Diario delle lezioni 2018-19
Matematica per Scienze Biologiche e Biotecnologie

NOTA. A causa del numero limitato di ore le dimostrazioni sono ridotte al minimo. In particolare prima del calcolo differenziale tutti gli enunciati sono stati giustificati intuitivamente, sono stati dimostrati invece i teoremi basilari sul calcolo differenziale e il teorema fondamentale del calcolo integrale.

1-10-2018

Notazioni e concetti intuitivi di logica e di insiemistica: quantificatori ($\forall$, $\exists$), implicazioni ed equivalenze logiche, dimostrazioni dirette e per assurdo, esempi. Appartenenza, insieme vuoto, unione, intersezione, insieme universo, differenza insiemistica, complemento. Coppie ordinate, prodotto cartesiano di insiemi, piano cartesiano come prodotto della retta reale per sé stessa.
Nozione generale di funzione tra insiemi, dominio e codominio. Grafico di una funzione.
Immagine della funzione, funzioni iniettive e suriettive, funzioni biiettive o corrispondenze biunivoche.
Nozione più generale di funzione invertibile, qui usata come sinonimo di iniettiva, una volta determinata l' immagine.
Nozione di insieme di definizione di una funzione reale di variabile reale e di immagine (a volte chiamate dominio e codominio).
Insiemi numerici: presentazione intuitiva degli insiemi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ dei naturali positivi, $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{\pm m : m \in \mathbb{N}^+\}$ dei numeri interi relativi, $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, identificabili con le frazioni $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) se si identificano tra loro le frazioni equivalenti.
Impossibilità dell' operazione di radice quadrata in generale nell' insieme $\mathbb{Q}$, " realtà geometrica" del "numero" $\sqrt{2}$ e conseguente necessità di un insieme numerico "continuo" più grande, l' insieme dei numeri reali. Possibile definizione dei numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici e non, alternativa definizione assiomatica.

3-10-2018

Assiomi dei numeri reali e loro conseguenze (qui e in seguito quasi tutto senza dimostrazione, proprietà dei numeri reali, delle operazioni e disuguaglianze tra di essi, delle frazioni etc. che devono essere note operativamente). Equazioni e disequazioni di primo grado e frazionarie semplici. Numeri naturali, interi, razionali come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Simboli $\pm\infty$, intervalli in $\mathbb{R}$.
Proprietà degli estremi degli intervalli e conseguente generalizzazione: insiemi limitati superiormente, inferiormente, maggioranti, minoranti

di un insieme, estremo superiore (inferiore) di insiemi limitati superiormente (inferiormente). Convenzione $\sup A = +\infty$ nel caso di insiemi non limitati superiormente ($\inf A = -\infty$ nel caso di insiemi non limitati inferiormente). Esempi.

Esistenza e unicità della radice n esima non negativa, $n \in \mathbb{N}^+$, di un numero reale $a \geq 0$.

Radice quadrata di un numero reale come unico numero *non negativo* $b \geq$ tale che $b^2 = a$, notazione $\pm\sqrt{a}$ per le soluzioni di $X^2 = a$, $a > 0$.

Cenni sul fatto che l' esistenza di radici quadrate (n-esime) di ogni numero non negativo equivale al teorema che dice che l' immagine della funzione $f(x) = x^2$ è tutto l' intervallo $[0, +\infty)$, che a sua volta è conseguenza dell' assioma di continuità, non valido nell' insieme dei numeri razionali.

4-10-2018

Equazioni elementari di secondo grado $X^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, numero di soluzioni. Trinomi di secondo grado e loro segno, deduzione delle formule per equazioni e disequazioni di secondo grado.

Funzioni reali di variabile reale strettamente monotone (crescenti o decrescenti). Soluzioni di equazioni e disequazioni associate a una funzione strettamente monotona per applicazione della funzione inversa. Esempio delle funzioni $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ancora sulle funzioni iniettive e loro inverse, caso di funzioni non invertibili ma le cui restrizioni a sottoinsiemi del dominio lo sono. Esempio delle funzioni quadrato e radice quadrata.

