

Diario delle lezioni 2024-25
Analisi Matematica I (9CFU) per Chimica

30-09-2024

Notazioni e concetti intuitivi di logica e di insiemistica. Proposizioni, predicati, quantificatori ($\forall$, $\exists$), implicazioni ed equivalenze logiche, dimostrazioni dirette e per assurdo, esempi. Appartenenza, insieme vuoto, unione, intersezione, insieme universo, differenza insiemistica, complemento.

Nozione generale di funzione tra insiemi, dominio e codominio. Grafico di una funzione.

Immagine della funzione, funzioni iniettive e suriettive, funzioni biiettive o corrispondenze biunivoche.

Nozione più generale di funzione invertibile, qui usata come sinonimo di iniettiva, una volta determinata l'immagine.

Nozione di insieme di definizione di una funzione reale di variabile reale e di immagine (a volte chiamate dominio e codominio).

Coppie ordinate, prodotto cartesiano di insiemi, piano cartesiano come prodotto della retta reale per sé stessa. Cenni sulle relazioni binarie di cui le funzioni sono un caso particolare.

02-10-2024

Insiemi numerici: presentazione intuitiva degli insiemi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ dei naturali positivi, $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{\pm m : m \in \mathbb{N}^+\}$ dei numeri interi relativi, $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, identificabili con le frazioni $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) se si identificano tra loro le frazioni equivalenti.

Impossibilità dell'operazione di radice quadrata in generale nell'insieme $\mathbb{Q}$, "realtà geometrica" del "numero" $\sqrt{2}$ e conseguente necessità di un insieme numerico "continuo" più grande, l'insieme dei numeri reali. Possibile definizione dei numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici e non, alternativa definizione assiomatica.

Assiomi dei numeri reali. Assiomi di campo e di ordine.

Assioma di continuità o completezza di $\mathbb{R}$.

Funzioni composte. Insiemi di definizione di funzioni composte come determinazione delle controimmagini di funzioni che sono elementi della funzione composta. Definizione (in questa e nelle prossime lezioni) delle funzioni elementari di base, dei loro domini e immagini.

03-10-2024

Conseguenze degli assiomi di campo e di ordine: proprietà dei numeri reali, delle operazioni e disuguaglianze tra di essi, delle frazioni etc. che devono essere note operativamente. Equazioni e disequazioni di primo grado e frazionarie semplici.

Numeri naturali, interi, razionali come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Simboli $\pm\infty$, definizione degli intervalli in $\mathbb{R}$.

Proprietà degli estremi degli intervalli e conseguente generalizzazione: insiemi limitati superiormente, inferiormente, maggioranti, minoranti di un insieme, estremo superiore (inferiore) di insiemi limitati superiormente (inferiormente).

Assioma dell'estremo superiore (inferiore) equivalente all'assioma di continuità.

Convenzione $\sup A = +\infty$ nel caso di insiemi non limitati superiormente ($\inf A = -\infty$ nel caso di insiemi non limitati inferiormente) e conseguente esistenza degli estremi superiore e inferiore per ogni insieme non vuoto. Esempi.

Funzioni costanti e lineari. Enunciato del Teorema fondamentale che afferma l'esistenza e unicità della radice n -esima non negativa, $n \in \mathbb{N}^+$, di un numero reale $a \geq 0$.

Radice quadrata di un numero reale come unico numero *non negativo* $b \geq 0$ tale che $b^2 = a$, notazione $\pm\sqrt{a}$ per le soluzioni di $X^2 = a$, $a > 0$.

Estensione al caso delle radici n -esime, differenza sostanziale tra il caso di n pari e n dispari.

04-10-2024

L' esistenza di radici quadrate (n -esime) di ogni numero non negativo equivale al teorema che dice che l' immagine della funzione $f(x) = x^2$ è tutto l' intervallo $[0, +\infty)$ (sarà dimostrato in seguito), che a sua volta è conseguenza dell' assioma di continuità, non valido nell' insieme dei numeri razionali.

Equazioni elementari di secondo grado $X^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, numero di soluzioni.

