Diario delle lezioni 2020-21
Analisi Matematica 2 per Chimica (6 CFU)

1-10-2020

Introduzione alla topologia dello spazio $\mathbb{R}^n$ e alle funzioni (reali o vettoriali) di più variabili reali, notazioni per i punti (o vettori) di $\mathbb{R}^n$, caso del piano $\mathbb{R}^2$ e dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$.

Struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, operazioni di somma e prodotto di un vettore per uno scalare (cioè un numero reale).

Prodotto scalare e sue proprietà, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma di un vettore e sue proprietà. Distanza tra vettori e sue proprietà.

Cenni agli spazi con prodotto scalare, normati, metrici.

5-10-2020

Prodotto scalare, norma e distanza in $\mathbb{R}^n$. Angolo tra due vettori non nulli.

Palle aperte, chiuse, sfere di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$.

Punti interni, esterni, di frontiera di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, chiusura di un insieme.

Insiemi aperti e chiusi.

Segmento tra due punti. Insiemi limitati, convessi, connessi, compatti (per ora sinonimo di chiusi e limitati).

Generalità sulle funzioni di più variabili, scalari e vettoriali.

Disuguaglianza elementare tra i moduli delle componenti di un vettore e la sua norma euclidea. Come conseguenza se si definiscono tali concetti in analogia con il caso delle funzioni scalari (di una variabile), possibilità di calcolare limiti, derivate e integrali di funzioni vettoriali di una variabile per componenti.

7-10-2020

Definizione dei limiti di funzioni di più variabili reali a valori scalari o vettoriali.

Successioni $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ in $\mathbb{R}^m$ e loro limiti. Insiemi compatti. Teorema di Bolzano Weierstrass. Gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati. Difficoltà del calcolo in alcuni casi particolari, uso delle coordinate polari. Continuità delle funzioni elementari.

Introduzione operativa alle derivate parziali di funzioni scalari di più variabili e al loro calcolo.

8-10-2020

Derivate parziali e direzionali di una funzione in un punto, gradiente di una funzione, esempi.

Necessità di una nozione più forte di derivabilità, concetto di differenziabilità come possibilità di linearizzare localmente l' incremento di una funzione.

Differenziale di una funzione come operatore lineare che agisce sull' incremento.

Enunciati di due teoremi che danno il primo una condizione necessaria per la differenziabilità (e specifica che l' operatore lineare della definizione è l' operatore di moltiplicazione scalare per il gradiente) e il secondo una condizione sufficiente per la differenziabilità (teorema del differenziale totale).

12-10-2020

Dimostrazione dei teoremi che danno una condizione necessaria per la differenziabilità e una condizione sufficiente (teorema del differenziale totale).

Derivabilità rispetto a ogni direzione e continuità delle funzioni differenziabili, identificazione della trasformazione lineare nella definizione: è il prodotto scalare con il gradiente della funzione.

Differenziabilità delle funzioni di uso comune come conseguenza della continuità delle loro derivate parziali.

Piano tangente in un punto del grafico di una funzione differenziabile.

14-10-2020

Esercizi sul calcolo delle derivate parziali.

Significato geometrico del gradiente, se non nullo (direzione di massima crescita di una funzione).

Ancora sulla dimostrazione dei teoremi sulla differenziabilit, uso della funzione di una variabile $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}$ e sua derivata se f è differenziabile.

Teorema di Lagrange o del valor medio per funzioni scalari di più variabili.

Qualche semplice esercizio sulla differenziabilità di funzioni.

15-10-2020

Funzioni a valori vettoriali di una variabile reale, limiti e derivate calcolati per componenti grazie a disuguaglianze elementari viste in lezioni precedenti.

Funzioni vettoriali di più variabili reali, funzioni $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vettore derivata parziale di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali. Matrice jacobiana di una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots f_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$: ha per colonne i vettori derivate parziali e per righe i gradienti delle componenti.