Definizione delle potenze a^b: caso di esponente naturale positivo, proprietà delle potenze. Estensione a casi più generali che mantenga le proprietà: esponente nullo o intero ($a \neq 0$), esponente razionale (in generale $a > 0$), e caso generale di potenze del tipo a^b con a reale *positivo*, $b \in \mathbb{R}$.

5-10-2018

Proprietà della funzione esponenziale a^x, sua stretta monotonia (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$).

Teorema: l' immagine della funzione esponenziale è tutto l' intervallo $(0, +\infty)$.
Logaritmo in base a, con $a > 0$, $a \neq 1$ come inversa della funzione esponenziale, definito solo per argomenti *positivi*, esempi, grafici.

Proprietà delle potenze e dei logaritmi.

Alcuni tipi di equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Alcuni tipi di equazioni e disequazioni irrazionali elementari. Esempi.

Esempi di equazioni e disequazioni associate alle funzioni esponenziale e logaritmica.

Modulo e sue proprietà. Equazioni e disequazioni elementari con il modulo.

Richiami di trigonometria. Misura in radianti degli angoli. Seno, coseno e tangente di un angolo, valori particolari, periodicità, relazioni tra queste nozioni, formule trigonometriche di uso comune.
Seno, coseno e tangente come funzioni, grafici.
Arcoseno, arcocoseno e arcotangente come inverse di restrizioni di queste funzioni a domini in cui sono iniettive e hanno per immagine le immagini delle funzioni originarie.
Equazioni elementari per determinare i numeri x che risolvano equazioni del tipo $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, con $a \in [-1, 1]$, $\tan(x) = b$ con $b \in (-\infty, +\infty)$. Esempi.

8-10-2018

Introduzione al concetto di limite di una funzione $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ nel caso in cui a e l sono numeri reali (per ora intuitiva, descritta con frasi, in seguito sarà resa più precisa anche se le dimostrazioni di tutte le proprietà che saranno enunciate sui limiti non saranno quasi mai svolte per mancanza di tempo).
Definizione di funzione continua in un punto e possibilità di calcolare i limiti del tipo $\lim_{x\to a} f(x)$ ”per sostituzione” se f è definita e continua in a: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Continuità di tutte le funzioni elementari finora incontrate.
Estensione della definizione di $\lim_{x\to a} f(x) = l$ al caso in cui a e/o l siano $\pm\infty$.
Definizioni rigorose di limite di funzione, finiti o infiniti, per $x \to a \in \mathbb{R}$, $x \to \pm\infty$, commenti vari sulla definizione (che comunque non useremo, basandoci invece sull' intuizione e su teoremi che non dimostriamo ma enunciamo).

Esercizi su equazioni e disequazioni.

10-10-2018

Enunciato dei teoremi sui limiti e sulle funzioni continue (somme, prodotti, quozienti).
Estensione al caso di operazioni tra infiniti (ragionevolezza delle definizioni che vengono date, e che hanno senso solo se pensate come limiti) e tabella delle operazioni tra infiniti.
Ulteriore estensione (per ora basate sull' analisi dei grafici, rigorosamente sarebbero teoremi da dimostrare) delle operazioni al caso di funzioni elementari valutate negli estremi dell' intervallo di definizione, ad es $e^{-\infty} = 0^+$, $e^{+\infty} = +\infty$, $\log(0^+) = -\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$, $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ etc.
Casi che non sono compresi in questa tabella: forme indeterminate, da analizzare in seguito.

Esempi vari di determinazione del limite in assenza di forme indeterminate.
Esempi di forme indeterminate che tendono a limiti diversi a seconda dell' esempio trattato (motivo del nome di forme indeterminate).