Modulo o valore assoluto e sue proprietà. Soluzioni di $X^2 = A$, $X^2 < A$, $X^2 > A$ espresse con il modulo.

Equazioni e disequazioni con il modulo.

Trinomi di secondo grado e loro segno, deduzione delle formule per equazioni e disequazioni di secondo grado.

Funzioni reali di variabile reale strettamente monotone (crescenti o decrescenti). Soluzioni di equazioni e disequazioni associate a una funzione strettamente monotona per applicazione della funzione inversa.

Esempio delle funzioni $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ancora sulle funzioni iniettive e loro inverse, caso di funzioni non invertibili ma le cui restrizioni a sottoinsiemi del dominio lo sono. Esempio delle funzioni quadrato e radice quadrata.

Equazioni e disequazioni irrazionali.

07-10-2024

Esempi di equazioni irrazionali e con il modulo.

Definizione delle potenze a^b : caso di esponente naturale positivo, proprietà delle potenze. Estensione a casi più generali che mantenga le proprietà: esponente nullo o intero ($a \neq 0$), esponente razionale (in generale $a > 0$), e caso generale di potenze del tipo a^b con a reale *positivo*, $b \in \mathbb{R}$.

Proprietà della funzione esponenziale a^x , sua stretta monotonia (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$).

Teorema: l' immagine della funzione esponenziale è tutto l' intervallo $(0, +\infty)$.

Logaritmo in base a , con $a > 0$, $a \neq 1$ come inversa della funzione esponenziale, definito solo per argomenti *positivi*, esempi, grafici.

Proprietà delle potenze e dei logaritmi.

Relazione tra soluzione di equazioni e ricerca delle controimmagini di un elemento del codominio.

Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari.

Richiami di trigonometria. Misura in radianti degli angoli. Seno, coseno e tangente di un angolo, valori particolari, periodicità, relazioni tra queste nozioni, formule trigonometriche di uso comune.

08-10-2024

Seno, coseno e tangente come funzioni, grafici.

Qualche formula di trigonometria.

Arcoseno, arcocoseno e arcotangente come inverse di restrizioni di queste funzioni a domini in cui sono iniettive e hanno per immagine le immagini delle funzioni originarie, stretta crescita di arcoseno e arcotangente, stretta decrescenza dell' arcocoseno.

Equazioni elementari per determinare i numeri x che risolvano equazioni del tipo $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, con $a \in [-1, 1]$, $\tan(x) = b$ con $b \in (-\infty, +\infty)$. Esempi di equazioni/disequazioni trigonometriche elementari.

09-10-2024

Richiami sulle varie forme di equazione di una retta.

Riepilogo delle proprietà e dei grafici delle funzioni elementari introdotte finora.

Parentesi sui numeri naturali. Principio di induzione.

Proprietà archimedea dei numeri reali ($\mathbb{N}$ non è limitato superiormente). Conseguenza: $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} = 0$

Dimostrazioni e definizioni per induzione.

Disuguaglianza di Bernoulli.

Cenni di calcolo combinatorio: disposizioni semplici e con ripetizione di n elementi di classe k .

Permutazioni di n elementi. Fattoriale.

Combinazioni semplici di n elementi di classe k . Interpretazione come numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi.

Sviluppo di un binomio, formula di Newton.

10-10-2024

Successioni numeriche reali come funzioni $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, indicate come $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Introduzione al concetto di limite di una successione numerica.

Proprietà verificate definitivamente, limite di una successione numerica.

Casi del limite finito, $+\infty$, $-\infty$, definizioni precise.

Definizioni dei vari tipi di limite per funzioni reali di variabile reale.

11-10-2024

Esercitazione sulle equazioni/disequazioni di vario tipo.

Intorni di un numero reale, di $+\infty$, di $-\infty$.

Definizione generale tramite gli intorni di limite di una funzione, finito o infinito, quando la variabile indipendente tende a un numero finito o a infinito.

Definizione generale tramite gli intorni di limite di una funzione, finito o infinito, quando la variabile indipendente tende a un numero finito o a infinito.

