Diario delle lezioni 2015-16
Matematica per Scienze Biologiche e Biotecnologie

NOTA. A causa del numero limitato di ore le dimostrazioni sono state ridotte al minimo. In particolare prima del calcolo differenziale tutti gli enunciati sono stati giustificati intuitivamente, sono stati dimostrati invece i teoremi basilari sul calcolo differenziale e il teorema fondamentale del calcolo integrale.

5-10-2015

Notazioni e concetti intuitivi di logica e di insiemistica: proposizioni, predicati, proposizioni ottenute da predicati applicando i quantificatori, negazione di tali proposizioni, implicazioni ed equivalenze logiche, dimostrazioni dirette e per assurdo, esempi. Appartenenza, insieme vuoto, unione, intersezione, insieme universo, differenza insiemistica, complemento. Coppie ordinate, prodotto cartesiano di insiemi, piano cartesiano come prodotto della retta reale per sé stessa.
Insiemi numerici: presentazione intuitiva degli insiemi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ dei naturali positivi, $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{\pm m : m \in \mathbb{N}^+\}$ dei numeri interi relativi, $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, identificabili con le frazioni $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) se si identificano tra loro le frazioni equivalenti.
Impossibilità dell' operazione di radice quadrata in generale nell' insieme $\mathbb{Q}$, " realtà geometrica" del "numero" $\sqrt{2}$ e conseguente necessità di un insieme numerico "continuo" più grande, l' insieme dei numeri reali. Possibile definizione dei numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici e non, alternativa definizione assiomatica.

7-10-2015

Definizione assiomatica dei numeri reali e conseguenze (qui e in seguito quasi tutto senza dimostrazione, proprietà dei numeri reali, delle operazioni e disuguaglianze tra di essi, delle frazioni etc. che devono essere note operativamente). Equazioni e disequazioni di primo grado e frazionarie semplici. Numeri naturali, interi, razionali come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Simboli $\pm\infty$, intervalli in $\mathbb{R}$.
Equazioni elementari di secondo grado $X^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, numero di soluzioni. Radice quadrata di un numero reale $a \geq 0$ come unico numero *non negativo* $b \geq$ tale che $b^2 = a$, notazione $\pm\sqrt{a}$ per le soluzioni di $X^2 = a$, $a > 0$. Cenni sul fatto che l' esistenza di radici quadrate di ogni numero positivo è conseguenza dell' assioma di continuità, non valido nell' insieme dei numeri razionali.
Trinomi di secondo grado e loro segno, deduzione delle formule per equazioni e disequazioni di secondo grado.

8-10-2015

Nozione generale di funzione tra insiemi, dominio e codominio. Immagine della funzione, funzioni iniettive e suriettive, funzioni biiettive o corrispondenze biunivoche.
Nozione più generale di funzione invertibile come sinonimo di iniettiva, una volta determinata l' immagine.
Nozione di insieme di definizione di una funzione reale di variabile reale e di immagine (a volte chiamate dominio e codominio).
Relazione tra soluzione di equazioni e ricerca delle controimmagini di un elemento del codominio. Esempio della funzione $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Funzioni reali di variabile reale strettamente monotone (crescenti o decrescenti). Soluzioni di equazioni e disequazioni associate a una funzione strettamente monotona per applicazione della funzione inversa.
Densità dei razionali nei reali, possibilità di approssimazione con precisione desiderata di numeri reali con decimali finiti.
Insiemi limitati superiormente, inferiormente. Maggioranti, minoranti di un insieme. Estremo superiore (inferiore) di insiemi limitati superiormente (inferiormente), convenzione $\sup A = +\infty$ nel caso di insiemi non limitati superiormente ($\inf A = -\infty$ nel caso di insiemi non limitati inferiormente). Esempi.

