Diario delle lezioni 2021-22
Analisi Matematica II per Chimica (6 CFU)

5-10-2021

Introduzione alla topologia dello spazio $\mathbb{R}^n$ e alle funzioni (reali o vettoriali) di più variabili reali, notazioni per i punti (o vettori) di $\mathbb{R}^n$, caso del piano $\mathbb{R}^2$ e dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$.

Struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, operazioni di somma e prodotto di un vettore per uno scalare (cioè un numero reale).

Prodotto scalare e sue proprietà, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma di un vettore e sue proprietà. Distanza tra vettori e sue proprietà.

Cenni agli spazi con prodotto scalare, normati, metrici.

6-10-2021

Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$. Angolo tra due vettori non nulli.

Palle aperte, chiuse, sfere di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$.

Punti interni, esterni, di frontiera di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, chiusura di un insieme.

Insiemi aperti e chiusi.

Segmento tra due punti. Insiemi limitati, convessi, connessi, compatti (per ora sinonimo di chiusi e limitati).

Generalità sulle funzioni di più variabili, scalari e vettoriali.

Disuguaglianza elementare tra i moduli delle componenti di un vettore e la sua norma euclidea. Come conseguenza se si definiscono tali concetti in analogia con il caso delle funzioni scalari (di una variabile), possibilità di calcolare limiti, derivate e integrali di funzioni vettoriali di una variabile per componenti.

Definizione dei limiti di funzioni di più variabili reali a valori scalari o vettoriali. Successioni $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ in $\mathbb{R}^m$ e loro limiti.

7-10-2021

Definizione di limiti e continuità di funzioni di più variabili reali a valori scalari o vettoriali.

Insiemi compatti. Teorema di Bolzano Weierstrass. Gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati.

Difficoltà del calcolo in alcuni casi particolari, uso delle coordinate polari. Continuità delle funzioni elementari.

Introduzione operativa alle derivate parziali di funzioni scalari di più variabili e al loro calcolo.

Derivate parziali e direzionali di una funzione in un punto, gradiente di una funzione,

12-10-2021

Necessità di una nozione più forte di derivabilità, concetto di differenziabilità come possibilità di linearizzare localmente l' incremento di una funzione.

Differenziale di una funzione come operatore lineare che agisce sull' incremento.

Enunciati di due teoremi che danno il primo una condizione necessaria per la differenziabilità (e specifica che l' operatore lineare della definizione è l' operatore di moltiplicazione scalare per il gradiente) e il secondo una condizione sufficiente per la differenziabilità (teorema del differenziale totale).

Dimostrazione della condizione necessaria di differenziabilità. Derivabilità rispetto a ogni direzione e continuità delle funzioni differenziabili, identificazione della trasformazione lineare nella definizione: è il prodotto scalare con il gradiente della funzione.

13-10-2021

Dimostrazione del teorema del differenziale totale.

Differenziabilità delle funzioni di uso comune come conseguenza della continuità delle loro derivate parziali.

Piano tangente in un punto del grafico di una funzione differenziabile.

Esercizi sul calcolo delle derivate parziali. Significato geometrico del gradiente, se non nullo (direzione di massima crescita di una funzione).

Teorema di Lagrange o del valor medio per funzioni scalari di più variabili.

Qualche semplice esercizio sulla differenziabilità di funzioni.

14-10-2021

Ancora sulla dimostrazione dei teoremi sulla differenziabilità, uso della funzione di una variabile $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ e sua derivata se f è differenziabile.

Funzioni a valori vettoriali di una variabile reale, limiti e derivate calcolati per componenti grazie a disuguaglianze elementari viste in lezioni precedenti.

Funzioni vettoriali di più variabili reali, funzioni $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vettore derivata parziale di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali. Matrice jacobiana di una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$: ha per colonne i vettori derivate parziali e per righe i gradienti delle componenti.

Differenziabilità di una funzione vettoriale. Differenziale come operatore lineare $f'(x) = df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, rappresentato nella base canonica dalla matrice jacobiana di f.

Teorema di Lagrange per funzioni a valori vettoriali, valido come disuguaglianza e non come uguaglianza.