Esplicitazione nei vari casi della nozione di limite di una funzione. Limiti destro e sinistro in un punto (finito).

Punti di accumulazione di un insieme di numeri reali.

Anticipazione di qualche proprietà dei limiti e delle operazioni formali con gli infiniti, esempi.

14-10-2024

Casi di $f(x) = x$, dalla definizione segue subito che $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$.

Dimostrazione del teorema sul limite della somma di funzioni che hanno limite finito e del caso in cui una delle due ha limite infinito.

Riepilogo delle operazioni formali sugli infiniti e loro interpretazione (ognuna delle operazioni è un modo breve di enunciare un teorema).

Limiti delle funzioni elementari agli estremi dei loro intervalli di definizione e conseguente scrittura formale (ad es. di $e^{-\infty} = 0^+$, $e^{+\infty} = +\infty$, $\log(0^+) = -\infty$, $\log(+\infty) = +\infty$, $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2} \dots$).

Continuità di una funzione definita in un intervallo in un punto in cui è definita.

Anticipazione dei teoremi che affermano la continuità delle funzioni elementari viste finora in tutti i punti in cui sono definite, conseguente possibilità di calcolare il limite per x che tende a un punto dell'insieme di definizione "per sostituzione". Anticipazione della stessa sostituzione formale per x che tende a infinito, o a un estremo dell'intervallo di definizione in cui la funzione non è definita.

Enunciato dei teoremi sul limite della somma, prodotto, quoziente di funzioni che hanno limite finito. Estensione al caso di limiti infiniti, operazioni formali sugli infiniti.

Forme indeterminate per somme, prodotti, quozienti ($+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$), introduzione al caso di potenze (forme indeterminate 1^∞ , $(0^+)^0$, $(+\infty)^0$).

15-10-2024

Forme indeterminate come competizione tra infinitesimi o infiniti.

Limiti di funzioni razionali all'infinito e in zero, termini dominanti, infiniti di ordine inferiore ed infinitesimi di ordine trascurabili.

Teoremi di confronto per limiti infiniti e per limiti finiti (teorema dei carabinieri).

Ordini di infinito (confronto tra logaritmi, potenze, esponenziali, fattoriali), dimostrati in seguito con le derivate.

Dimostrazione della continuità di alcune funzioni elementari. Forme indeterminate, prime tecniche di soluzione.

Limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, dimostrazione geometrica.

Limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ e altri limiti elementari dedotti dai limiti notevoli.

Teorema fondamentale di esistenza del limite per una successione monotona.

Definizione di $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ (si dimostra che esiste il limite e si sa valutarlo con approssimazione a piacere).

Calcolo di $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$.

16-10-2024

Teorema ponte tra limiti di successioni e limiti di funzioni e versione per le funzioni continue: condizione necessaria e sufficiente per la continuità di una funzione in un punto x_0 è che per ogni successione x_n convergente a x_0 la successione composta $y_n = f(x_n)$ converga a $f(x_0)$. Dimostrazione della necessità.

Estensione al caso reale: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ e più in generale, se $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$; in particolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - \frac{1}{x})^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Tecnica di cambio di variabile e deduzione di altri limiti notevoli a partire dal $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\log(a)}; \text{ in particolare}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

dove d' ora in poi, se la base non è specificata, si intende che $\log$ voglia dire $\log_e$ (altra notazione molto usata che alterneremo: $\ln$);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a) = \ln(a), \text{ in particolare}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dimostrazione del Teorema di permanenza del segno per funzioni continue (e per limiti).

Dimostrazione del Teorema degli zeri e dei valori intermedi per funzioni continue.

Deduzione di teoremi enunciati in precedenza, ad esempio esistenza (e unicità) della radice positiva di un numero positivo, equivalente alla caratterizzazione di $[0, +\infty)$ come immagine della funzione $f(x) = x^2$.

17-10-2024

Sottosuccessioni di una successione reale, eventuali limiti diversi per sottosuccessioni differenti.

Dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass (compattezza di un intervallo chiuso e limitato): da ogni successione x_n a valori in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a un punto di $[a, b]$.

