Matematica per Scienze Biologiche e Biotecnologie

Docente Lucio Damascelli

Università di Tor Vergata

Alcuni recenti compiti di esame

Nota

Nei compiti di esame si chiedono 6 esercizi da svolgere in circa due ore e mezzo (al massimo, compresi tempi tecnici di entrata e uscita, 3 ore), e di solito gli esercizi riguardano i seguenti argomenti:

(1) Calcolo di un limite

(2) Calcolo di un integrale (indefinito o definito)

(3) Studio di autovalori ed autovettori di una matrice

(4) Studio di una funzione

(5) Soluzione di un' equazione differenziale, di solito a variabili separabili

(6) Studio di un sistema lineare con parametro

Gli esercizi sono diversi per ogni compito e hanno ordine diverso rispetto a quello scritto prima.

Nelle pagine seguenti ci sono alcuni esempi (di una variante possibile) dei recenti compiti scritti qui con ordine fisso (diverso da quello che capiterà nel compito) e scritti l' uno di seguito all' altro. Al contrario nel compito sarà specificato che

- gli esercizi 1, 2, 3 della lista precedente vanno risolti sul foglio del testo: ci sarà uno spazio bianco dopo il testo, e in questo spazio va inserito lo svolgimento (e non solo il risultato) ma in forma abbreviata, con uno schema dei procedimenti usati (ad esempio per un limite si scrivono varie uguaglianze dicendo ... per la regola di de l' Hospital è uguale a ... che è uguale a ... risultato).

- per gli esercizi 4, 5, 6 della lista precedente non c' è lo spazio dopo il testo ma la dizione (consegnare lo svolgimento) e vanno svolti in dettaglio sul foglio protocollo di bella (in dettaglio ma possibilmente usando un po' di sintesi e dati essenziali).

La brutta copia non va consegnata.

Testo 25-01-2016

(1) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)\, x^3 \left[\,\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\,\right]$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1}{5+\log^2(x)}\,\frac{1}{x}\,dx$

(3) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) Determinare in funzione del parametro t il numero di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nel caso in cui siano infinite.
$A\,X = B$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 2 & t & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione: $f(x) = (x-2)e^{x^2}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' & = \frac{2x}{1+x^4}\,e^{-y} \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

Soluzioni 25-01-2016

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{\log(x)}{\sqrt{5}})$

(3) $\lambda = -1+\sqrt{5}$, $\mathbf{v} = (11, 4+\sqrt{5})$;

$\lambda = -1-\sqrt{5}$, $\mathbf{v} = (11, 4-\sqrt{5})$

(4) 1 soluzione per $t \neq 0\,,4$, nessuna soluzione per $t = 0$, infinite soluzioni per $t = 4$: $4x+z = 1$, $8y+5z = 5$ (ad esempio $z = a$, $x = \frac{1-a}{4}$, $y = \frac{5-5a}{8}$)

(5) $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, no asintoti, $f'(x) = (2x^2-4x+1)e^{x^2}$], decrescente in $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$, crescente in $(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ e in $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, massimo relativo $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, (-1-\frac{\sqrt{2}}{2})e^{(\frac{3}{2}-\sqrt{2})})$, minimo relativo $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, (-1+\frac{\sqrt{2}}{2})e^{(\frac{3}{2}+\sqrt{2})})$

(6) $y = \log(\arctan(x^2)+1)$, $D = (-\infty, +\infty)$, immagine $[\,0, \log(1+\frac{\pi}{2})\,)$

Testo 29-02-2016

(1) Calcolare $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin(x)e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

(3) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono $\begin{cases} x & + & ty & = & 2 \\ & & 12y & = & 2t \\ x & + & y & = & 0 \end{cases}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, l' immagine, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:

$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2-x}}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' & = \frac{2x}{1+x^4}\,y^2 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$

Soluzioni 29-02-2016

(1) 2

(2) $\sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}$

(3) $\lambda = \pm\sqrt{5}$; $\lambda = 0$: $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$

(4) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, per $t = -3$; $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, per $t = 4$

(5) $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, as. obl. $y = -x + 3$ per $x \to \pm\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{2-x}}\left[\frac{x-1}{2-x}\right]$, decr in $(-\infty, 1)$ e in $(2, +\infty)$, cresc in $(1, 2)$, min rel $(1, e)$, $I = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

(6) $y = \frac{1}{1-\arctan(x^2)}$, $D = (-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}})$

