Diario delle lezioni 2019-20
Analisi Matematica 2 per Chimica (9 CFU)

NOTA. A causa del numero limitato di ore le dimostrazioni sono ridotte al minimo, ma alcune dimostrazioni elementari e importanti sono svolte nelle ore di lezione.

1-10-2019

Richiami sugli integrali. Generalità sulle equazioni differenziali. Ordine di un' equazione, equazioni in forma normale.
Necessità dei valori iniziali per determinare una soluzione univocamente determinata di un' equazione differenziale. Problema di Cauchy per un' equazione di ordine n (con i valori iniziali della funzione incognita e delle sue derivate fino all' ordine $n-1$).
Introduzione alle equazioni del primo ordine a variabili separabili.

2-10-2019

Equazioni del primo ordine a variabili separabili. Definizione di soluzione, problemi generali di esistenza, unicità e globalità delle soluzioni. Eventuali soluzioni costanti. Determinazione delle altre soluzioni mediante separazione delle variabili.
Esempi vari.
Equazioni lineari del primo ordine, equazione completa ed equazione omogenea associata, relazione tra le due equazioni.

3-10-2019

Dimostrazione della formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine.
Introduzione ai numeri complessi, identificazione con i punti del piano, operazioni. Coniugato e modulo di un numero complesso, inverso di un numero complesso.
Coordinate polari nel piano, relazione con le coordinate cartesiane.
Definizione di $e^{i\vartheta}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$, forma polare $z = \rho e^{i\vartheta}$ di un numero complesso.
Moltiplicazione di numeri complessi in forma polare.

8-10-2019

Potenze e radici di numeri complessi, esempi di calcolo.
Cenni sulle derivate di funzioni complesse di variabile reale, esempio di $ft) = e^{it}$. Enunciato del Teorema fondamentale dell' algebra.
Soluzione di una equazione di secondo grado a coefficienti complessi.
Generalità e prime proprietà sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Spazio delle soluzioni dell' equazione omogenea con due funzioni base dello spazio delle soluzioni (ogni altra soluzione è combinazione lineare di due soluzioni di base).

9-10-2019

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, spazio delle soluzioni dell' equazione omogenea con due funzioni base.
Determinazione delle funzioni base in dipendenza delle radici del polinomio caratteristico in campo complesso e in campo reale: due esponenziali $e^{t_\pm x}$ se $\Delta > 0$ e il polinomio caratteristico ha radici $t_\pm$; $e^{t_0 x}$ e $xe^{t_0 x}$ se $\Delta = 0$ e il polinomio caratteristico ha la radice doppia t_0; $e^{ax}\cos(bx)$ e $e^{ax}\sin(bx)$ se $\Delta < 0$ e il polinomio caratteristico ha radici complesse coniugate $a \pm i\, b$.
Metodo " di somiglianza" per la soluzione dell' equazione completa nel caso in cui il secondo membro ha la forma di un polinomio per un esponenziale (o esponenziale per seno o coseno).
Esempi ed esercizi.
Cenni su altri tipi di equazioni riconducibili a quelli studiati. Esempio dell' equazione di Bernoulli.

10-10-2019

Vettori applicati nel piano, modulo, direzione e verso. Esempio delle forze in Fisica.

Vettori liberi, calcolo vettoriale su punti di $\mathbb{R}^2$, identificati geometricamente a vettori applicati nell' origine.

Spazio $\mathbb{R}^n$, n naturale positivo, delle n-ple ordinate di numeri reali.
Punti di $\mathbb{R}^n$ come vettori n-dimensionali, con n coordinate.
Operazioni per coordinate in $\mathbb{R}^n$: addizione tra vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, cioè per un numero reale.
Cenni sulla definizione astratta di spazio vettoriale.

Prodotto scalare tra due vettori in $\mathbb{R}^n$, dà come risultato un numero reale. Norma o lunghezza di un vettore, distanza tra due vettori.
Sottospazi di $\mathbb{R}^n$, generatori di $\mathbb{R}^n$ (di un sottospazio).
Esempi in dimensione bassa: sottospazi di $\mathbb{R}^2$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 2 (tutto il piano) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine). Sottospazi di $\mathbb{R}^3$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 3 (tutto lo spazio) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine) e di dimensione 2 (piani passanti per l' origine).