Massimi e minimi locali e assoluti per funzione reali di variabile reale.

Dimostrazione del Teorema di Weierstrass sull' esistenza di punti di massimo e minimo assoluto per una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.

Esempi e controesempi.

Esercizi sulle tecniche finora apprese per il calcolo dei limiti.

21-10-2024

Esercizi di riepilogo sui limiti di funzioni e successioni.

Introduzione al concetto di derivata. Interpretazione cinematica, velocità istantanea.

Richiami sulle rette nella geometria analitica del piano. Interpretazione geometrica della derivata come coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in un punto.

Definizione di funzione derivata, derivata di una funzione in un punto e funzione derivata. Esempio del calcolo della funzione derivata della funzione $f(x) = x^2$.

Continuità delle funzioni derivabili.

22-10-2024

Esempio del modulo, funzione continua in (ogni punto di) $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0.
 Calcolo delle derivate delle funzioni esponenziale, seno, coseno.
 Regole di derivazione di somma, prodotto, quoziente.
 Derivata delle funzioni tangente e arcotangente.
 Derivata della funzione inversa.
 Derivata di logaritmo, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.
 Derivazione delle funzioni composte, esempi di calcolo.

24-10-2024

Derivata della funzione potenza a esponente reale e di funzioni con base ed esponente variabile.

Tabella di derivate.

Esempi di calcolo di funzioni derivate.

Esercizi sul calcolo delle funzioni derivate, in particolare derivate di funzioni composte.

Teorema di Fermat

(Nota: verrà svolta a lezione la dimostrazione dei teoremi fondamentali del calcolo differenziale, Teorema di Fermat, di Rolle, di Cauchy, di Lagrange e di de l'Hospital, eccetto il caso della forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ nel teorema di de l'Hospital).

Determinazione del massimo/minimo assoluti di una funzione su un intervallo chiuso e limitato usando il Teorema di Fermat.

Teorema di Rolle. Teorema di Cauchy. Teorema di Lagrange o del valor medio.

25-10-2024

Teorema di de l'Hospital per il calcolo di limiti che presentano una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. (dimostrazione nel caso di limite per $x \rightarrow x_0$ del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tra funzioni continue in un intervallo e nulle in x_0). Esempi vari di calcolo di limiti usando il teorema di de l'Hospital.

Derivate successive di una funzione. Esempi di calcolo. Funzioni di classe $C^n(I)$, I intervallo.

Sommatorie e loro proprietà, cambio di indici.

28-10-2024

Esercizi sul calcolo di insiemi di definizione e derivate di funzioni e sul teorema di de l'Hospital.

Definizione dei simboli di "o piccolo" e proprietà. $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ significa che f è trascurabile rispetto a g , caso degli infiniti (f è infinito di ordine inferiore a g) e degli infinitesimi (f è infinitesimo di ordine superiore a g). Caso di $f(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$, equivalenza con $f(x) = (x - x_0)^n h(x)$, con $h(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$.

Definizione del polinomio di Taylor di ordine n di una funzione di classe C^n a partire da un centro x_0 , sua caratterizzazione come unico polinomio di grado non superiore a n che ha in x_0 lo stesso valore e tutte le derivate di ordine non superiore a n uguali a quelle di f . Esempi.

Enunciato della Formula di Taylor di ordine n con resto in forma di Peano, caso delle formule di Mc Laurin, cioè del centro $x_0 = 0$.

29-10-2024

Dimostrazione della Formula di Taylor di ordine n con resto in forma di Peano, caso delle formule di Mc Laurin, cioè del centro $x_0 = 0$. Formule di Taylor-Mc Laurin per le funzioni elementari, esponenziale, seno, coseno, logaritmo, arcotangente. Esempi di casi più generali.

Esempi sul calcolo di limiti usando la formula di Taylor, proprietà degli o piccoli, scelta dell'ordine della formula.

30-10-2024

Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange, applicazioni al calcolo approssimato. Altri esempi ed esercizi sul calcolo di limiti usando la formula di Taylor.

04-11-2024

Conseguenze del Teorema di Lagrange. Una funzione con derivata nulla in un intervallo è costante.