Testo 09-06-2016

(1) Calcolare $\lim_{x\to 3} \frac{e^x - e^3 x + 2e^3}{(x-3)^2}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \log(1+x^2)\, x\, dx$

(3) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite $\begin{cases} x & + & ty & & & = & 1 \\ & & 4y & - & 2z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & z & = & t \end{cases}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli intervalli in cui è concava e convessa, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo e flesso, l' immagine, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:

$f(x) = e^{-x} + 2x$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' & = 6x^5 e^{x^6}\,(1+y^2) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$

Soluzioni 09-06-2016

(1) $\frac{e^3}{2}$

(2) $\frac{1}{2}(\,(1+x^2)\log(1+x^2)-(1+x^2)\,)$

(3) $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\quad;\quad\lambda=0\ :\ \mathbf{v}=(2,1,-1)$

(4) 1 soluzione $\forall\ t\neq 0$; ∞ soluzioni se $t=0$: $(1,a,2a-1)$, $a\in\mathbb{R}$

(5) $D=(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, as. obl. $y=2x$ per $x\to+\infty$, , $f'(x)=2-e^{-x}$, cresc in $(-\log(2),+\infty)$, decres in $(-\infty,-\log(2))$ min rel e ass $(-\log(2),2-2\log(2))$, $f''(x)=e^{-x}$, sempre convessa, $I=[2-2\log(2),+\infty)$

(6) $y=\tan(\,e^{x^6}-1\,)$, $D=(\,-\sqrt[6]{\log(1+\frac{\pi}{2})},\sqrt[6]{\log(1+\frac{\pi}{2})}\,)$

Testo 12-09-2016

(1) Calcolare $\lim_{x\to 0}\ \arctan(\frac{1}{x^2})\ \frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{1}{9+\log^2(x)}\ \frac{1}{x}\, dx$

(3) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono $\begin{cases} x & + & ty & = & 2 \\ & & 12y & = & 2t \\ x & + & y & = & 0 \end{cases}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli intervalli in cui è concava e convessa, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo e flesso, l' immagine, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:

$f(x) = e^{-2x} + 4x$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' & = x^5 e^{x^6}\,(1+y^2) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$

Soluzioni 12-09-2016

(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\frac{1}{3}\arctan(\frac{\log(x)}{3})$

(3) $\lambda = \pm 2\sqrt{5}$; $\lambda = 0$: $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$

(4) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, per $t = -3$; $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, per $t = 4$

(5) $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, as. obl. $y = 4x$ per $x \to +\infty$, $f'(x) = 4 - 2e^{-2x}$, cresc in $(-\frac{\log(2)}{2}, +\infty)$, decres in $(-\infty, -\frac{\log(2)}{2})$, min rel e ass $(-\frac{\log(2)}{2}, 2-2\log(2))$, $f''(x) = 4e^{-2x}$, sempre convessa, $I = [2 - 2\log(2), +\infty)$

(6) $y = \tan(\,\frac{1}{6}e^{x^6} - \frac{1}{6}\,)$, $D = (\,-\sqrt[6]{\log(1 + 3\pi)}, \sqrt[6]{\log(1 + 3\pi)}\,)$

Testo 30-01-2017

(1) Calcolare $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{e^{x^2} - x^2 e^3 + 2e^3}{(x^2-3)^2}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$

(3) Calcolare gli autovalori e un autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono $\begin{cases} 4x & + & ty & = & 11 \\ & & 7y & = & t \\ -x & + & y & = & 0 \end{cases}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli intervalli in cui è concava e convessa, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo e flesso, l' immagine, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' & = \frac{4\cos^2(y)}{(1-x)^5} \\ y(0) & = 0 \end{cases}$

Soluzioni 30-01-2017

(1) $\frac{e^3}{2}$

(2) $-\frac{1}{2}\log(1+\cos^2(x))$

(3) $\lambda = \pm\sqrt{5}\ :\ \mathbf{v} = (1, \pm\sqrt{5}, 2) \quad ; \quad \lambda = 0\ :\ \mathbf{v} = (-2, 0, 1)$

(4) $x = -\frac{11}{7}$, $y = -\frac{11}{7}$, per $t = -11$; $x = 1$, $y = 1$, per $t = 7$

(5) $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, as. obl. $y = x + \frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$ as. obl. $y = -x - \frac{3}{2}$ per $x \to -\infty$, , $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$, decresc in $(-\infty, -2)$, cres in $(-1, +\infty)$, min ass $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$, $f''(x) = \frac{-1}{4(x^2+3x+2)^{\frac{3}{2}}}$, f sempre concava, $I = [0, +\infty)$

(6) $y = \arctan(\,\frac{1}{(1-x)^4} - 1\,)$, $D = (\,-\infty, 1\,)$, $I = (\,-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\,)$

Testo 20-02-2017

(1) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{3x}) \log(1+e^{4x})$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^4}{\cos^2(x^5)}\,dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 7 & a \end{pmatrix}$, trovare i valori del parametro a tale che $\lambda = 0$ sia un autovalore, e per ognuno di tali valori trovare un autovettore dell' autovalore 0.

