nel caso di matrici semidefinite, criterio basato sulla semidefinitezza in un intorno. Esempi.

20-10-2016

Continuità e derivabilità di integrali su un intervallo compatto dipendenti da parametri.
Derivata delle funzioni del tipo $g(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$. Caso degli integrali impropri, necessità di una funzione maggiorante integrabile.

Curve parametriche continue in $\mathbb{R}^N$ (in spazi metrici o topologici), archi continui, sostegno, punto iniziale e finale di archi continui.
Giustapposizione (o prodotto) di curve, poligonali, curva opposta.
Equivalenza delle nozioni topologiche di connessione e connessione per archi per aperti A di $\mathbb{R}^N$. Connessione per spezzate con lati paralleli agli assi di un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$.

25-10-2016

Conseguenza della connessione per spezzate di un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$: una funzione che ha derivate parziali nulle in un connesso è costante.
Componenti connesse di un aperto A di $\mathbb{R}^N$.

Complementi sulla compattezza in spazi metrici. Teorema sul numero di Lebesgue di un ricoprimento aperto di un insieme compatto in uno spazio metrico.
Teorema di caratterizzazione della compattezza in spazi metrici.

Funzioni di una variabile a valori vettoriali: limiti, derivate, integrali, derivata di un prodotto scalare o vettoriale.

Ortogonalità della derivata di una funzione vettoriale con norma costante alla funzione stessa, disuguaglianza tra norma di un integrale e integrale della norma.

Curve regolari e regolari a tratti. Curve semplici, curve chiuse, curve di Jordan.
Versore tangente.
Cambio regolare di parametro, curve equivalenti (equiverse o controverse), possibilità di scegliere $[0,1]$ come intervallo del parametro.
Esempi, circonferenza, ellisse, segmenti, rette, eliche ....

27-10-2016

Lunghezza di una poligonale inscritta ad una curva, curve rettificabili e definizione di lunghezza.
Esempio di una curva continua non rettificabile.

Additività rispetto al dominio dei parametri della funzione lunghezza. Teorema di rettificabilità delle curve di classe C^1, calcolo della lunghezza mediante l' integrale $L(\gamma) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\, dt\|$ se $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^M$ è una parametrizzazione della curva regolare γ. Estensione a curve regolari a tratti.

Lunghezza di curve e integrali curvilinei di prima specie di funzioni scalari continue su curve di classe C^1 a tratti. Esempi di calcoli di lunghezze ed integrali curvilinei.
Significato fisico degli integrali curvilinei di prima specie interpretando la funzione integranda come densità (di massa o qualcos' altro) rispetto alla lunghezza, densità lineare di un filo. Baricentro di un filo.

Ascissa curvilinea per curve regolari, parametrizzazione naturale o rispetto alla lunghezza d' arco. Versore normale principale di una curva regolare (avente vettore derivato del versore tangente non nullo) e curvatura (senza segno). Calcolo della curvatura in parametrizzazioni qualunque.

3-11-2016

Decomposizione del vettore accelerazione in una componente tangenziale e una componente normale.

Cenni sulla curvatura con segno di una curva piana regolare: scelta del versore normale e conseguente formula $\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$.

Integrali curvilinei di seconda specie di campi vettoriali su curve C^1 a tratti. Linguaggio delle forme differenziali, forme differenziali come applicazioni a valori nel duale di $\mathbb{R}^N$. Campi conservativi (forme esatte). Primitive di un campo (forma). Due primitive di una stessa forma differiscono per una costante in un connesso.
Teorema sul calcolo di un integrale di una forma esatta come differenza tra il valore di una primitiva nel punto finale e il valore nel punto iniziale della curva.
Teorema che dà una condizione necessaria e sufficiente per l' esattezza di una forma in termini di circuitazioni (integrali su curve chiuse) e di indipendenza dal cammino a parità di valore iniziale e finale di una curva.
Forme di classe C^1 chiuse (campi irrotazionali). Teorema che dà una condizione necessaria di esattezza di una forma (il fatto di essere una forma chiusa).

Esempio di una forma chiusa, non esatta nel suo insieme di definizione, ma esatta in un sottodominio: $\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ (sostanzialmente il differenziale della funzione argomento).

Definizione intuitiva di omotopia di curve chiuse in un insieme E (aperto connesso), curve omotope in E.

Enunciato del Teorema di invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme di classe C^1 chiuse in E su curve omotope in E.
Definizione di insieme semplicemente connesso.
Teorema che afferma che la chiusura di una forma è condizione necessaria e sufficiente per l' esattezza in un dominio semplicemente connesso.
Metodo degli integrali indefiniti per il calcolo delle primitive di una forma.