Una funzione con derivata non negativa (non positiva) in un intervallo è crescente (decrecente), strettamente se la derivata ha un segno stretto.

Primi elementi per lo studio delle funzioni: determinazione dell'insieme di definizione D e dei limiti agli estremi dell'intervallo, o degli intervalli, che costituiscono D (questi calcoli determinano anche eventuali asintoti orizzontali e verticali); calcolo della derivata e determinazione degli intervalli di crescita/decrecita e conseguentemente di massimi e minimi relativi; determinazione dell'immagine, quindi dell'estremo superiore ed inferiore della funzione, e di eventuali massimi e minimi assoluti.

Convessità / concavità di una funzione in punto e in un intervallo. Punti di flesso. Criterio della derivata seconda per lo studio degli intervalli di convessità / concavità, e quindi dei flessi, di una funzione.

05-11-2024

Eventuali asintoti obliqui, metodo per determinarli.

Criterio basato sulla formula di Taylor, sulle derivate successive, per la determinazione del carattere di un punto critico (massimo/minimo/flesso).

Cenni sui punti di discontinuità delle derivate. Esempi ed esercizi sugli studi di funzione.

06-11-2024

Esercizi sugli studi di funzione e sul calcolo di limiti con la formula di Taylor.

Introduzione generale al concetto di integrale definito, somme superiori, inferiori, relative ad una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ per una funzione limitata f .

Funzioni integrabili. Enunciato del teorema di integrabilità delle funzioni continue in un intervallo $[a, b]$.

$\int_a^b f(x) dx$, integrale definito da a a b di una funzione continua $f(x)$, come unico elemento separatore tra due insiemi di numeri reali, quello delle aree di plurirettangoli inscritti e quello delle aree dei plurirettangoli circoscritti al grafico di f . Somme di Cauchy del tipo $\sum_{i=1}^N f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, con $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ decomposizione di $[a, b]$ in tanti piccoli intervalli e c_i scelto in $[x_{i-1}, x_i]$ che "tendono" all'integrale di f quando la suddivisione si infittisce, motivazione della notazione $\int_a^b f(x) dx$, integrale come "somma di infiniti prodotti dei valori della funzione $f(x)$ per incrementi infinitesimi".

Integrale di $f(x)$ come ricostituzione di una quantità (ad es. la massa) di un corpo unidimensionale la cui densità lineare sia f .

La variabile x di integrazione è muta, non compare nel risultato finale e può essere sostituita da qualsiasi altra lettera.

Proprietà additiva degli integrali rispetto all'insieme di integrazione, integrale di somme e prodotti di costanti per funzioni.

Cenni sul concetto di uniforme continuità di una funzione, sul Teorema di Heine-Cantor e sulla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue.

07-11-2024

Media integrale di una funzione, teorema della media integrale.

Enunciato e idea della dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale: la derivata della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ (con f continua in $[a, b]$) nel punto $x \in [a, b]$ è la funzione integranda $f(x)$ in quel punto.

Formula fondamentale del calcolo integrale :

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ se è nota una primitiva $F(x)$ della funzione integranda $f(x)$.

Funzioni primitive di funzioni date $f(x)$ su un intervallo. Integrale indefinito di una funzione.

Tabella di integrali ottenuta dalla corrispondente tabella delle derivate, commenti su casi particolari ($\log(|x|)$, radici ...).

Primi esempi di integrazione di somme di funzioni della tabella o di prodotti di costanti per funzioni della tabella.

Cenni sul concetto di differenziale di una funzione. Regola pratica per il calcolo formale del differenziale.

Integrazione per sostituzione immediata: integrali che hanno la forma (o sono facilmente riducibili alla forma) $\int f(g(t))g'(t) dt$: si dà un nome a una funzione che compare nell' integrale (eventualmente nascosta dentro un' altra funzione) tale che compaia poi il prodotto con la derivata della funzione. Partendo da $\int f(g(t))g'(t) dt$ si pone ad es. $g(t) = y$, $g'(t) dt = dy$ e ci si riconduce all' integrale $\int f(y) dy =$ (se si conosce primitiva F di f) $F(y) + c = F(g(t)) + c$

11-11-2024

Esempi vari di integrazione per sostituzione immediata.