Combinazioni lineari di una famiglia di vettori. Dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di vettori.

Base canonica di $\mathbb{R}^n$: è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

15-10-2019

Sottospazio span $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ generato da una famiglia di vettori. Basi di R^n (sistemi di elementi che generano $\mathbb{R}^n$ e sono linearmente indipendenti). Base canonica di $\mathbb{R}^n$. Rappresentazione unica di un elemento di $\mathbb{R}^n$ come combinazione lineare di elementi di una base, coordinate di un vettore in una base.

Dimensione di uno spazio vettoriale, in particolare $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n.

Base di un sottospazio ottenuta eliminando dai generatori eventuali vettori dipendenti (che si esprimono come combinazione lineare degli altri).

Definizione di matrice $m \times n$, somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto di una matrice A, $m \times n$, per una matrice B, $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$. Esempi. Prodotto di una matrice A, $m \times n$, per una matrice B, $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$, caso particolare di A matrice $m \times n$, $B = X$ matrice colonna $n \times 1$, vettore colonna in $\mathbb{R}^n$, il risultato è una matrice $m \times 1$, un vettore colonna Y in $\mathbb{R}^m$.

16-10-2019

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2. Verifica della condizione necessaria e sufficiente di annullamento di un determinante: il determinante è nullo se e solo se i vettori colonna (o vettori riga) sono linearmente dipendenti. Determinante di una matrice quadrata di ordine 3 e per induzione di una matrice di ordine n qualsiasi.

Definizione induttiva di determinante per una matrice quadrata di ogni ordine, proprietà dei determinanti di essere nulli se e solo se le righe, e le colonne, sono linearmente dipendenti. Esistenza della matrice inversa di una matrice quadrata di ordine n non singolare, cioè con determinante non zero.

Introduzione al concetto di rango per minori di una matrice $m \times n$, enunciato dell' equivalenza con il numero massimo di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Proprietà degli orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Scrittura di un sistema lineare di m equazioni in n incognite in forma matriciale: $A\,X = B$, dove A è una matrice $m \times n$, X è il vettore colonna $n \times 1$ delle incognite $x_1, \ldots, x_n$, e B il vettore colonna $m \times 1$ dei termini noti $b_1, \ldots, b_n$.

Soluzione di un sistema quadrato (n equazioni in n incognite) $A\,X = B$ con det $(A) \neq 0$ per applicazione della matrice inversa: $X = A^{-1}\,B$ è l' unica soluzione del sistema. Formulazione equivalente: enunciato del Teorema di Cramer e formula per le soluzioni di sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

17-10-2019

Esempi ed esercizi sul calcolo del rango di una matrice e sul teorema di Cramer.

Sistemi quadrati con determinante della matrice dei coefficienti nulla e sistemi non quadrati.
Scrittura del sistema come $x_1 A_1 + \dots x_n A_m = B$, dove $A_1, \dots, A_n$ sono le colonne della matrice A dei coefficienti.
Teorema di Rouché- Capelli, con dimostrazione.

Esempi vari, casi particolari.

22-10-2019

Svolgimento di esempi ed esercizi sulla risolubilità e sulla soluzione di sistemi lineari, eventualmente con parametro, discussione dell' esistenza, unicità, molteplicità di soluzioni.

Determinazione delle soluzioni a partire da un minore di rango massimo selezionato.

Dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato, relazione tra soluzioni di un sistema e soluzioni del sistema omogeneo associato.

23-10-2019

Basi di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente di un sottospazio $S \subset \mathbb{R}^n$), dimensione di un sottospazio (la dimensione di tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ è n).

Coordinate di un vettore rispetto ad una base, cambiamenti di base.

Matrice P di cambio di base, definizione come matrice le cui colonne sono le coordinate dei nuovi vettori di base nella vecchia base (per i nostri esempi la base canonica). Effetto sulle coordinate: se $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sono le nuove coordinate di un vettore, $P\,X'$ dà le vecchie coordinate $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (nella base canonica negli esempi).
Esempi vari.

Trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, matrice della trasformazione nella base canonica. Trasformazioni lineari, matrice associata nella base canonica, matrici in base qualsiasi.