9-10-2015

Definizione delle potenze a^b: caso di esponente naturale positivo, proprietà delle potenze. Estensione a casi più generali che mantenga le proprietà: esponente nullo o intero ($a \neq 0$), esponente razionale (in generale $a > 0$), e caso generale di potenze del tipo a^b con a reale *positivo*, $b \in \mathbb{R}$. Proprietà della funzione esponenziale a^x, sua stretta monotonia (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$). Immagine $(0, +\infty)$ della funzione esponenziale.
Logaritmo in base a, con $a > 0$, $a \neq 1$ come inversa della funzione esponenziale, definito solo per argomenti *positivi*, esempi, grafici.

12-10-2015

Proprietà dei logaritmi. Equazioni e disequazioni elementari di tipo esponenziale o logaritmico risolte per applicazione della funzione inversa. Ancora sulle funzioni iniettive e loro inverse, caso di funzioni non invertibili ma le cui restrizioni a sottoinsiemi del dominio lo sono. Esempio della radice quadrata. Equazioni e disequazioni irrazionali elementari. Esempi. Modulo e sue proprietà. Equazioni e disequazioni elementari con il modulo.

14-10-2015

Richiami di trigonometria. Misura in radianti degli angoli. Seno, coseno e tangente di un angolo, valori particolari, periodicità, relazioni tra queste nozioni, formule trigonometriche di uso comune.
Seno, coseno e tangente come funzioni, grafici.
Arcoseno, arcocoseno e arcotangente come inverse di restrizioni di queste funzioni a domini in cui sono iniettive e hanno per immagine le immagini delle funzioni originarie.
Equazioni elementari per determinare i numeri x che risolvano equazioni del tipo $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, con $a \in [-1, 1]$, $\tan(x) = b$ con $b \in (-\infty, +\infty)$. Esempi.

15-10-2015

Lezione rimandata per l' incontro con il rettore (per i pochi studenti in aula esercizi su vari tipi di equazioni e disequazioni e cenni alle proprietà dei numeri naturali e al principio di induzione.)

16-10-2015

Introduzione al concetto di limite di una funzione $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ nel caso in cui a e l sono numeri reali (per ora intuitiva, descritta con frasi, in seguito sarà resa più precisa anche se le dimostrazioni di tutti le proprietà che saranno enunciate sui limiti non saranno quasi mai svolte).
Definizione di funzione continua in un punto e possibilità di calcolare i limiti del tipo $\lim_{x\to a} f(x)$ "per sostituzione" se f è definita e continua in a: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Continuità di tutte le funzioni elementari finora incontrate.
Estensione della definizione di $\lim_{x\to a} f(x) = l$ al caso in cui a e/o l siano $\pm\infty$.
Enunciato dei teoremi sui limiti e sulle funzioni continue (somme, prodotti, quozienti).
Estensione al caso di operazioni tra infiniti (ragionevolezza delle definizioni che vengono date, e che hanno senso solo se pensate come limiti) e tabella delle operazioni tra infiniti.
Ulteriore estensione (per ora basate sull' analisi dei grafici, rigorosamente sarebbero teoremi da dimostrare) delle operazioni al caso di funzioni elementari valutate negli estremi dell' intervallo di definizione, ad es $e^{-\infty} = 0^+$, $e^{+\infty} = +\infty$, $\log(0^+) = -\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$, $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ etc.
Casi che non sono compresi in questa tabella: forme indeterminate, da analizzare in seguito.

19-10-2015

Definizioni rigorose di limite di funzione, finiti o infiniti, per $x \to a \in \mathbb{R}$, $x \to \pm\infty$, commenti vari sulla definizione che comunque non

useremo, basandoci invece sull' intuizione e su teoremi che non dimostriamo.
Richiami sulle operazioni con gli infiniti e sui valori delle funzioni di base agli estremi del loro intervallo di definizione, in particolare all' infinito. Esempi vari di determinazione del limite in assenza di forme indeterminate.
Esempi di forme indeterminate che tendono a limiti diversi a seconda dell' esempio trattato (motivo del nome di forme indeterminate).
Limiti di funzioni razionali all' infinito [e in zero], spiegazione della regola delle potenze di grado più elevato [più basso] che dominano le altre.
Limiti notevoli:
Definizione di $e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (si dimostra che esiste il limite e si sa valutarlo con approssimazione a piacere).
Deduzione di altri limiti notevoli a partire da quest' ultimo:
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, in particolare
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$, dove d' ora in poi log vorrà dire $\log_e$ (altra notazione molto usata che alterneremo: ln);
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log(a) = \ln(a)$, in particolare
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