11-10-2018

Limiti di funzioni razionali all' infinito [e in zero], spiegazione della regola delle potenze di grado più elevato [più basso] che dominano le altre.
Successioni reali e loro limiti. Teorema di esistenza del limite (eventualmente infinito) di una successione monotona, finito se la successione è limitata. Cenni sull' equivalenza del teorema con l' assioma di continuità.

Limiti notevoli:
Definizione di $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (si dimostra che esiste il limite e si sa valutarlo con approssimazione a piacere).
Estensione al caso reale: $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ e più in generale, se $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$; in particolare $\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{1}{x})^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

12-10-2018

Tecnica di cambio di variabile e deduzione di altri limiti notevoli a partire dal $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$:
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log(a)}$; in particolare
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$,
dove d' ora in poi, se la base non è specificata, si intende che log voglia dire $\log_e$ (altra notazione molto usata che alterneremo: ln);
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log(a) = \ln(a)$, in particolare
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, dimostrazione geometrica.

Limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ e altri limiti elementari dedotti dai limiti notevoli.
Esempi ed esercizi su semplici calcoli di limite usando i limiti notevoli.

15-10-2018

Enunciato di alcune proprietà delle funzioni continue in un intervallo:
Teorema di permanenza del segno,
Teorema degli zeri e dei valori intermedi,
Teorema di Weierstrass sull' esistenza di punti di massimo e minimo assoluto per funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.

Esercizi sui limiti elementari e notevoli.

Parentesi sui numeri naturali. Fattoriale. Cenni di calcolo combinatorio. Sviluppo del binomio di Newton.

17-10-2018

Introduzione al concetto di derivata, interpretazione geometrica, retta tangente. Interpretazione cinematica, velocità istantanea.
Definizione di funzione derivata, derivata di una funzione in un punto e funzione derivata. Esempio del calcolo della funzione derivata della funzione $f(x) = x^2$.

Calcolo delle derivate delle funzioni esponenziale, seno, coseno.
Derivata della funzione inversa.
Derivata di logaritmo, arcoseno e arcocoseno.
Regole di derivazione di somma, prodotto, quoziente.
Derivata delle funzioni tangente e arcotangente.
Derivazione delle funzioni composte.

18-10-2018

Teorema di derivazione delle funzioni composte, primi esempi di calcolo.
Derivata della funzione potenza a esponente reale.
Tabella di derivate.
Esempi di calcolo di funzioni derivate. Esercizi sul calcolo delle funzioni derivate, in particolare derivate di funzioni composte.
Calcolo di derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, esempi.
Richiami sulla definizione di punto di massimo e minimo assoluto di una funzione su un intervallo.
Intorno di un punto, definizione di punto di massimo e minimo relativo o locale di una funzione definita su un intervallo.

19-10-2018

Teoremi fondamentali del calcolo differenziale (con dimostrazione, eccetto il caso della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ nel teorema di de l' Hospital):
Teorema di Rolle.
Teorema di Cauchy.
Teorema di Lagrange o del valor medio. Primi cenni alle conseguenze del teorema del valor medio.
Teorema di de l' Hospital per il calcolo di limiti che presentano una forma indeterminata.
Esempi di applicazione, calcolo attraverso l' uso combinato del teorema e di altre tecniche note.

22-10-2018

Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante; una funzione con derivata non negativa (non positiva) in un intervallo è crescente (decrescente), strettamente se la derivata ha un segno stretto.
Derivate seconde e successive di una funzione, funzioni di classe $C^m(a,b)$, cioè continue con derivate fino all' ordine m continue in (a,b).
Ricerca di un polinomio che abbia stesso valore e stesse derivate in un punto di una funzione assegnata $f(x)$ derivabile n volte in un intervallo I: Polinomio di Taylor di una funzione $f(x)$ derivabile n volte in un intervallo a partire da un punto x_0. Primi esempi.