Integrazione per parti, regola generale ed esempi vari.

Esempi sull' integrazione per sostituzione immediata e sull' integrazione per parti.

12-11-2024

Integrale delle funzioni razionali. Riduzione al caso di numeratore con grado minore del denominatore con l' aiuto dell' algoritmo di divisione tra polinomi.

Casi del denominatore di secondo grado dipendenti dal segno del discriminante del trinomio. Esempi.

Generalizzazione al caso di gradi superiori, esempi vari.

Alcune sostituzioni speciali. Funzioni razionali di seno e coseno.

Funzioni razionali dell' esponenziale.

Funzioni razionali di radici n -esime di polinomi di primo grado.

Cenni ad altre sostituzioni.

13-11-2024

Introduzione agli integrali impropri. Integrali impropri di funzioni continue e limitate su intervalli infiniti e di funzioni illimitate su intervalli finiti.

Integrali convergenti, divergenti, indeterminati.

Integrali definiti di funzioni pari e dispari su intervalli simmetrici rispetto all' origine.

Esercizi di riepilogo sul calcolo di integrali indefiniti.

Integrali impropri, caso di funzioni integrande positive (o dello stesso segno), gli integrali sono convergenti o divergenti a $+\infty$.

Calcolo di $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Criteri di confronto e confronto asintotico, uso della formula di Taylor per stabilire il carattere di un integrale improprio.

Criterio di convergenza assoluta per integrali di funzioni che cambiano segno. Esempi.

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie. Ordine di un' equazione, equazioni in forma normale.

Necessità dei valori iniziali per determinare una soluzione univocamente determinata di un' equazione differenziale. Problema di Cauchy per un' equazione di ordine n (con i valori iniziali della funzione incognita e delle sue derivate fino all' ordine $n - 1$).

18-11-2024

Equazioni del primo ordine a variabili separabili. Eventuali soluzioni costanti. Determinazione delle altre soluzioni mediante separazione delle variabili.

Cenno al caso di soluzioni multiple con dato iniziale avente soluzioni costanti, condizioni per l' unicità.

Unicità della soluzione locale di un' equazione a variabili separabili con dato iniziale che non è soluzione costante.

Soluzioni globali e blow-up in tempo finito.

Esempi sulle equazioni a variabili separabili.

Equazioni lineari del primo ordine. Soluzione generale dell'equazione omogenea (è un'equazione a variabili separabili).

La differenza di soluzioni dell'equazione completa risolve l'omogenea, come conseguenza se si conosce una soluzione particolare dell'equazione completa si può scrivere la soluzione generale della stessa.

Ricerca di una soluzione particolare con il metodo di variazione delle costanti. Formula per la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine.

19-11-2024

Equazioni di Bernoulli.

Numeri complessi, operazioni, coniugato, modulo e loro proprietà.

Forma algebrica e polare di un numero complesso.

Potenze e radici di numeri complessi, formula di De Moivre.

Soluzioni in campo complesso di equazioni di secondo grado.

20-11-2024

Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Soluzione particolare e soluzione dell'equazione completa se il termine noto è un polinomio per un esponenziale.

Equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine. Equazione omogenea associata. Polinomio caratteristico, soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Soluzione particolare dell'equazione completa del secondo ordine a coefficienti costanti nel caso particolare in cui il termine noto è il prodotto di un polinomio per un esponenziale o di un polinomio per seno o coseno.

25-11-2024

Vettori applicati nel piano, modulo, direzione e verso. Esempio delle forze in Fisica.

Vettori liberi, calcolo vettoriale su punti di $\mathbb{R}^2$, identificati geometricamente a vettori applicati nell'origine.

Spazio $\mathbb{R}^n$, n naturale positivo, delle n -ple ordinate di numeri reali. Punti di $\mathbb{R}^n$ come vettori n -dimensionali, con n coordinate.

Operazioni per coordinate in $\mathbb{R}^n$: addizione tra vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, cioè per un numero reale.