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono
$$\begin{cases} 7x & + & (t+1)y & = & t-2 \\ & & y & = & t+1 \\ -x & + & y & = & 0 \end{cases}$$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli intervalli in cui è concava e convessa, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo e flesso, l' immagine, e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:

$f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' & = \frac{2x-4}{2y} \\ y(4) & = 4 \end{cases}$$

Soluzioni 20-02-2017

(1) $\frac{4}{3}$

(2) $\frac{1}{5}\tan(x^5)$

(3) $a = 7$; $v = (1, -1)$, $a = -7$; $v = (1, 1)$

(4) $x = y = -3 + \sqrt{6}$, per $t = -4 + \sqrt{6}$; $x = y = -3 - \sqrt{6}$, per $t = -4 - \sqrt{6}$

(5) $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, no asint. , $f'(x) = \frac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}}$, sempre cresc. $f''(x) = -\frac{8}{9}(2x+5)^{-\frac{5}{3}}$, f convessa (e negativa) in $(-\infty, -\frac{5}{2})$, f concava (e positiva) in $(-\frac{5}{2}, +\infty)$, flesso a tang. verticale in $(-\frac{5}{2}, 0)$ $I = (-\infty, +\infty)$

(6) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$, $D = (\,-\infty, +\infty\,)$, $I = [\,2\sqrt{3}, +\infty\,)$

Testo 09-06-2017

(1) Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{e^{4x}-1-4x}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{e^{4x}}{\cos^2(e^{4x})}\,dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} a & 7 \\ 7 & a \end{pmatrix}$, trovare in funzione del parametro a gli autovalori e gli autovettori.

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite
$$\begin{cases} x & + & y & = & 1 \\ 4x & + & (t^2-12)y & = & t \end{cases}$$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, gli intervalli di convessità e concavità, gli eventuali flessi, l' immagine e tracciare infine il grafico, della seguente funzione: $f(x) = 4e^{x^2} - 4x^2$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' & = \frac{1}{7}xy^2 \\ y(0) & = 7 \end{cases}$$

Soluzioni 09-06-2017

(1) $\frac{1}{16}$

(2) $\frac{1}{4}\tan(e^{4x})$

(3) $\lambda_1 = a - 7$; $v = (1, -1)$, $\lambda_2 = a + 7$; $v = (1, 1)$,

(4) 1 sol. se $t \neq \pm 4$, nessuna soluzione se $t = -4$, ∞ sol. $x = s$, $y = 1 - s$ ($s \in \mathbb{R}$) se $t = 4$

(5) $D = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, no asintoti, $f'(x) = 8x(e^{x^2} - 1)$, decresc in $(-\infty, 0)$, cresc. in $(0, +\infty)$, min. rel. e assoluto $(0, 4)$, $f''(x) = 8(e^{x^2} - 1) + 16x^2 e^{x^2}$, sempre convessa, $I = [4, +\infty)$

(6) $y = \frac{14}{2-x^2}$, $D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $I = [7, +\infty)$

Testo 12-09-2017

(1) Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{1 - \cos(x)}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}\, dx$

(3) Si determinino autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

(4) Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z e dipendente dal parametro t: $\begin{cases} -2x - y - 3t^2 z = 2 \\ x + y + (t^2+1)z = t \\ 2x + 2y + 4z = 2. \end{cases}$
Determinare i valori di t per cui il sistema ammette soluzioni e risolvere il sistema nel caso in cui vi siano infinite soluzioni.

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, l' immagine e tracciare infine il grafico, della seguente funzione:
$f(x) = \frac{e^{3x}}{x}$ (facoltativo lo studio della derivata seconda).

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' &= \frac{1}{7}xy^2 \\ y(0) &= 7 \end{cases}$

Soluzioni 12-09-2017

(1) 16

(2) $\frac{1}{4}\log(1+e^{4x})$

(3) $\lambda_- = 1/3$, $\lambda_+ = 3$. $v_- = (-3,1)$, $v_+ = (-11,1)$.