21-10-2015

Limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, dimostrazione geometrica.
Limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ e altri limiti elementari dedotti dai limiti notevoli.
Esempi ed esercizi su semplici calcoli di limite.
Enunciato di alcune proprietà delle funzioni continue in un intervallo: teorema di permanenza del segno, teorema degli zeri e dei valori intermedi, teorema di Weierstrass sull' esistenza di punti di massimo e minimo assoluto per funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.
Introduzione al concetto di derivata, interpretazione geometrica, retta tangente. Interpretazione cinematica, velocità istantanea.

22-10-2015

Definizione di funzione derivata, derivata di una funzione in un punto e funzione derivata. Esempio del calcolo della funzione derivata della funzione $f(x) = x^2$.
Calcolo delle derivate delle funzioni esponenziale, seno, coseno.
Derivata della funzione inversa.
Derivata di logaritmo, arcoseno e arcocoseno.

Regole di derivazione, somma, prodotto quoziente.
Derivata delle funzioni tangente e arcotangente.
Derivazione delle funzioni composte, primi esempi di calcolo.
Derivata della funzione potenza a esponente reale.
Tabella di derivate. Esempi di calcolo di funzioni derivate.

23-10-2015

Continuità delle funzioni derivabili.
Esempio del modulo, funzione continua in (ogni punto di) $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0. Derivate destra e sinistra.
Esercizi sul calcolo delle funzioni derivate.
Richiami sulla definizione di punto di massimo e minimo assoluto di una funzione su un intervallo.
Intorno di un punto, definizione di punto di massimo e minimo relativo o locale di una funzione definita su un intervallo.
Teorema di Fermat (condizione necessaria per avere un estremo locale, cioè un massimo o minimo locale).
Teorema di Rolle.

26-10-2015

Calcolo di derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, esempi.
Teorema di Lagrange o del valor medio.
Teorema di de l' Hospital per il calcolo di limiti che presentano una forma indeterminata. Primi esempi di applicazione, calcolo attraverso l' uso combinato del teorema e di altre tecniche note.
Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante, una funzione con derivata non negativa (non positiva) in un intervallo è crescente (decrescente), strettamente se la derivata ha un segno stretto.
Primi elementi per lo studio di una funzione: insieme di definizione, limiti agli estremi degli intervalli del dominio. Monotonia della funzione.
Asintoti orizzontali e verticali, primi esempi.

28-10-2015

Derivate seconde e successive di una funzione.
Convessità e concavità in un punto e in un intervallo.
Relazione tra il segno della derivata seconda e la convessità di una funzione. Punti di flesso di una funzione.
Asintoti obliqui di una funzione infinita all' infinito, regole per calcolarne l' equazione.
Elementi per lo studio di una funzione reale di variabile reale: insieme di definizione; (eventualmente se agevole intersezione con gli assi e segno); limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti orizzontali e/o verticali; studio di eventuali asintoti obliqui per funzioni infinite all'

infinito; studio del segno della derivata per determinare la monotonia, i massimi e i minimi relativi; studio del segno della derivata seconda per determinare intervalli di convessità e concavità e flessi.

29-10-2015

Esercizi sullo studio di funzioni.
Definizione del fattoriale di un numero naturale, cenni sulle successioni reali e i loro limiti.
Ricerca di un polinomio che abbia stesso valore e stesse derivate in un punto di una funzione assegnata $f(x)$ derivabile n volte in un intervallo I: Polinomio di Taylor di una funzione $f(x)$ derivabile n volte in un intervallo a partire da un punto x_0. Primi esempi.