24-10-2018

Polinomio di Taylor $p_n(x)$ di ordine $n \in \mathbb{N}$ e centro in $x \in I$ di una funzione di classe $C^n(I)$ e sua proprietà: $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e per $1 \leq k \leq n$ $f^{(k)}(x_0)$ è la derivata k-esima di f in x_0.
Infinitesimi di ordine superiore a polinomi, notazione di Landau.
$o\left((x-x_0)^n\right)$ $(x \to x_0)$. Equivalenza $o\left((x-x_0)^n\right)$ $(x \to x_0)$ come sinonimo di $g(x)$ tale che $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ e come sinonimo di $(x-x_0)^n h(x)$ con $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$, cioè $o\left((x-x_0)^n\right) = (x-x_0)^n\, o(1)$ $(x \to x_0)$, dove $o(1)$ $(x \to x_0)$ significa funzione infinitesima per $x \to x_0$. Formula di Taylor con resto in forma di Peano. Deduzione delle formule di Taylor-Mac Laurin di uso più comune.
Calcolo di limiti con l' aiuto della formula di Taylor.
Esempi.

25-10-2018

Convessità e concavità in un punto e in un intervallo.
Relazione tra il segno della derivata seconda e la convessità di una funzione. Punti di flesso di una funzione.
Asintoti obliqui di una funzione infinita all' infinito, regole per calcolarne l' equazione.
Elementi per lo studio di una funzione reale di variabile reale: insieme di definizione; (eventualmente se agevole intersezione con gli assi, segno, parità e disparità); limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti orizzontali e/o verticali; studio di eventuali asintoti obliqui per funzioni infinite all' infinito; studio del segno della derivata per determinare la monotonia, i massimi e i minimi relativi; studio del segno della derivata seconda per determinare intervalli di convessità e concavità e flessi.
Primi esempi.

29-10-2018

Lezione non svolta per l' emergenza maltempo.

31-10-2018

Criterio basato sul segno della derivata seconda, e in generale della prima non nulla tra le derivate successive per decidere se un punto critico è di massimo, minimo o flesso, dimostrazione basata sulla formula di Taylor. Esempio di studio di una funzione trigonometrica usando questo criterio.
Continuità delle funzioni derivabili.
Esempio del modulo, funzione continua in (ogni punto di) $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0. Derivate destra e sinistra.
Punti di discontinuità di una funzione o della sua derivata.
Esempi ed esercizi proposti sullo studio di funzioni.
Simbolo di sommatoria, esempi. Cambi di indici.
Introduzione generale al concetto di integrale definito.

5-11-2018

Introduzione generale al concetto di integrale definito, somme superiori, inferiori, integrale superiore, inferiore, funzioni integrabili. Enunciato del teorema di integrabilità delle funzioni continue in un intervallo $[a, b]$.
Integrale come " somma di infiniti prodotti dei valori della funzione $f(x)$ per incrementi infinitesimi.
Definizione di $\int_a^b f(x)\,dx$, integrale definito da a a b di una funzione continua $f(x)$, come unico elemento separatore tra due insiemi di numeri reali, quello delle aree di plurirettangoli inscritti e quello delle aree dei plurirettangoli circoscritti al grafico di f. Somme di Cauchy del tipo $\sum_{i=1}^N f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, con $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ decomposizione di $[a, b]$ in tanti piccoli intervalli e c_i scelto in $[x_{i-1}, x_i]$ che "tendono" all' integrale di f quando la suddivisione si infittisce, motivazione della notazione $\int_a^b f(x)\,dx$. La variabile x di integrazione è muta, non compare nel risultato finale e può essere sostituita da qualsiasi altra lettera.
Proprietà additiva degli integrali rispetto all' insieme di integrazione, integrale di somme e prodotti di costanti per funzioni.
Media integrale di una funzione, teorema della media integrale.
Enunciato e dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale: la derivata della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (con f continua in $[a, b]$) nel punto $x \in [a, b]$ è la funzione integranda $f(x)$ in quel punto.
Formula fondamentale del calcolo integrale :
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ se è nota una primitiva $F(x)$ della funzione integranda $f(x)$.