(4) $\exists!$ sol. se $t \neq \pm 1$. Se $t = 1$ $\exists \infty$ sol, $x = -z-3, y = -z+4$.

Nessuna sol. se $t = -1$.

(5) $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ($y = 0$ as.or.), $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = [\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}]e^{3x}$, decr. in $(-\infty, 0)$ e $(0, \frac{1}{3})$, cres in $(\frac{1}{3}, +\infty)$, min. rel. $(\frac{1}{3}, 3\,e)$, $f''(x) = [\frac{9}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}]e^{3x}$, conc in $(-\infty, 0)$, conv in $(0, +\infty)$, $I = (-\infty, 0) \cup [3\,e\,, +\infty)$

(6) $y = \frac{14}{2-x^2}$, $D = (\,-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)$, $I = [7, +\infty\,)$

Testo 30-01-2018

(1) Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{e^{2x}-1-2x}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int x\, e^{2x}\, dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} b & b^2-1 & 0 \\ b & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trovare i valori del parametro b tali che $\lambda = 0$ sia un autovalore. Per ognuno di tali valori di b trovare gli autovettori associati all' autovalore $\lambda = 0$.

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite
$$\begin{cases} x + y = t \\ tx + (t^2-2t)y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, gli intervalli di convessità e concavità, gli eventuali flessi, l' immagine e tracciare infine il grafico, della funzione: $f(x) = e^{2x} - 3e^x$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y}\,\frac{1}{(x+e^2)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Soluzioni 30-01-2018

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{2}\, x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$

(3) $b = 0 : \lambda_1 = 0$; $v = (1, 0, 0)$; $b = 1$: $\lambda_1 = 0$; $v = (0, 1, 0)$

(4) 1 sol. se $t \neq 0$, 3; no sol. se $t = 3$, ∞ sol. $x = s$, $y = -s$, $z = 0$ $(s \in \mathbb{R})$ se $t = 0$

(5) $D = (-\infty, +\infty)$; ($f > 0$ se $x > \log(3)$); $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ($y = 0$ as. or.), $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^{x}$; decr in $(-\infty, \log(\frac{3}{2}))$, cres in $(\log(\frac{3}{2}), +\infty)$; min. ass. $(\log(\frac{3}{2}), -\frac{9}{4})$; $f''(x) = 4e^{2x} - 3e^{x}$; conc. in $(-\infty, \log(\frac{3}{4}))$, conv. in $(\log(\frac{3}{4}), +\infty)$, flesso in $(\log(\frac{3}{4}), -\frac{27}{16})$; $I = [-\frac{9}{4}, +\infty)$

(6) $y = \sqrt{2 \log(x + e^2)}$, $D = (\, 1 - e^2, +\infty \,)$, $I = (0, +\infty\,)$

Testo 08-06-2018

(1) Calcolare $\lim_{x \to 1} \dfrac{e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2x - 2}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \ln(x^2)\, dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$, trovare il valore <u>positivo</u> di b tale che la matrice abbia due autovalori λ_1 e λ_2 con $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Per tale valore di b trovare gli autovalori e gli autovettori di λ_2

(4) Studiare in funzione del parametro t l'esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui esistono. $\begin{cases} 3x & + & ty & = & 1 \\ & & 4y & = & t \\ & -x & +y & = & 0 \end{cases}$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, gli intervalli di convessità e concavità, gli eventuali flessi, l' immagine e tracciare infine il grafico, della funzione: $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' & = (2 \sin 2x \cos 2x) y^2 \\ y(0) & = 2 \end{cases}$

Soluzioni 08-06-2018

(1) $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{4}$

(2) $x\ln(x^2)-2x+C$

(3) $b=\frac{1}{3}$; $\lambda_2=\frac{2}{3}$; $v=(1,-1)$

(4) Non esistono soluzioni se $t\neq 1,-4$; $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ per $t=1$; $(-1,-1)$ per $t=-4$

(5) $D=\{x>1\}$; ($f>0$ se $x>2$); $\lim_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$ ($x=1$ as. ve.) , $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ($y=0$ as. or.), $f'(x)=\frac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$; decr in $(1+e,+\infty)$, cres in $(1,1+e)$; max. ass. $(1+e,\frac{1}{e})$; $f''(x)=\frac{2\ln(x-1)-3}{(x-1)^3}$; conc. in $(1,1+e^{\frac{3}{2}})$, conv. in $(1+e^{\frac{3}{2}},+\infty)$, flesso in $(1+e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$; $I=(-\infty,\frac{1}{e}]$

(6) $y(x)=\frac{2}{1-\sin^2(2x)}$, $D=(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $I=[2,+\infty)$

Testo 30-01-2019

(1) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{2\,x})\,\log(1+\dfrac{2}{x})$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{e^{3\,x}}{1+e^{6\,x}}\,dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$, trovare il valore del parametro a tali che la matrice abbia autovalori opposti (cioè $\lambda_1 = -\lambda_2$). Per tale valore trovare gli autovalori e gli autovettori associati.