30-10-2015

Infinitesimi di ordine superiore a polinomi, notazione di Landau $o\left((x-x_0)^n\right)$ $(x \to x_0)$.
Formula di Taylor con resto in forma di Peano.
Calcolo delle formule di Taylor-Mac Laurin di uso più comune.
Calcolo di limiti con l' aiuto della formula di Taylor.
Esempi, esercizi.

2-11-2015

Criterio basato sul segno della derivata seconda, e in generale della prima non nulla tra le derivate successive per decidere se un punto critico è di massimo, minimo o flesso, dimostrazione basata sulla formula di Taylor. Esempio di studio di una funzione trigonometrica usando questo criterio.
Introduzione generale al concetto di integrale definito, somme superiori, inferiori, integrale superiore, inferiore.
Integrale come " somma di infiniti prodotti dei valori della funzione $f(x)$ per incrementi infinitesimi.

4-11-2015

Definizione di $\int_a^b f(x)\,dx$, integrale definito da a a b di una funzione continua $f(x)$, come unico elemento separatore tra due insiemi di numeri reali, quello delle aree di plurirettangoli inscritti e quello delle aree dei plurirettangoli circoscritti al grafico di f. Somme di Cauchy del tipo $\sum_{i=1}^N f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, con $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ decomposizione di $[a,b]$ in tanti piccoli intervalli e c_i scelto in $[x_{i-1}, x_i]$ che "tendono" all' integrale di f quando la suddivisione si infittisce, motivazione della notazione $\int_a^b f(x)\,dx$. La variabile x di integrazione è muta, non compare nel risultato finale e può essere sostituita da qualsiasi altra lettera.
Proprietà additiva degli integrali rispetto all' insieme di integrazione,

integrale di somme e prodotti di costanti per funzioni.
Media integrale di una funzione, teorema della media integrale.
Teorema fondamentale del calcolo integrale: la derivata della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (con f continua in $[a,b]$) nel punto $x \in [a,b]$ è la funzione integranda $f(x)$ in quel punto.

5-11-2015

Alcune interpretazioni fisiche del concetto di integrale definito: lavoro di una forza posizionale per moti in una dimensione, massa totale di un filo nota la densità variabile, spazio percorso nota la velocità istantanea in funzione del tempo ... Dagli esempi si vede già perché debba valere il teorema fondamentale del calcolo integrale.
Funzioni primitive di funzioni date $f(x)$ su un intervallo.
Conseguenza del Teorema di Lagrange: due primitive della stessa funzione $f(x)$ in un intervallo differiscono tra loro per una costante.
Formula fondamentale del calcolo integrale : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ se è nota una primitiva $F(x)$ della funzione integranda $f(x)$.
Integrale indefinito $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ se F è una primitiva nota della funzione integranda f.
Tabella di integrali, commenti su casi particolari ($\log(|x|)$, radici ...).

6-11-2015

Primi esempi di integrazione di somme di funzioni della tabella o di prodotti di costanti per funzioni della tabella.
Cenni sul concetto di differenziale di una funzione. Regola pratica per il calcolo formale del differenziale.
Integrazione per sostituzione, caso degli integrali indefiniti e degli integrali definiti (cambio degli estremi di integrazione), due modi per leggerla.
Integrazione per sostituzione immediata: integrali che hanno la forma (o sono facilmente riducibili alla forma) $\int f(g(t))g'(t)\,dt$.
Esempi vari di questo tipo.
Integrazione per parti, regola generale ed esempi vari.

9-11-2015

Esercizi sull' integrazione per sostituzione e per parti.
Integrale delle funzioni razionali. Riduzione al caso di numeratore con grado minore del denominatore con l' aiuto dell' algoritmo di divisione tra polinomi.
Casi del denominatore di secondo grado dipendenti dal segno del discriminante del trinomio. Esempi.
Generalizzazione al caso di gradi superiori, esempi vari.