Teorema del differenziale di una funzione composta $h = g \circ f$ (enunciato).

19-10-2021

Teorema del differenziale di una funzione composta $h = g \circ f$ e conseguente "regola della catena " per il calcolo delle derivate parziali di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali.

Caso particolare importante: $g = g(x_1, \ldots, x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1(t), \ldots x_n(t)) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $h(t) = g(x_1(t), \ldots x_n(t))$, $h'(t) = \nabla g(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{x}(t))\, x_k'(t)$.

Caso di funzioni composte del tipo $f(x, y(x))$, $f(x, y, z(x, y))$ e altri esempi vari.

Norma di una matrice e disuguaglianza di Cauchy- Schwarz generalizzata. Introduzione con esempi al calcolo di derivate seconde di una funzione scalare di più variabili.

Derivate seconde e successive di una funzione scalare (o vettoriale) di più variabili reali, matrice hessiana.

Teorema di Schwarz o dell' inversione dell' ordine di derivazione (enunciato).

20-10-2021

Richiami sulle forme quadratiche associate ad una matrice quadrata simmetrica, forme definite, semidefinite, indefinite. Caso delle matrici diagonali.

Cenno all' enunciato del teorema spettrale e conseguenze per le forme quadratiche. Criterio di Sylvester per determinare il carattere di una forma quadratica.

Funzioni di classe C^2.

Enunciato e dimostrazione della formula di Taylor del secondo ordine con resto in forma di Lagrange e in forma di Peano.

21-10-2021

Massimi e minimi locali ("liberi") di funzioni di più variabili. Teorema di Fermat. Punti critici di una funzione.

Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per punti di min / max locale e punti di sella, basati sul segno della matrice hessiana in un punto critico o in un intorno. Esempi.

26-10-2021

Esercizi sui massimi e minimi liberi.

Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametri.

Richiami sulla definizione di integrale definito per funzioni reali di una variabile reale.

Definizione di integrabilità e di integrale doppio su rettangoli per una funzione limitata reale di due variabili.

27-10-2021

Definizione di integrabilità e di integrale doppio su rettangoli per una funzione limitata reale di due variabili.

Enunciato delle proprietà degli integrali doppi.

Formule di riduzione su rettangoli, esempi.

Insiemi limitati di misura (bi-dimensionale, area) nulla in $\mathbb{R}^2$.

Enunciato del teorema sull' integrabilità di funzioni limitate su rettangoli, continue tranne che su un insieme di misura nulla.

Definizione di integrabilità e integrale di una funzione esteso a un insieme limitato S. Definizione di misurabilità e di misura di un insieme limitato. Un insieme limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla, conseguente integrabilità di funzioni continue su insiemi misurabili.

Insiemi semplici rispetto a un asse e loro misurabilità.

Formule di riduzione per gli integrali di funzioni continue su insiemi semplici, calcolo dell' integrale doppio come integrale iterato.

28-10-2021

Esempi ed esercizi sulle formule di riduzione per gli integrali di funzioni continue su insiemi semplici, calcolo dell' integrale doppio come integrale iterato.

Diffeomorfismi (trasformazioni regolari di coordinate) tra aperti di $\mathbb{R}^2$.

Formula di cambio di variabili negli integrali doppi.

Esempio di cambi di variabile generali suggeriti dalla funzione integranda e/o dall' insieme di integrazione.

Coordinate polari e e determinante jacobiano della trasformazione, formula di integrazione in coordinate polari.

Variante delle coordinate polari per l' ellisse.

02-11-2021

Esercizi sulla formula di integrazione in coordinate polari.

Cenno sugli integrali impropri in $\mathbb{R}^2$ e calcolo dell' integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ usando integrali doppi.

Definizioni e proprietà degli integrali tripli, su parallelepipedi, insiemi di misura (volume) nulla, insiemi misurabili, integrali di funzioni continue su insiemi misurabili.

03-11-2021

Insiemi semplici in $\mathbb{R}^3$ e formule di riduzione.

Integrazione per fili e per strati.

Enunciato del teorema sul cambio di variabili in un integrale triplo.