8-11-2016

Dimostrazione del Teorema sulla locale esattezza di forme chiuse, primitive di una forma chiusa su un rettangolo (N- dimensionale).
Omotopia di curve chiuse in un insieme E (aperto connesso), curve omotope in E, insiemi semplicemente connessi.
Dimostrazione del Teorema di invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme di classe C^1 chiuse in E su curve omotope in E (dimostrazione nel caso generale usando il numero di Lebesgue di un ricoprimento aperto di un quadrato nel piano) e del conseguente Teorema: la chiusura di una forma è condizione necessaria e sufficiente per l' esattezza in un dominio semplicemente connesso.
Commenti ed esercizi sul teorema di invarianza per omotopia degli integrali di forme chiuse.
Campi radiali o centrali, primitive di questi campi.
Definizione di integrale doppio di una funzione su un rettangolo. Decomposizioni di rettangoli, somme superiore e inferiore di una funzione limitata. Integrale superiore e inferiore. Integrabilità di una funzione limitata su un rettangolo, integrale doppio. Interpretazioni geometriche e fisiche, densità superficiale di massa di un corpo piano, baricentro o centro di massa.
Condizione necessaria e sufficiente di integrabilità.
Proprietà degli integrali doppi (additività, monotonia etc.).
Integrabilità delle funzioni continue.
Formule di riduzione su rettangoli.

10-11-2016

Definizione degli insiemi di misura (bidimensionale) nulla secondo Peano-Jordan. Esempi: punti, segmenti, curve regolari.
Teorema: il grafico di una funzione integrabile $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha misura nulla. Proprietà degli insiemi di misura nulla (sono contenuti nella loro frontiera, che ha anche misura nulla etc.)
Teorema di integrabilità di funzioni limitate su un rettangolo Q, e continue in $Q \setminus N$, dove N ha misura bidimensionale nulla.
Definizione di integrabilità e di integrale su Ω di una funzione limitata $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dove Ω è un insieme limitato del piano.

Insiemi limitati misurabili secondo Peano-Jordan, misura di un tale insieme. Caratterizzazione attraverso la misura nulla della frontiera.
Equivalenza della definizione precedente di misura nulla di A con la misurabilità di A e la misura 0 di tale insieme. Proprietà degli insiemi misurabili.
Domini semplici rispetto a un asse nel piano, loro misurabilità, integrabilità su di essi di una funzione continua.
Formule di riduzione per insiemi semplici.

15-11-2016

Esercizi sulle formule di riduzione per domini semplici. Circuiti nel piano, funzioni di classe $C^1(T)$, T sottoinsieme non aperto di $\mathbb{R}^N$.

Teorema di Green, dimostrazione nel caso di un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi.

Applicazioni al calcolo di aree, esempi. Dimostrazione dell' equivalenza di chiusura ed esattezza per forme differenziali di classe C^1 in aperti semplicemente connessi del piano.

Teorema della divergenza e fondamentale del calcolo in $\mathbb{R}^2$. Integrazione per parti.

17-11-2016

Enunciato del teorema della funzione inversa in $\mathbb{R}^N$ (sarà dimostrato in seguito). Diffeomorfismi di classe C^1 (cambi o trasformazioni regolari di coordinate) tra due aperti D, E del piano. Determinante jacobiano come fattore di ingrandimento locale delle aree.

Enunciato del Teorema di cambio di variabili per integrali doppi.

(*Osservazione* La dimostrazione completa del teorema di cambio di variabili in un integrale N-plo sarà svolta nelle ultime lezioni).

Esempi su cambi di variabili suggeriti dalle funzioni integrande e/o dalla forma del dominio.

Coordinate polari: sono diffeomorfismi a meno di insiemi di misura nulla. Calcolo del determinante jacobiano e formula di integrazione in coordinate polari. Esempi di determinazione della descrizione di un insieme in coordinate polari, nota la descrizione in coordinate cartesiane.

22-11-2016

Integrali doppi impropri, definizione di integrabilità impropria (assoluta) di funzioni continue su insiemi aperti Ω (eventualmente non limitati). Metodo di integrazione impropria (assoluta) con successioni di compatti che invadono Ω, non dipende dalla successione scelta.

Esempi delle funzioni $\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$, integrabili in $B_1((0,0))$ se $\alpha < 2$, integrabili in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1((0,0))$ se $\alpha > 2$.
Calcolo dell' integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ usando gli integrali doppi.