11-11-2015

Esercizi sull' integrazione di funzioni razionali.
Alcune sostituzioni speciali: funzioni razionali di seno e coseno, funzioni razionali dell' esponenziale.
Altri esempi di sostituzioni (per tentativi) suggerite dalla funzioni integranda.
Esercizi vari sull' uso combinato dell' integrazione per sostituzione e dell' integrazione per parti.
Cenni agli integrali impropri su intervalli infiniti.

12-11-2015

Generalità sulle equazioni differenziali. Ordine di un' equazione, equazioni in forma normale.
Necessità dei valori iniziali per determinare una soluzione univocamente determinata di un' equazione differenziale. Problema di Cauchy per un' equazione di ordine n (con i valori iniziali della funzione incognita e delle sue derivate fino all' ordine $n-1$).
Equazioni del primo ordine a variabile separabili. Eventuali soluzioni costanti. Determinazione delle altre soluzioni mediante separazione delle variabili.
Esempi vari.

13-11-2015

Cenni sui numeri complessi. Soluzioni in campo complesso di equazioni di secondo grado.
Equazioni lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine. Equazione omogenea associata. Polinomio caratteristico, soluzione generale dell' equazione omogenea associata.
Soluzione particolare dell' equazione completa nel caso particolare in cui il termine noto è il prodotto di un polinomio per un esponenziale o di un polinomio per seno o coseno. Esempi.

16-11-2015

Esercizi sulle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine.
Punti di equilibrio, unicità delle soluzioni non costanti di equazioni a variabili separabili, e anche delle soluzioni costanti in ipotesi di derivabilità della funzione di y che compare in $y' = a(t)\, b(y)$.
Cenni su alcuni modelli di dinamica delle popolazioni. Modello malthusiano, equazione logistica, effetto Allee (vedi anche appunti integrativi a cura dei Proff. Guido e Triolo sulla pagina web del corso).

18-11-2015

Vettori applicati nel piano, modulo, direzione e verso. Esempio delle forze in Fisica.

Vettori liberi, calcolo vettoriale su punti di $\mathbb{R}^2$, identificati geometricamente a vettori applicati nell' origine.

Spazio $\mathbb{R}^n$, n naturale positivo, delle n-ple ordinate di numeri reali. Punti di $\mathbb{R}^n$ come vettori n-dimensionali, con n coordinate.
Operazioni per coordinate in $\mathbb{R}^n$: addizione tra vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, cioè per un numero reale.
Prodotto scalare tra due vettori in $\mathbb{R}^n$, dà come risultato un numero reale.

Dipendenza lineare di due o più vettori, equivalenza tra la condizione che una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dia il vettore nullo, e la condizione che uno almeno dei vettori sia combinazione lineare degli altri.

Esempi. Dipendenza lineare di tre vettori nel piano, quattro nello spazio tridimensionale, in generale di m vettori in $\mathbb{R}^n$ se $m > n$.

Definizione di matrice $m \times n$, somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto di una matrice A, $m \times n$, per una matrice B, $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$. Esempi.

19-11-2015

Definizione di insieme di vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Generatori dello spazio $\mathbb{R}^n$. Basi di $\mathbb{R}^n$ come insiemi di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio. Ogni base di $\mathbb{R}^n$ ha n elementi, n è la *dimensione* di $\mathbb{R}^n$.

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Descrizione di un sottospazio tramite un insieme di generatori: $S = \text{ span } (\{v_1, \ldots v_m\})$.

Base di un sottospazio ottenuta eliminando dai generatori eventuali vettori dipendenti (che si esprimono come combinazione lineare degli altri). Esempi in dimensione bassa: sottospazi di $\mathbb{R}^2$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 2 (tutto il piano) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine). Sottospazi di $\mathbb{R}^3$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 3 (tutto lo spazio) , sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l' origine) e di dimensione 2 (piani passanti per l' origine).