Funzioni primitive di funzioni date $f(x)$ su un intervallo.

7-11-2018

Alcune interpretazioni fisiche del concetto di integrale definito: lavoro di una forza posizionale per moti in una dimensione, massa totale di un filo nota la densità variabile, spazio percorso nota la velocità istantanea in funzione del tempo ... Dagli esempi si vede già perché debba valere il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Integrale indefinito $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ se F è una primitiva nota della funzione integranda f.
Tabella di integrali, commenti su casi particolari ($\log(|x|)$, radici ...).
Primi esempi di integrazione di somme di funzioni della tabella o di prodotti di costanti per funzioni della tabella.
Integrali di funzioni pari e dispari su intervalli simmetrici rispetto all' origine.

Cenni sul concetto di differenziale di una funzione. Regola pratica per il calcolo formale del differenziale.
Integrazione per sostituzione, caso degli integrali indefiniti e degli integrali definiti (cambio degli estremi di integrazione), due modi per leggerla.

Integrazione per sostituzione immediata: integrali che hanno la forma (o sono facilmente riducibili alla forma) $\int f(g(t))g'(t)\,dt$.
Esempi vari di questo tipo.

8-11-2018

Integrazione per parti, regola generale ed esempi vari.
Esercizi sull' integrazione per sostituzione e per parti.
Integrale delle funzioni razionali. Riduzione al caso di numeratore con grado minore del denominatore con l' aiuto dell' algoritmo di divisione tra polinomi.
Casi del denominatore di secondo grado dipendenti dal segno del discriminante del trinomio. Esempi.
Generalizzazione al caso di gradi superiori, esempi vari.
Esercizi sull' integrazione di funzioni razionali.

12-11-2018

Alcune sostituzioni speciali: funzioni razionali di seno e coseno, funzioni razionali dell' esponenziale.
Altri esempi di sostituzioni (per tentativi) suggerite dalla funzioni integranda.
Esercizi vari sull' uso combinato dell' integrazione per sostituzione e dell' integrazione per parti.

Cenni su integrali impropri del tipo $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.
Integrali convergenti, esempi.

Cenni sul concetto di serie numerica come definizione di "somme di infiniti termini". Convergenza e divergenza.

Esempio della serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, convergenza nel caso di $-1 < q < 1$, determinazione della somma per questi valori di q: $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie. Problema di Cauchy, condizioni iniziali.

14-11-2018

Generalità sulle equazioni differenziali. Ordine di un' equazione, equazioni in forma normale.
Necessità dei valori iniziali per determinare una soluzione univocamente determinata di un' equazione differenziale. Problema di Cauchy per un' equazione di ordine n (con i valori iniziali della funzione incognita e delle sue derivate fino all' ordine $n-1$).
Equazioni del primo ordine a variabili separabili. Eventuali soluzioni costanti. Determinazione delle altre soluzioni mediante separazione delle variabili.
Esempi vari.

15-11-2018

Equazioni lineari del primo ordine. Caso di coefficiente costante, polinomio caratteristico. Soluzione particolare e soluzione dell' equazione completa se il termine noto ha la forma di un polinomio per un esponenziale.

Cenni sui numeri complessi. Soluzioni in campo complesso di equazioni di secondo grado.
Equazioni lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine. Equazione omogenea associata. Polinomio caratteristico, soluzione generale dell' equazione omogenea associata.

19-11-2018

Soluzione particolare dell' equazione completa nel caso particolare in cui il termine noto è il prodotto di un polinomio per un esponenziale o di un polinomio per seno o coseno. Esempi. Esercizi sulle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine.

Vettori applicati nel piano, modulo, direzione e verso. Esempio delle forze in Fisica.

Vettori liberi, calcolo vettoriale su punti di $\mathbb{R}^2$, identificati geometricamente a vettori applicati nell' origine.