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite
$$\begin{cases} x & + & y & = & t \\ 6\,x & + & (t^2-2)y & = & 12\sqrt{2} \end{cases}$$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, gli intervalli di convessità e concavità, gli eventuali flessi, l' immagine e tracciare infine il grafico, della funzione: $f(x) = e^{x|x|} - x|x|$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' & = \frac{1}{y}\,\frac{4}{(6-x)^2} \\ y(4) & = 2 \end{cases}$$

Soluzioni 30-01-2019

(1) 4

(2) $\frac{1}{3}\arctan(e^{3\,x})$

(3) $a=0: \lambda_1=-3\ ;\ v_1=(-1,1)\ ;\ \lambda_2=3\ ;\ v_1=(1,1)$

(4) 1 sol. se $t\neq\pm2\sqrt{2}$; no sol. se $t=-2\sqrt{2}$, ∞ sol. $x=s$, $y=2\sqrt{2}-s$ $(s\in\mathbb{R})$ se $t=2\sqrt{2}$

(5) $D=(-\infty,+\infty)$; $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, no asintoti, $f'(x)=2|x|e^{x|x|}-2|x|$; f decresc in $(-\infty,0)$, cresc in $(0,+\infty)$, min ass. $(0,1)$; $f''(x)=(2\text{sgn }(x)+4x^2)e^{x|x|}-2\text{sgn }(x)$; convessa ovunque, $I=[1,+\infty)$

(6) $y=2(\,\frac{2}{6-x}\,)^{\frac{1}{2}}$, $D=(-\infty,6\,)$, $I=(0,+\infty\,)$

Testo 14-02-2019

(1) Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x - \sin(4x)}{x^3}$

(2) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(4x)(1+\tan(4x))^2}\,dx$

(3) Data la matrice $\begin{pmatrix} a & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ trovare il valore del parametro a per cui il determinante sia nullo. Per tale valore di a trovare gli autovalori e gli autovettori associati.

(4) Studiare in funzione del parametro t l' esistenza di soluzioni del seguente sistema, e calcolarle nei casi in cui sono infinite
$$\begin{cases} 2x & + & 2y & = & 4 \\ 6\,x & + & (t^2-10)y & = & 3t \end{cases}$$

(5) Determinare il dominio di definizione, i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli in cui è crescente e decrescente, gli eventuali punti di minimo e massimo assoluto e relativo, l' immagine (non è richiesto lo studio della derivata seconda), e tracciare infine il grafico, della funzione: $f(x) = e^{-|x^2-16|}$

(6) Determinare la soluzione, specificando il suo intervallo di definizione e la sua immagine, del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' & = \frac{\sin(4x)\cos^2(4x)}{y^2} \\ y(0) & = \left(-\frac{1}{4}\right)^{1/3} \end{cases}$$

Soluzioni 14-02-2019

(1) $32/3$

(2) $\frac{-1}{4\,(1+\tan(4x))}$

(3) $a = 12 : \lambda_1 = 0$; $v_1 = (-1, 2)$; $\lambda_2 = 15$; $v_2 = (2, 1)$

(4) 1 sol. se $t \neq \pm 4$; no sol. se $t = -4$, ∞ sol. $x = s$, $y = 2 - s$ $(s \in \mathbb{R})$ se $t = 4$

(5) $D = (-\infty, +\infty)$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, asintoto orizzontale $y = 0$, $f'(x) = -2xe^{-(x^2-16)}$ per $|x| \geq 4$, $f'(x) = 2xe^{x^2-16}$ per $|x| < 4$; f decresc in $(-4, 0)$ e in $(4, \infty)$, cresc in $(-\infty, -4)$ e in $(0, 4)$, min rel. $(0, e^{-16})$; max ass. $(\pm 4, 1)$; $I = (0, 1]$

(6) $y = \left(-\frac{1}{4}\right)^{1/3} \cos(4x)$, $D = (-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$, $I = (\left(-\frac{1}{4}\right)^{1/3}, 0)$