Differenziabilità di una funzione vettoriale di più variabili reali.

Differenziale come operatore lineare $f'(x) = df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, rappresentato nella base canonica dalla matrice jacobiana di f.

Teorema del differenziale di una funzione composta $h = g \circ f$ (enunciato) e conseguente "regola della catena " per il calcolo delle derivate parziali di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali.

19-10-2020

Norma di una matrice e disuguaglianza di Cauchy- Schwarz generalizzata.

Teorema del differenziale di una funzione composta $h = g \circ f$ (enunciato) e conseguente "regola della catena " per il calcolo delle derivate parziali di una funzione vettoriale derivabile di più variabili reali.

Caso particolare importante: $g = g(x_1, \dots, x_n) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots x_n(t)) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $h(t) = g(x_1(t), \dots x_n(t))$, $h'(t) = \nabla g(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{x}(t))\, x'_k(t)$.

Caso di funzioni composte del tipo $f(x, y(x))$ e altri esempi vari.

Introduzione con esempi al calcolo di derivate seconde di una funzione scalare di più variabili.

Forme quadratiche associate ad una matrice quadrata simmetrica, forme definite, semidefinite, indefinite. Caso delle matrici diagonali.

21-10-2020

Cenno all' enunciato del teorema spettrale e conseguenze per le forme quadratiche. Criterio di Sylvester per determinare il carattere di una forma quadratica.

Derivate seconde e successive di una funzione scalare (o vettoriale) di più variabili reali, matrice hessiana.

Teorema di Schwarz o dell' inversione dell' ordine di derivazione (enunciato). Funzioni di classe C^2.

Enunciato e dimostrazione della formula di Taylor del secondo ordine con resto in forma di Lagrange e in forma di Peano.

22-10-2020

Massimi e minimi locali ("liberi") di funzioni di più variabili.

Teorema di Fermat. Punti critici di una funzione.

Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per punti di minimo / massimo locale e punti di sella basati sul segno della matrice hessiana in un punto critico o in un intorno.

Esempi.

26-10-2020

Teorema di Lagrange per funzioni a valori vettoriali, valido come disuguaglianza e non come uguaglianza.

Norma di una matrice, dimostrazione del Teorema sul differenziale di una funzione composta.

Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametri.

Esercizi sui massimi e minimi liberi.

28-10-2020

Richiami sulla definizione di integrale definito per funzioni reali di una variabile reale.

Definizione di integrabilità e di integrale doppio su rettangoli per una funzione limitata reale di due variabili.

Enunciato delle proprietà degli integrali doppi.

Formule di riduzione su rettangoli, esempi.

Insiemi limitati di misura (bi-dimensionale, area) nulla in $\mathbb{R}^2$.

Enunciato del teorema sull' integrabilità di funzioni limitate su rettangoli, continue tranne che su un insieme di misura nulla.

29-10-2020

Esempi dell' uso delle formule di riduzione su rettangoli.

Definizione di integrabilità e integrale di una funzione esteso a un insieme limitato S. Definizione di misurabilità e di misura di un insieme limitato. Un insieme limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla, conseguente integrabilità di funzioni continue su insiemi misurabili.

Insiemi semplici rispetto a un asse e loro misurabilità.

02-11-2020

Formule di riduzione per gli integrali di funzioni continue su insiemi semplici, calcolo dell' integrale doppio come integrale iterato.

Esempi ed esercizi.

Diffeomorfismi (trasformazioni regolari di coordinate) tra aperti di $\mathbb{R}^2$.

Formula di cambio di variabili negli integrali doppi.

Esempio di cambi di variabile generali suggeriti dalla funzione integranda e/o dall' insieme di integrazione.

04-11-2020

Complementi di algebra: area di un parallelogramma generato da due vettori in $\mathbb{R}^2$ e volume di un parallelepipedo generato da tre vettori in $\mathbb{R}^3$ calcolati come moduli dei determinanti associati.