Spazio $\mathbb{R}^n$, n naturale positivo, delle n-ple ordinate di numeri reali. Punti di $\mathbb{R}^n$ come vettori n-dimensionali, con n coordinate.
Operazioni per coordinate in $\mathbb{R}^n$: addizione tra vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, cioè per un numero reale.
Prodotto scalare tra due vettori in $\mathbb{R}^n$, dà come risultato un numero reale.

22-11-2018

Riepilogo delle operazioni nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: addizione tra vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, prodotto scalare tra due vettori.
Combinazioni lineari di una famiglia di vettori.

Sottospazio span $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$: insieme dei vettori esprimibili come combinazione lineare di tali vettori.

Definizione generale di sottospazio S di $\mathbb{R}^n$ e ricerca di un insieme di generatori per esso, in particolare per tutto lo spazio $S = \mathbb{R}^N$. Dipendenza lineare di due o più vettori, equivalenza tra la condizione che una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dia il vettore nullo, e la condizione che uno almeno dei vettori sia combinazione lineare degli altri.

Dipendenza lineare di tre vettori nel piano, quattro nello spazio tridimensionale, in generale di m vettori in $\mathbb{R}^n$ se $m > n$.

Basi di $\mathbb{R}^n$: insiemi di m vettori $\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_m$ che generano $\mathbb{R}^n$ e sono linearmente indipendenti.

Base canonica in $\mathbb{R}^n$.

Ogni base in $\mathbb{R}^n$ ha esattamente n elementi, n è la *dimensione* di $\mathbb{R}^n$.

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Descrizione di un sottospazio tramite un insieme di generatori: $S =$ span $(\{v_1, \ldots v_m\})$. Base di un sottospazio ottenuta eliminando dai generatori eventuali vettori dipendenti (che si esprimono come combinazione lineare degli altri).

Esempi in dimensione bassa: sottospazi di $\mathbb{R}^2$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 2 (tutto il piano) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine). Sottospazi di $\mathbb{R}^3$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 3 (tutto lo spazio) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine) e di dimensione 2 (piani passanti per l' origine).

23-11-2018

Definizione di matrice $m \times n$, somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto di una matrice A, $m \times n$, per una matrice B, $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$. Esempi. Prodotto di una matrice A, $m \times n$, per una matrice B, $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$, caso particolare di A matrice $m \times n$, $B = X$

matrice colonna $n \times 1$, vettore colonna in $\mathbb{R}^n$, il risultato è una matrice $m \times 1$, un vettore colonna Y in $\mathbb{R}^m$.

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2. Verifica della condizione necessaria e sufficiente di annullamento di un determinante: il determinante è nullo se e solo se i vettori colonna (o vettori riga) sono linearmente dipendenti. Determinante di una matrice quadrata di ordine 3 e per induzione di una matrice di ordine n qualsiasi.

Definizione induttiva di determinante per una matrice quadrata di ogni ordine, proprietà dei determinanti di essere nulli se e solo se le righe, e le colonne, sono linearmente dipendenti. Esistenza della matrice inversa di una matrice quadrata di ordine n non singolare, cioè con determinante non zero.

Introduzione al concetto di rango per minori di una matrice $m \times n$, enunciato dell' equivalenza con il numero massimo di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Proprietà degli orlati per il calcolo del rango di una matrice.

26-11-2018

Scrittura di un sistema lineare di m equazioni in n incognite in forma matriciale: $A\,X\ = B$, dove A è una matrice $m \times n$, X è il vettore colonna $n \times 1$ delle incognite $x_1, \ldots, x_n$, e B il vettore colonna $m \times 1$ dei termini noti $b_1, \ldots, b_n$.