Prodotto scalare tra due vettori in $\mathbb{R}^n$, dà come risultato un numero reale. Cenno sugli spazi vettoriali generali (molte delle nozioni e proprietà che studiamo hanno senso e sono vere nel caso generale).

Combinazioni lineari di una famiglia di vettori.

Generatori dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Dipendenza lineare di due o più vettori, equivalenza tra la condizione che una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dia il vettore nullo, e la condizione che uno almeno dei vettori sia combinazione lineare degli altri.

26-11-2024

Dipendenza lineare di tre vettori nel piano, quattro nello spazio tridimensionale, in generale di m vettori in $\mathbb{R}^n$ se $m > n$.

Basi di $\mathbb{R}^n$: insiemi di m vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ che generano $\mathbb{R}^n$ e sono linearmente indipendenti.

Base canonica in $\mathbb{R}^n$.

Ogni base in $\mathbb{R}^n$ ha esattamente n elementi, n è la *dimensione* di $\mathbb{R}^n$.

Sottospazio $\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$: insieme dei vettori esprimibili come combinazione lineare di tali vettori.

Definizione generale di sottospazio S di $\mathbb{R}^n$ e ricerca di un insieme di generatori per esso, in particolare per tutto lo spazio $S = \mathbb{R}^N$. Base di un sottospazio ottenuta eliminando dai generatori eventuali vettori dipendenti (che si esprimono come combinazione lineare degli altri).

Esempi in dimensione bassa: sottospazi di $\mathbb{R}^2$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 2 (tutto il piano), sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l'origine). Sottospazi di

$\mathbb{R}^3$, banali di dimensione 0 (il vettore nullo) e 3 (tutto lo spazio), sottospazi di dimensione 1 (rette passanti per l'origine) e di dimensione 2 (piani passanti per l'origine).

Definizione di matrice $m \times n$, somma di matrici, prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto righe per colonne di una matrice A , $m \times n$, per una matrice B , $n \times p$, dà come risultato una matrice $m \times p$. Esempi. Caso particolare di A matrice $m \times n$, $B = X$ matrice colonna $n \times 1$, vettore colonna in $\mathbb{R}^n$, il risultato è una matrice $m \times 1$, un vettore colonna Y in $\mathbb{R}^m$.

27-11-2024

Determinante di una matrice quadrata di ordine 2. Verifica della condizione necessaria e sufficiente di annullamento di un determinante: il determinante è nullo se e solo se i vettori colonna (o vettori riga) sono linearmente dipendenti.

Determinante di una matrice quadrata di ordine 3 e per induzione di una matrice di ordine n qualsiasi.

Definizione induttiva di determinante per una matrice quadrata di ogni ordine, proprietà dei determinanti di essere nulli se e solo se le righe, e le colonne, sono linearmente dipendenti.

Rango per minori di una matrice $m \times n$, enunciato dell'equivalenza con il numero massimo di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Scrittura di un sistema lineare di m equazioni in n incognite in forma matriciale: $AX = B$, dove A è una matrice $m \times n$, X è il vettore colonna $n \times 1$ delle incognite $x_1, \dots, x_n$, e B il vettore colonna $m \times 1$ dei termini noti $b_1, \dots, b_m$.

Esistenza della matrice inversa di una matrice quadrata di ordine n non singolare, cioè con determinante non zero.

Soluzione di un sistema quadrato (n equazioni in n incognite) $AX = B$ con $\det(A) \neq 0$ per applicazione della matrice inversa: $X = A^{-1}B$ è l'unica soluzione del sistema. Formulazione equivalente: Enunciato del Teorema di Cramer.

28-11-2024

Esempi ed esercizi sul Teorema di Cramer.

Proprietà degli orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Sistemi quadrati con determinante della matrice dei coefficienti nullo e sistemi non quadrati.

Scrittura del sistema come $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$, dove $A_1, \dots, A_n$ sono le colonne della matrice A dei coefficienti.

Teorema di Rouché-Capelli, con dimostrazione.

Esempi vari, casi particolari.