Complementi di algebra: area di un parallelogramma generato da due vettori in $\mathbb{R}^2$ e volume di un parallelepipedo generato da tre vettori in $\mathbb{R}^3$ calcolati come moduli dei determinanti associati. Prodotto vettoriale di due vettori in $\mathbb{R}^3$, area di un parallelogramma generato da due vettori in $\mathbb{R}^3$ come norma del prodotto vettoriale.

Spiegazione intuitiva della presenza dello jacobiano come fattore locale di ingrandimento delle aree nella formula di cambio di variabile per integrali doppi e per tripli.

04-11-2021

Cambi di coordinate per integrali tripli.

Coordinate cilindriche e sferiche, con analoghe coordinate per l' ellissoide, e corrispondenti formule di cambio di variabile.

Solidi di rotazione e uso delle coordinate cilindriche. Volume di cilindro e cono e integrali tripli estesi a questi insiemi. Cenno sul toro.

Sfera, ellissoide e loro volumi. Uso delle coordinate sferiche per integrali su insiemi a simmetria sferica e/o funzioni a simmetria sferica. Esempi.

09-11-2021

Esercizi di riepilogo sugli integrali doppi e tripli.

Definizioni e prime proprietà relative alle curve. Parametrizzazioni continue, di classe C^1, regolari.

Versore tangente. Curve chiuse, semplici, cartesiane, esempi.

10-11-2021

Parametrizzazioni equivalenti (equiverse e controverse).

Lunghezza di una curva di classe C^1, esempi.

Proprietà dell' integrale di funzioni vettoriali: teorema fondamentale del calcolo, disuguaglianza $\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt$.

11-11-2021

Ascissa curvilinea, parametrizzazione naturale. Cenni sulla curvatura (senza segno) di una curva.

Integrali curvilinei di prima specie o rispetto alla lunghezza d' arco di funzioni scalari.

Esempi di calcolo di lunghezze ed integrali curvilinei.

Applicazione fisica delle curve: decomposizione dell' accelerazione in una componente tangenziale e in una componente radiale.

16-11-2021

Integrali curvilinei di seconda specie di campi vettoriali continui su curve C^1 a tratti e loro proprietà. Linguaggio delle forme differenziali. Esempi di calcolo.

Teorema e formula di Green (con dimostrazione).

Forme differenziali esatte (campi vettoriali conservativi) in un insieme, primitive di una forma.

Calcolo dell' integrale curvilineo di una forma esatta come primitiva nel punto finale meno primitiva nel punto iniziale della curva.

Esempi.

17-11-2021

Dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l' esattezza (circuitazioni nulle, dipendenza dell' integrale curvilineo dagli estremi della curva).

Forme differenziali chiuse (campi irrotazionali). Dimostrazione della chiusura di una forma come condizione necessaria per l' esattezza.

Controesempio canonico: $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$.

Introduzione agli insiemi semplicemente connessi nel piano e uso della formula di Green per dimostrare che la chiusura di una forma è anche condizione sufficiente per l' esattezza in insiemi semplicemente connessi del piano.

Calcolo di primitive di forme esatte con il metodo degli integrali indefiniti, primi esempi.

18-11-2021

Omotopia tra circuiti in un aperto connesso A.

Teorema di invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme chiuse.

Dimostrazione nel caso di una regione compresa tra due curve e Teorema di Green per esempi di regioni molteplicemente connesse.

Definizione generale di insieme semplicemente connesso.

Esempi vari.

Calcolo di primitive di forme esatte con il metodo degli integrali indefiniti.

Esempi ed esercizi sulle forme differenziali.

23-11-2021

Integrali curvilinei di seconda specie espressi come integrali di prima specie nel caso di curve regolari usando il versore tangente.

Versore normale esterno sul bordo di un aperto regolare del piano e formulazione equivalente del teorema di Green come Teorema della divergenza nel piano.

Introduzione alle superfici in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzazioni regolari.

Prodotto vettoriale fondamentale e versore normale. Superfici cartesiane. Esempi.