Relazione $A' = P^{-1}AP$ tra la matrici A della trasformazione nella base canonica e la matrice A' della trasformazione nella nuova base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dove P è la matrice del cambio di base.

Problema della diagonalizzazione che conduce alla ricerca di vettori trasformati in un loro multiplo.

Definizione di autovalore e autovettore di una trasformazione lineare (equivalentemente di una matrice associata nella base canonica).

Condizione necessaria affinché un numero reale λ sia un autovalore: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di una matrice A (della trasformazione lineare associata nella base canonica). Autovalori come radici del polinomio caratteristico e loro molteplicità algebrica.

24-10-2019

Autospazio di un autovalore: insieme degli autovettori corrispondenti ad un autovalore (insieme al vettore nullo). È un sottospazio, e la sua dimensione è detta molteplicità geometrica.

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$.

Diagonalizzabilità di una matrice 2×2 come esistenza di 2 autovettori indipendenti. È in particolare verificata in $n = 2$ dimensioni se esistono 2 autovalori distinti.
Se c' è un solo autovalore la matrice può non essere diagonalizzabile, se il corrispondente autospazio ha dimensione 1, cioè le soluzioni del sistema per gli autovettori sono tutti i multipli di un solo autovettore, ma può accadere che in corrispondenza di un solo autovalore il suo autospazio abbia dimensione 2. Esempio banale di una matrice già diagonale, per capire cosa succede in dimensioni superiori.

Cenni sulle forme quadratiche e sul teorema spettrale. Esistenza di una base ortonormale in cui la matrice di una forma quadratica è diagonale (e tale che nel cambiamento di coordinate non cambiano i prodotti scalari).

25-10-2019

Complementi sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine: metodo di variazione delle costanti per trovare una soluzione particolare dell' equazione completa.

Esempi ed esercizi in dimensione 2 e 3 relativi alla soluzione di sistemi lineari e al calcolo di autovalori ed autovettori.

29-10-2019

Introduzione alla topologia dello spazio $\mathbb{R}^n$ e alle funzioni (reali o vettoriali) di più variabili reali.
Cenni agli spazi con prodotto scalare, normati, metrici.
Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$. Palle aperte, chiuse, sfere di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$.
Punti interni, esterni, di frontiera di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, chiusura di un insieme.
Insiemi aperti e chiusi.
Segmento tra due punti. Insiemi convessi, connessi, compatti.

30-10-2019

Limiti di funzioni di più variabili reali a valori scalari o vettoriali. Punto all' infinito in $\mathbb{R}^n$. Difficoltà del calcolo in alcuni casi particolari, uso delle coordinate polari. Continuità delle funzioni elementari. Derivate parziali e direzionali di una funzione in un punto, gradiente di una funzione, esempi.
Necessità di una nozione più forte di derivabilità, concetto di differenziabilità come possibilità di linearizzare localmente l' incremento di una funzione.

31-10-2019

Dimostrazione dei teoremi che danno una condizione necessaria per la differenziabilità e una condizione sufficiente (teorema del differenziale totale).
Derivabilità rispetto a ogni direzione e continuità delle funzioni differenziabili, identificazione della trasformazione lineare nella definizione: è il prodotto scalare con il gradiente della funzione.
Differenziabilità delle funzioni di uso comune come conseguenza della continuità delle loro derivate parziali.

5-11-2019

Piano tangente in un punto del grafico di una funzione differenziabile. Significato geometrico del gradiente, se non nullo (direzione di massima crescita di una funzione).
Funzioni a valori vettoriali di una variabile reale, limiti e derivate. Disuguaglianze elementari che permettono di calcolare limiti e derivate per componenti.
Vettore derivata parziale di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali. Matrice jacobiana di una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$: ha per colonne i vettori derivate parziali e per righe i gradienti delle componenti.
Differenziabilità di una funzione vettoriale di più variabili reali.