Integrali tripli di funzioni limitate su un parallelepipedo: somme superiori e inferiori, integrale inferiore e superiore, definizione di integrabilità di una funzione limitata. Integrabilità delle funzioni continue. Estensione di tutte le definizioni date per gli integrali doppi al caso tridimensionale, e in generale N-dimensionale: misurabilità di insiemi, integrali di funzioni su insiemi misurabili, formule di riduzione etc. Integrazione per fili e per strati su domini semplici di $\mathbb{R}^3$.

Cambiamento di variabili negli integrali tripli, determinante jacobiano di un cambio regolare di variabili (diffeomorfismo di classe C^1).

24-11-2016

Formula di integrazione in coordinate cilindriche. Solidi di rotazione, esempi vari.

Formula di integrazione in coordinate sferiche o polari nello spazio, variante per l' ellissoide. Esempi vari.

Cenni alle coordinate polari o sferiche in $\mathbb{R}^N$, $N > 3$.

Introduzione al problema delle funzioni implicite. Descrizione di oggetti 1-dimensionali in $\mathbb{R}^2$ come grafici di funzioni $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, come immagini di parametrizzazioni regolari (sostegno di curve regolari), e come insiemi di livello di funzioni di due variabili, esempio della circonferenza.

Definizione di funzione definita implicitamente come luogo degli zeri di una funzione di due variabili.

Enunciato e dimostrazione del Teorema di Dini o della funzione implicite in 2 dimensioni.

29-11-2016

Teorema delle funzioni implicite, caso generale di funzione
$\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$.

Dimostrazione che non fa uso del teorema delle contrazioni e che, modulo varie complicazioni tecniche, discusse in dettaglio, assomiglia a quella del caso $n = m = 1$.

1-12-2016

Formulazione equivalente del teorema delle funzioni implicite in cui non sono le ultime m variabili ad essere esplicitate: se il rango della matrice jacobiana di $\mathbf{F} : O \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ è m, pari al massimo rango possibile, allora il luogo degli zeri di F è localmente il grafico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dove $n = N - m$: m variabili si scrivono in funzione delle rimanenti $n = N - m$.

Teorema della funzione inversa, dimostrazione a partire dal teorema delle funzioni implicite.

Esempi di determinazione delle derivate delle funzioni esplicite la cui esistenza è garantita dal teorema generale, nei casi $N = 2$, $n = m = 1$

(curve), $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$ (superfici in $\mathbb{R}^3$) e nel caso di due vincoli in $\mathbb{R}^3$ (curve nello spazio descritte da due vincoli, come intersezione di superfici regolari: $N = 3$, $n = 1$, $m = 2$, S descritta con due equazioni $G_1(x, y, z) = 0$, $G_2(x, y, z) = 0$ con i vincoli indipendenti, cioè $\nabla G_1(P)$, $\nabla G_2(P)$ linearmente indipendenti.).

Concetto di sottovarietà S di dimensione n e codimensione m in $\mathbb{R}^N$ ($n + m = N$). Descrizioni localmente equivalenti come luogo degli zeri di una funzione $\mathbf{F} : O \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ con matrice jacobiana di rango massimo m, o come immagine di una parametrizzazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, \ldots, u_n) : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ con matrice jacobiana di rango massimo n.

Spazio tangente a S in P come insieme dei vettori derivati di curve di classe C^1 con sostegno in S che passano per P. Spazio normale in P come complemento ortogonale dello spazio (vettoriale) tangente.

6-12-2016

Descrizione dello spazio normale a una varietà S come generato dai vettori
$\nabla G_1(P), \ldots \nabla G_m(P)$ se S è descritta tramite le equazioni
$G_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ dove i vincoli sono indipendenti.

Descrizione dello spazio tangente a S in $P = \mathbf{r}(u)$ se S è descritta tramite le parametrizzazioni $x_i = x_i(u_j)$, $i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots k$: immagine del differenziale $\mathbf{r}'(u_0)$ identificato alla matrice jacobiana che ha per colonne i vettori $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j}$, $j = 1, \ldots k$, vettori che quindi generano lo spazio tangente.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per lo studio dei massimi e minimi vincolati e di massimi e minimi su compatti con bordo regolare.

Richiami sulle successioni di funzioni. Serie di funzioni reali di variabile reale. Convergenza puntuale, uniforme e totale e loro relazioni. Esempi e controesempi.

Spazio di funzioni continue con la norma uniforme, così chiamata perché la convergenza di una successione in questa norma equivale alla convergenza della successione di funzioni considerata.

13-12-2016

Dimostrazione del Teorema di cambio di variabili in un integrale multiplo.

Discussione di alcuni esercizi assegnati in precedenza.

15-12-2016

Dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, discussione di alcune conseguenze.