24-11-2021

Area di una superficie, elemento di area, calcolo per la sfera e per le superfici cartesiane.

Integrali di superficie (di prima specie) di funzioni scalari. Caso delle superfici cartesiane.

Esempi.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata (dalla scelta di un versore normale continuo sulla superficie).

Superficie S (senza bordo) che sia frontiera di un aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^3$, versore normale esterno.

25-11-2021

Superfici con bordo e senza bordo. Superfici orientabili, orientazione di una superficie.

Operatori gradiente di un campo scalare, rotore e divergenza di un campo vettoriale.

Superficie S (senza bordo) che sia frontiera di un aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^3$, versore normale esterno.

Enunciato del Teorema della divergenza. Esempi.

Cenni sul Teorema di Stokes: orientazione indotta sul bordo di una superficie, enunciato del teorema.

30 - 11 - 2021

Funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y) = 0$. Teorema di Dini o delle funzioni implicite in 2 dimensioni (con dimostrazione).

Calcolo del valore della funzione $y = y(x)$ e delle sue derivate nel punto iniziale x_0.

Esempi.

01 - 12 - 2021

Retta tangente a una curva in $\mathbb{R}^2$ definita implicitamente: il vettore ∇G è ortogonale al vincolo.

Massimi e minimi vincolati di funzioni $f(x, y)$ di 2 variabili, teorema di Lagrange.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per il calcolo di massimi e minimi assoluti di funzioni di due variabili su curve definite da un vincolo, o su compatti che hanno una tale curva come frontiera.

02 - 12 - 2021

Estensione al caso di funzioni $z = z(x, y)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y, z) = 0$ in $\mathbb{R}^3$ e più in generale al caso di ipersuperfici in $\mathbb{R}^{n+1}$: funzioni $x_{n+1} = x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Interpretazione della funzione G come vincolo. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange per massimi e minimi vincolati di funzioni $f(x, y, z)$ di 3 variabili su superfici definite da un vincolo.

Cenno al teorema di Dini nel caso di più vincoli e al metodo dei moltiplicatori di Lagrange corrispondente.

Caso di curve in $\mathbb{R}^3$ definite attraverso due vincoli.

Cenno al caso generale di varietà di dimensione k e codimensione m in $\mathbb{R}^n$, $k + m = n$.

07 - 12 - 2021

Esercizi sulle funzioni implicite e sui massimi e minimi vincolati.

Serie numeriche. Convergenza e divergenza. Serie telescopiche. Serie geometrica.

Serie a termini positivi (o negativi), sono sempre determinate, convergenti o divergenti.

Criterio necessario di convergenza.

Dimostrazione del criterio di confronto e del criterio di confronto asintotico e dei criteri del rapporto e della radice. Esempi.

09 - 12 - 2021

Dimostrazione del criterio di confronto con un integrale improprio.

Convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ per $\alpha > 1$ e loro uso insieme al criterio di confronto asintotico e agli sviluppi di Taylor.

Serie con termini di segno variabile. Convergenza semplice ed assoluta.

Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. Esempi.

14- 12 - 2021

Introduzione alle serie di funzioni. Serie di potenze. Raggio di convergenza.

Infinita derivabilità nell' intervallo di convergenza della funzione somma di una serie di potenze.

Serie di Taylor di una funzione di classe C^{∞} in un intervallo. Una serie di potenze è la serie di Taylor della funzione somma nell' intervallo di convergenza.

Controesempio del viceversa: non ogni funzione di classe C^{∞} è analitica, cioè sviluppabile in serie di potenze.

Serie di Taylor e relativa convergenza di alcune funzioni elementari.

15 - 12 - 2021

Esempi ed esercizi sulle serie numeriche e di potenze.

Cenni sulle serie di Fourier. Polinomi e serie trigonometriche. Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione periodica. Convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione di classe C^1 a tratti. Cenni sugli spazi di Hilbert e interpretazione dei risultati sulle serie di Fourier come estensione del caso familiare degli spazi $\mathbb{R}^n$.

Esercizi di riepilogo su tutto il programma.

16 - 12 - 2021

Esercizi di riepilogo su tutto il programma.