Soluzione di un sistema quadrato (n equazioni in n incognite) $A\,X\ = B$ con $\det\,(A) \neq 0$ per applicazione della matrice inversa: $X = A^{-1}\,B$ è l' unica soluzione del sistema. Formulazione equivalente: enunciato del Teorema di Cramer e formula per le soluzioni di sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

28-11-2018

Esempi ed esercizi sul calcolo del rango di una matrice e sul teorema di Cramer.

Sistemi quadrati con determinante della matrice dei coefficienti nulla e sistemi non quadrati.

Scrittura del sistema come $x_1 A_1 + \ldots x_n A_m = B$, dove $A_1, \ldots, A_n$ sono le colonne della matrice A dei coefficienti.

Teorema di Rouché- Capelli, con dimostrazione.

Esempi vari, casi particolari.

29-11-2018

Svolgimento di esempi ed esercizi sulla risolubilità e sulla soluzione di sistemi lineari, eventualmente con parametro, discussione dell' esistenza, unicita', molteplicita' di soluzioni.

Determinazione delle soluzioni a partire da un minore di rango massimo selezionato.

Dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato, relazione tra soluzioni di un sistema e soluzioni del sistema omogeneo associato..

3-12-2018

Basi di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente di un sottospazio $S \subset \mathbb{R}^n$), dimensione di un sottospazio (la dimensione di tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ è n).

Coordinate di un vettore rispetto ad una base, cambiamenti di base.

Matrice P di cambio di base, definizione come matrice le cui colonne sono le coordinate dei nuovi vettori di base nella vecchia base (per i nostri esempi la base canonica). Effetto sulle coordinate: se $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sono le nuove coordinate di un vettore, $P\,X'$ dà le vecchie coordinate $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (nella base canonica negli esempi).
Esempi vari.

Trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, matrice della trasformazione nella base canonica. Trasformazioni lineari, matrice associata nella base canonica, matrici in base qualsiasi.

Relazione $A' = P^{-1}AP$ tra la matrici A della trasformazione nella base canonica e la matrice A' della trasformazione nella nuova base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dove P è la matrice del cambio di base.

Problema della diagonalizzazione che conduce alla ricerca di vettori trasformati in un loro multiplo.

Definizione di autovalore e autovettore di una trasformazione lineare (equivalentemente di una matrice associata nella base canonica).

Condizione necessaria affinché un numero reale λ sia un autovalore: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

5-12-2018

Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di una matrice A (della trasformazione lineare associata nella base canonica). Autovalori come radici del polinomio caratteristico e loro molteplicità algebrica.
Autospazio di un autovalore: insieme degli autovettori corrispondenti ad un autovalore (insieme al vettore nullo). È un sottospazio, e la sua dimensione è detta molteplicità geometrica.

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$.

Diagonalizzabilità di una matrice 2×2 come esistenza di 2 autovettori indipendenti. È in particolare verificata in $n = 2$ dimensioni se esistono 2 autovalori distinti.
Se c' è un solo autovalore la matrice può non essere diagonalizzabile,

se il corrispondente autospazio ha dimensione 1, cioè le soluzioni del sistema per gli autovettori sono tutti i multipli di un solo autovettore, ma può accadere che in corrispondenza di un solo autovalore il suo autospazio abbia dimensione 2. Esempio banale di una matrice già diagonale, per capire cosa succede in dimensioni superiori.

6-12-2018

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$ e $n = 3$ (matrici 2×2 e 3×3).

Diagonalizzabilità di una matrice 3×3 come esistenza di 3 autovettori indipendenti, in generale una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile se esistono n autovettori linearmente indipendenti. Equivale alla seguente condizione: la somma delle molteplicità geometriche (cioè le dimensioni degli autospazi) di tutti gli autovalori è pari alla dimensione n dello spazio. Esercizi.

10 - 12 - 2018

Esempi ed esercizi di algebra lineare.

12, 13 - 12 - 2018

Esercizi di riepilogo su tutto il programma e simulazione di esame a cura dei tutori.

15- 12 - 2018

Primo appello scritto