Prodotto vettoriale di due vettori in $\mathbb{R}^3$, area di un parallelogramma generato da due vettori in $\mathbb{R}^3$ come norma del prodotto vettoriale.

Spiegazione intuitiva della presenza dello jacobiano come fattore locale di ingrandimento delle aree nella formula di cambio di variabile.

Coordinate polari e e determinante jacobiano della trasformazione, formula di integrazione in coordinate polari.

05-11-2020

Coordinate polari e loro variante per l' ellisse.

Primi esercizi sulla formula di integrazione in coordinate polari.

Cenno sugli integrali impropri in $\mathbb{R}^2$ e calcolo dell' integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ usando integrali doppi.

Definizioni e proprietà degli integrali tripli, insiemi di misura (volume) nulla, insiemi misurabili.

09-11-2020

Esercizi sugli integrali doppi.

Insiemi semplici in $\mathbb{R}^3$ e formule di riduzione.

Integrazione per fili e per strati.

Cambi di coordinate per integrali tripli.

Coordinate cilindriche e sferiche, con analoghe coordinate per l' ellissoide, e corrispondenti formule di cambio di variabile.

11-11-2020

Solidi di rotazione e uso delle coordinate cilindriche. Volume di cilindro e cono e integrali tripli estesi a questi insiemi. Cenno sul toro.

Sfera, ellissoide e loro volumi. Uso delle coordinate sferiche per integrali su insiemi a simmetria sferica e/o funzioni a simmetria sferica. Esempi. Esercizi di riepilogo sugli integrali doppi e tripli.

12-11-2020

Definizioni e prime proprietà relative alle curve. Parametrizzazioni continue, di classe C^1, regolari.

Versore tangente. Parametrizzazioni equivalenti (equiverse e controverse).

Curve chiuse, semplici, cartesiane, esempi.

16-11-2020

Lunghezza di una curva di classe C^1, esempi di calcolo.

Integrali curvilinei di prima specie o rispetto alla lunghezza d' arco di funzioni scalari.

Ascissa curvilinea, parametrizzazione naturale. Cenni sulla curvatura (senza segno) di una curva.

Esempi ed esercizi.

Integrali curvilinei di seconda specie di campi vettoriali continui su curve C^1 a tratti e loro proprietà. Linguaggio delle forme differenziali. Esempi di calcolo.

18-11-2020

Teorema e formula di Green.

Forme differenziali esatte (campi vettoriali conservativi) in un insieme, primitive di una forma.

Calcolo dell' integrale curvilineo di una forma esatta come primitiva nel punto finale meno primitiva nel punto iniziale della curva.

Esempi.

19-11-2020

Dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l' esattezza (circuitazioni nulle, dipendenza dell' integrale curvilineo dagli estremi della curva).

Forme differenziali chiuse (campi irrotazionali). Dimostrazione della chiusura di una forma come condizione necessaria per l' esattezza.

Controesempio canonico: $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$.

Introduzione agli insiemi semplicemente connessi nel piano e uso della formula di Green per dimostrare che la chiusura di una forma è anche condizione sufficiente per l' esattezza in insiemi semplicemente connessi del piano.

Calcolo di primitive di forme esatte con il metodo degli integrali indefiniti, primi esempi.

23-11-2020

Invarianza per omotopia degli integrali curvilinei di forme chiuse.

Caso di una regione compresa tra due curve e Teorema di Green per esempi di regioni molteplicemente connesse.

Definizione generale di insieme semplicemente connesso.

Esempi vari.

Calcolo di primitive di forme esatte con il metodo degli integrali indefiniti.

25-11-2020

Esempi ed esercizi sulle forme differenziali.

Integrali curvilinei di seconda specie espressi come integrali di prima specie nel caso di curve regolari usando il versore tangente.

Versore normale esterno sul bordo di un aperto regolare del piano e formulazione equivalente del teorema di Green come Teorema della divergenza nel piano.