6-11-2019

Differenziale come operatore lineare $f'(x) = df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, rappresentato nella base canonica dalla matrice jacobiana di f.
Teorema del differenziale di una funzione composta $h = g \circ f$ (enunciato) e conseguente "regola della catena " per il calcolo delle derivate parziali di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali.
Caso particolare importante: $g = g(x_1, \ldots, x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1(t), \ldots x_n(t)) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $h(t) = g(x_1(t), \ldots x_n(t))$, $h'(t) = \nabla g(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{x}(t))\, x_k'(t)$.

Esempi vari.
Derivate seconde e successive di una funzione scalare (o vettoriale) di più variabili reali, matrice hessiana.
Funzioni di classe C^2. Teorema di Schwarz o dell' inversione dell' ordine di derivazione (enunciato).
Formula di Taylor del secondo ordine con resto in forma di Lagrange e in forma di Peano.

7-11-2019

Dimostrazione delle formule di Taylor.
Richiami sulle forme quadratiche, forme definite, semidefinite, indefinite. Criterio di Sylvester per determinare il carattere di una forma quadratica.
Massimi e minimi locali (”liberi”) di funzioni di più variabili.
Teorema di Fermat. Punti critici di una funzione.
Esempi.

12-11-2019

Complementi sulle forme quadratiche, enunciato del teorema spettrale.
Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per punti di minimo / massimo locale e punti di sella basati sul segno della matrice hessiana in un punto critico o in un intorno.
Teorema di Lagrange per funzioni a valori vettoriali, valido come disuguaglianza e non come uguaglianza.
Norma di una matrice, idea della dimostrazione del Teorema sul differenziale di una funzione composta.

13-11-2019

Esempi ed esercizi su massimi e minimi liberi.
Richiami sulla definizione di integrale definito per funzioni reali di una variabile reale.
Definizione di integrabilità e di integrale doppio su rettangoli per una funzione limitata reale di due variabili.
Enunciato delle proprietà degli integrali doppi.
Formule di riduzione su rettangoli, esempi.

14-11-2019

Insiemi limitati di misura (bi-dimensionale, area) nulla in $\mathbb{R}^2$.
Enunciato del teorema sull' integrabilità di funzioni limitate su rettangoli, continue tranne che su un insieme di misura nulla.
Definizione di integrabilità e integrale di una funzione esteso a un insieme limitato S. Definizione di misurabilità e di misura di un insieme

limitato. Un insieme limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla, conseguente integrabilità di funzioni continue su insiemi misurabili.
Insiemi semplici rispetto a un asse e loro misurabilità.

15-11-2019

Formule di riduzione per gli integrali di funzioni continue su insiemi semplici, calcolo dell' integrale doppio come integrale iterato.
Esempi ed esercizi.
Diffeomorfismi (trasformazioni regolari di coordinate) tra aperti di $\mathbb{R}^2$.
Formula di cambio di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari e e determinante jacobiano della trasformazione, formula di integrazione in coordinate polari.

19-11-2019

Esempi ed esercizi sui cambi di variabile per integrali doppi. Coordinate polari e loro variante per l' ellisse.
Cenno sugli integrali doppi impropri. Calcolo dell' integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ usando integrali doppi.

20-11-2019

Definizioni e proprietà degli integrali tripli, insiemi di misura (volume) nulla, insiemi misurabili, Insiemi semplici e formule di riduzione, integrazione per fili e per strati.
Cambi di coordinate per integrali tripli.

21-11-2019

Coordinate cilindriche e sferiche e corrispondenti formule di cambio di variabile.
Solidi di rotazione. Sfera, ellissoide e loro volumi. Esempi ed esercizi

22-11-2019

Definizioni e prime proprietà relative alle curve. Parametrizzazioni continue, di classe C^1, regolari. Versore tangente. Parametrizzazioni equivalenti (equiverse e controverse). Curve chiuse, semplici, cartesiane, esempi.

26-11-2019

Lunghezza di una curva di classe C^1, Integrali curvilinei di prima specie o rispetto alla lunghezza d' arco. Ascissa curvilinea, parametrizzazione naturale. Cenni sulla curvatura (senza segno) di una curva.
Esempi ed esercizi.

27-11-2019

Integrali curvilinei di seconda specie di campi vettoriali continui su curve C^1 a tratti e loro proprietà. Linguaggio delle forme differenziali. Esempi di calcolo.

Teorema e formula di Green.