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2. Verifica della condizione necessaria e sufficiente di annullamento di un determinante: il determinante è nullo se e solo se i vettori colonna (o vettori riga) sono linearmente dipendenti. Determinante di una matrice quadrata di ordine 3.

20-11-2015

Definizione induttiva di determinante per una matrice quadrata di ogni ordine, proprietà dei determinanti di essere nulli se e solo se le righe, e le colonne, sono linearmente dipendenti. Esistenza della matrice inversa di una matrice quadrata di ordine n non singolare, cioè con determinante non zero.

Rango per minori di una matrice $m \times n$, enunciato dell' equivalenza con il numero massimo di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Scrittura di un sistema lineare di m equazioni in n incognite in forma matriciale: $A\,X\ = Y$, dove A è una matrice $m \times n$, X è il vettore colonna $n \times 1$ delle incognite $x_1, \dots, x_n$, e Y il vettore colonna $m \times 1$ dei termini noti.

Enunciato del Teorema di Cramer e formula per le soluzioni di sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

23-11-2015

Esempi ed esercizi sul calcolo del rango di una matrice e sul teorema di Cramer.

Sistemi quadrati con determinante della matrice dei coefficienti nulla e sistemi non quadrati.
Scrittura del sistema come $x_1 A_1 + \dots x_n A_m = Y$, dove $A_1, \dots, A_n$ sono le colonne della matrice A dei coefficienti.
Teorema di Rouché- Capelli, con idea della dimostrazione.

Esempi vari, casi particolari.

25-11-2015

Svolgimento di esempi ed esercizi sulla risolubilità e sulla soluzione di sistemi lineari, eventualmente con parametro.

Basi di $\mathbb{R}^n$, coordinate di un vettore rispetto ad una base, cambiamenti di base.

Matrice P di cambio di base, definizione come matrice le cui colonne sono le coordinate dei nuovi vettori di base nella vecchia base (base canonica in particolare). Effetto sulle coordinate: se $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ sono le nuove coordinate di un vettore, $P\,X'$ dà le vecchie coordinate $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (nella base canonica negli esempi).
Esempi vari.

Trasformazioni lineari $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, matrice della trasformazione nella base canonica.

26-11-2015

Trasformazioni lineari, matrice associata nella base canonica, matrici in base qualsiasi.

Relazione $A' = P^{-1}AP$ tra la matrici A della trasformazione nella base canonica e la matrice A' della trasformazione nella nuova base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dove P è la matrice del cambio di base.

Problema della diagonalizzazione che conduce alla ricerca di vettori trasformati in un loro multiplo.

Definizione di autovalore e autovettore di una trasformazione lineare (equivalentemente di una matrice associata nella base canonica).

Condizione necessaria affinché un numero reale λ sia un autovalore: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

27-11-2015

Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di una matrice A (della trasformazione lineare associata nella base canonica). Autovalori come radici del polinomio caratteristico e loro molteplicità algebrica.
Autospazio di un autovalore: insieme degli autovettori corrispondenti ad un autovalore. È un sottospazio, e la sua dimensione è detta molteplicità geometrica.

Diagonalizzabilità di una matrice se la somma delle molteplicità geometriche di tutti gli autovalori è pari alla dimensione dello spazio.
La condizione che la somma delle molteplicità algebriche di ogni autovalore sia pari alla dimensione dello spazio è necessaria, ma non sufficiente per la diagonalizzabilità.

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$ e $n = 3$ (matrici 2×2 e 3×3).

30-11-2015

Esercizi di algebra lineare.

2-12-2015

Cenni su integrali impropri del tipo $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.
Integrali convergenti, esempi.

Cenni sul concetto di serie numerica come definizione di "somme di infiniti termini". Convergenza e divergenza.

Esempio della serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, convergenza nel caso di $-1 < q < 1$, determinazione della somma per questi valori di q: $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

3,4,9,10,11 dicembre 2015

Esercizi di riepilogo su tutto il programma.