Superfici in $\mathbb{R}^3$. Parametrizzazioni regolari.

Prodotto vettoriale fondamentale e versore normale. Superfici cartesiane. Esempi.

Introduzione al concetto di area di una superficie, elemento di area.

26 - 11 - 2020

Area di una superficie, elemento di area, calcolo per la sfera e per le superfici cartesiane.

Integrali di superficie (di prima specie) di funzioni scalari. Caso delle superfici cartesiane.

Esempi.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata (dalla scelta di un versore normale continuo sulla superficie).

Superficie S (senza bordo) che sia frontiera di un aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^3$, versore normale esterno.

Introduzione al teorema della divergenza.

30 - 11 - 2020

Superfici con bordo e senza bordo. Superfici orientabili, orientazione di una superficie.

Operatori gradiente di un campo scalare, rotore e divergenza di un campo vettoriale.

Superficie S (senza bordo) che sia frontiera di un aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^3$, versore normale esterno.

Teorema della divergenza. Esempi.

Cenni sul Teorema di Stokes: orientazione indotta sul bordo di una superficie, enunciato del teorema.

2 - 12 - 2020

Funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y) = 0$. Teorema di Dini o delle funzioni implicite in 2 dimensioni (con dimostrazione).

Estensione al caso di funzioni $z = z(x, y)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x, y, z) = 0$ in $\mathbb{R}^3$ e più in generale al caso di ipersuperfici in $\mathbb{R}^{n+1}$: funzioni $x_{n+1} = x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$ definite implicitamente da un' equazione del tipo $G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Interpretazione della funzione G come vincolo.

3 - 12 - 2020

Retta tangente a una curva in $\mathbb{R}^2$ (piano tangente a una superficie in $\mathbb{R}^3$) definita implicitamente: il vettore ∇G è ortogonale al vincolo.

Cenno al caso generale e al concetto di spazio tangente.

Massimi e minimi vincolati di funzioni $f(x, y)$ di 2 variabili (funzioni $f(x, y, z)$ di 3 variabili) con un vincolo $G(x, y) = 0$ $(G(x, y, z) = 0)$. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Cenno al teorema di Dini nel caso di più vincoli e al metodo dei moltiplicatori di Lagrange corrispondente.

Caso di curve in $\mathbb{R}^3$ definite attraverso due vincoli.

9 - 12 - 2020

Esercizi sulle funzioni implicite e sui massimi e minimi vincolati.

Casi di un vincolo in due e tre dimensioni, caso di due vincoli in tre dimensioni.

Serie numeriche. Convergenza e divergenza. Serie telescopiche. Serie geometrica.

10 - 12 - 2020

Serie a termini positivi (o negativi), sono sempre determinate, convergenti o divergenti.

Dimostrazione del criterio di confronto e del criterio di confronto asintotico e dei criteri del rapporto e della radice. Esempi.

Criterio di confronto con un integrale improprio.

Convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$.

14- 12 - 2020

Dimostrazione del criterio di confronto con un integrale improprio. Caso delle serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ e loro uso insieme al criterio di confronto asintotico e agli sviluppi di Taylor.

Serie con termini di segno variabile. Convergenza semplice ed assoluta.

Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. Esempi.

16 - 12 - 2020

Introduzione alle serie di funzioni. Serie di potenze. Raggio di convergenza.

Infinita derivabilità nell' intervallo di convergenza della funzione somma di una serie di potenze.

Serie di Taylor di una funzione di classe C^∞ in un intervallo. Una serie di potenze è la serie di Taylor della funzione somma nell' intervallo di convergenza.

Controesempio del viceversa: non ogni funzione di classe C^∞ è analitica, cioè sviluppabile in serie di potenze.

Serie di Taylor e relativa convergenza di alcune funzioni elementari.

17 - 12 - 2020

Esempi ed esercizi sulle serie numeriche e di potenze.

Esercizi di riepilogo su tutto il programma.