Forme differenziali esatte (campi vettoriali conservativi) in un insieme, primitive di una forma. Calcolo dell' integrale curvilineo di una forma esatta come primitiva nel punto finale meno primitiva nel punto iniziale della curva.

28-11-2019

Dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l' esattezza (circuitazioni nulle, dipendenza dell' integrale curvilineo dagli estremi della curva).

Forme differenziali chiuse (campi irrotazionali). Dimostrazione della chiusura di una forma come condizione necessaria per l' esattezza.

Controesempio canonico: $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$.

Introduzione agli insiemi semplicemente connessi nel piano e uso della formula di Green per dimostrare che la chiusura di una forma è anche condizione sufficiente per l' esattezza in insiemi semplicemente connessi del piano.

29-11-2019

Invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme chiuse.

Caso di una regione compresa tra due curve e Teorema di Green per esempi di regioni molteplicemente connesse.

Definizione generale di insieme semplicemente connesso.

Locale esattezza delle forme chiuse. Esempi vari.

Calcolo di primitive di forme esatte con il metodo degli integrali indefiniti.

3-12-2019

Esempi ed esercizi sulle forme differenziali.

Superfici in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzazioni regolari. Versore normale. Superfici con bordo e senza bordo. Superfici orientabili, orientazione di una superficie. Superfici cartesiane. Esempi.

4-12-2019

Area di una superficie, elemento di area. Integrali di superficie (di prima specie) di funzioni scalari. Caso delle superfici cartesiane.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

Operatori gradiente di un campo scalare, rotore e divergenza di un campo vettoriale.

5 - 12 - 2019

Superficie S (senza bordo) che sia frontiera di un aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^3$, versore normale esterno.
Teorema della divergenza (con dimostrazione nel caso di un aperto semplice rispetto ad ogni asse). Esempi.
Cenni sul Teorema di Stokes: orientazione indotta sul bordo di una superficie, enunciato del teorema.

6 - 12 - 2019

Funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y) = 0$. Teorema di Dini o delle funzioni implicite in 2 dimensioni (con dimostrazione).
Estensione al caso di funzioni $z = z(x, y)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y, z) = 0$ in $\mathbb{R}^3$ e più in generale al caso di ipersuperfici in $\mathbb{R}^{n+1}$: funzioni $x_{n+1} = x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.
Interpretazione della funzione G come vincolo.

10 - 12 - 2019

Retta tangente a una curva in $\mathbb{R}^2$ (piano tangente a una superficie in $\mathbb{R}^3$) definita implicitamente: il vettore ∇G è ortogonale al vincolo.

Cenno al caso generale e al concetto di spazio tangente.
Massimi e minimi vincolati di funzioni $f(x, y)$ di 2 variabili (funzioni $f(x, y, z)$ di 3 variabili) con un vincolo $G(x, y) = 0$ ($G(x, y, z) = 0$).
Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Cenno al teorema di Dini nel caso di più vincoli e al metodo dei moltiplicatori di Lagrange corrispondente.
Caso di curve in $\mathbb{R}^3$ definite attraverso due vincoli.

11 - 12 - 2019

Serie numeriche. Convergenza e divergenza. Serie telescopiche. Serie geometrica. Serie a termini positivi (o negativi). Criterio del rapporto e della radice. Criterio di confronto con un integrale improprio.
Convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$.
Esempi

17 - 12 - 2019

Dimostrazione dei criteri di convergenza per serie a termini positivi, esempi ed esercizi.
Serie con termini di segno variabile. Convergenza semplice ed assoluta.
Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. Esempi.

18 - 12 - 2019

Introduzione alle serie di funzioni. Serie di potenze. Raggio di convergenza. Infinita derivabilità nell' intervallo di convergenza della funzione somma di una serie di potenze.
Serie di Taylor di una funzione di classe C^∞ in un intervallo. Una serie di potenze è la serie di Taylor della funzione somma nell' intervallo di convergenza.
Controesempio del viceversa: non ogni funzione di classe C^∞ è analitica, cioè sviluppabile in serie di potenze.
Serie di Taylor e relativa convergenza di alcune funzioni elementari.

19 - 12 - 2019

Esempi ed esercizi di riepilogo sulle serie numeriche e di potenze.