Esempi di sistemi lineari, eventualmente con parametro.

02-12-2024

Discussione dell'esistenza, unicità, molteplicità di soluzioni.

Sistemi lineari: determinazione delle soluzioni a partire da un minore di rango massimo selezionato.

Esempi.

Dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato, relazione tra soluzioni di un sistema e soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esercizi sulla discussione e soluzione di sistemi lineari con parametro.

Basi di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente di un sottospazio $S \subset \mathbb{R}^n$), dimensione di un sottospazio (la dimensione di tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ è n).

Coordinate di un vettore rispetto ad una base, cambiamenti di base.

Matrice P di cambio di base, definizione come matrice le cui colonne sono le coordinate dei nuovi vettori di base nella vecchia base (per i nostri esempi la base canonica). Effetto sulle coordinate: se $X' = (x'_1 \dots x'_n)$ sono le nuove coordinate di un vettore, PX' dà le vecchie coordinate $X = (x_1 \dots x_n)$ (nella base canonica negli esempi).

Esempi vari.

Trasformazioni lineari, matrice associata nella base canonica, matrici in base qualsiasi.

Relazione $A' = P^{-1}AP$ tra la matrice A della trasformazione nella base canonica e la matrice A' della trasformazione nella nuova base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dove P è la matrice del cambio di base.

03-12-2024

Problema della diagonalizzazione che conduce alla ricerca di vettori trasformati in un loro multiplo.

Definizione di autovalore e autovettore di una trasformazione lineare (equivalentemente di una matrice associata nella base canonica).

Condizione necessaria affinché un numero reale λ sia un autovalore: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.

Polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di una matrice A (della trasformazione lineare associata nella base canonica).

Esempio di calcolo di autovalori e autovettori corrispondenti.

Autovalori di una matrice (di una trasformazione lineare) come radici del polinomio caratteristico e loro molteplicità algebrica.

Autospazio di un autovalore: insieme degli autovettori corrispondenti ad un autovalore (insieme al vettore nullo). È un sottospazio, e la sua dimensione è detta molteplicità geometrica.

04-12-2024

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$.

Diagonalizzabilità di una matrice 2×2 come esistenza di 2 autovettori indipendenti. È in particolare verificata in $n = 2$ dimensioni se esistono 2 autovalori distinti.

Se c'è un solo autovalore la matrice può non essere diagonalizzabile, se il corrispondente autospazio ha dimensione 1, cioè le soluzioni del sistema per gli autovettori sono tutti i multipli di un solo autovettore, ma può accadere che in corrispondenza di un solo autovalore il suo autospazio abbia dimensione 2. Esempio banale di una matrice già diagonale, per capire cosa succede in dimensioni superiori.

Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori e determinazione degli autospazi di ogni autovalore in dimensione $n = 2$, introduzione ai concetti di molteplicità algebrica e molteplicità geometrica in ogni dimensione.

Diagonalizzabilità di una matrice 3×3 come esistenza di 3 autovettori indipendenti, in generale una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile se esistono n autovettori linearmente indipendenti. Equivale alla seguente condizione: la somma delle molteplicità geometriche (cioè le dimensioni degli autospazi) di tutti gli autovalori è pari alla dimensione n dello spazio. Un caso particolare è quello di matrice con 3 autovalori reali distinti.

Esempi ed esercizi su autovalori ed autovettori in dimensione 2 e 3.

05-12-2024

Forme quadratiche associate a matrici quadrate simmetriche.

Forme (Matrici) (semi)definite, positive e negative, matrici indefinite. Caso delle matrici diagonali.

Cenni sul teorema spettrale, diagonalizzabilità delle matrici reali simmetriche.

Minori principali, criterio basato sul segno dei minori principali per determinare il carattere di una forma quadratica associata ad una matrice.

Norma euclidea di un vettore in $\mathbb{R}^n$, distanza tra due punti.

Introduzione alle funzioni vettoriali di una variabile reale, vettore velocità, limiti, derivate e integrali calcolati per componenti.

Esempi elementari legati al concetto di derivata parziale per funzioni di due o più variabili.