

1. RICHIAMI SUGLI SPAZI \mathbb{R}^N . DEFINIZIONI DI SPAZIO METRICO, NORMATO, CON PRODOTTO INTERNO E PRIME PROPRIETÀ.

Sia $N \in \mathbb{N}^+$. Lo **spazio euclideo N -dimensionale** \mathbb{R}^N è il prodotto cartesiano di N copie di \mathbb{R} , cioè è l'insieme delle N -ple $x = (x^1, \dots, x^N)$ dove gli x^j sono numeri reali.

Se $x = (x^1, \dots, x^N)$ x^i è la i -esima coordinata (canonica) di x . Una tale N -pla si dice anche *vettore N -dimensionale* perché \mathbb{R}^N è uno spazio vettoriale di dimensione N con le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione per uno scalare definite, se $x = (x^1, \dots, x^N)$, $y = (y^1, \dots, y^N)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ in questo modo:

$$x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^N + y^N), \quad \alpha x = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^N)$$

Lo zero è il vettore $0 = (0, \dots, 0)$, mentre l'opposto di $x = (x^1, \dots, x^N)$ è il vettore $-x = (-x^1, \dots, -x^N)$. Una base di \mathbb{R}^N è quella costituita dai vettori $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $j = 1 \dots N$, dove e_j ha tutte le coordinate nulle tranne la j -esima che è uguale a 1.

Nello spazio \mathbb{R}^N è definito il **prodotto scalare** tra due vettori x, y : è il numero reale

$$(1.1) \quad x \cdot y = x^1 y^1 + \dots + x^N y^N$$

Esso è *bilineare, simmetrico, definito positivo*, cioè gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica). Se $x, y \in \mathbb{R}^N$ scriviamo $(x, y) := x \cdot y$. Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^N$:

Ps1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$

Ps2) $(x, y) = (y, x)$

Ps3) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \iff x = 0$

Una importante conseguenza delle proprietà del prodotto scalare è la seguente disuguaglianza.

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Denotiamo con (h, k) il prodotto scalare di due vettori $h, k \in \mathbb{R}^N$. Vale la seguente disuguaglianza:*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Dimostrazione. Siano $X = (x, x)$, $Y = (y, y)$, e $Z = (x, y)$. Essendo il prodotto scalare simmetrico, definito positivo e bilineare si ha che $0 \leq (Yx - Z^2, Yx - Z^2) = Y^2(x, x) + Z^2(y, y) - 2YZ(x, y) = XY^2 - YZ^2$, e quindi $YZ^2 \leq XY^2$.

Se $Y = 0$ è $y = 0$ e la disuguaglianza è banale, mentre se $Y \neq 0$ è $Y > 0$, e dividendo per Y la precedente relazione si ottiene $Z^2 \leq$

XY , cioè $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$, che equivale alla disuguaglianza da dimostrare. \square

Osservazione La stessa dimostrazione funziona, con le ovvie modifiche, per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nello spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^N .

Osservazione 1.1. Si noti che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dipende solo dalle proprietà Ps1)–Ps3) e non dalla definizione particolare (1.1) del prodotto scalare in \mathbb{R}^N che abbiamo dato.

In \mathbb{R}^N si definisce poi la **norma euclidea o modulo** di un vettore x : è il numero *reale*, indicato come $|x|$ o $\|x\|$, definito da:

$$(1.2) \quad \|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i|^2}$$

Si noti che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si può scrivere come

$$(1.3) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

dove $\|h\| = (h, h)^{\frac{1}{2}}$ è la norma indotta dal prodotto scalare.

La norma ha le seguenti proprietà. Se $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che:

N1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**disuguaglianza triangolare**)

La N1) e la N2) sono ovvie, mentre la disuguaglianza triangolare N3) è conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Infatti, elevando al quadrato, essa equivale alla disuguaglianza $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$.

Ora per la disuguaglianza CS si ha che $(x \cdot y) \leq |x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$, e quindi

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + y \cdot y + (x, y) + (y, x) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x \cdot y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \end{aligned}$$

Osservazione 1.2. Si noti che nella verifica di N1)–N3) si sono usate solo le proprietà Ps1)–Ps3) del prodotto scalare e la CS), che di tali proprietà è conseguenza.

Esercizio 1.1. Analizzando la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e della disuguaglianza triangolare per la norma che ne è conseguenza, dire quando valgono le uguaglianze

$$|(x, y)| = \|x\| \|y\| ,$$

$$(x, y) = \|x\| \|y\| ,$$

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Infine la **distanza euclidea** di due vettori $x, y \in \mathbb{R}^N$ è il numero reale

$$(1.4) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i - y^i|^2}$$

La funzione distanza è anche detta **metrica euclidea** e verifica le seguenti proprietà.

Per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^N$:

$$D1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$D2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$D3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

La D1) e la D2) sono ovvie, e la D3) segue dalla N3) sostituendo x con $x - z$ e y con $z - y$.

Osservazione 1.3. Si osservi ancora che nella verifica di D1) – D3) si sono usate solo le proprietà N1) – N3) della norma.

Osservazione 1.4. Osserviamo esplicitamente una conseguenza immediata delle proprietà D1)–D3). Per ogni x, y, z si ha

$$D4) \quad d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$$

La D4) segue dalla disuguaglianza triangolare D3) e dalla simmetria D2) della distanza. Infatti $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(z, y)$ e quindi

$$i) \quad d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y).$$

Analogamente $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(x, z) + d(x, y)$ e quindi

$$ii) \quad d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y).$$

Da i) e ii) segue subito la D4).

Definiamo ora alcune strutture astratte, che si ottengono prendendo come assiomi le proprietà ora viste degli spazi \mathbb{K}^N .

Definizione 1.1. Sia X uno spazio vettoriale reale. Un **prodotto interno** su X è una applicazione $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni coppia di vettori x, y associa un numero $g(x, y) \in \mathbb{R}$, che indicheremo con (x, y) (prodotto interno di x e y), che verifica le proprietà Ps1)–Ps3). La coppia (X, g) è detta **spazio con prodotto interno** o **spazio prehilbertiano** (reale).

Esattamente come nel caso di \mathbb{R}^N si dimostra il

Lemma 1.1. *In ogni spazio prehilbertiano vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:*

$$(CS) \quad |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \forall x, y \in X$$

Definizione 1.2. Sia X uno spazio vettoriale reale. Una **norma** su X è una applicazione $N : X \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni vettore x associa un numero reale $N(x)$, che indicheremo con $\|x\|$ (**norma** di x), che verifica le proprietà N1)–N3).

La coppia (X, N) è detta **spazio normato**.

Si verifica per induzione su n che se $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\text{N3')} \quad \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

Definizione 1.3. Sia X un insieme, i cui elementi chiameremo *punti*. Una **metrica** o **distanza** su X è una applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, che ad ogni coppia di punti x, y associa un numero reale $d(x, y)$ (distanza di x da y), che verifica le proprietà D1)–D3).

La coppia (X, d) è detta **spazio metrico**.

In ogni spazio metrico vale la disuguaglianza D4) dell' Osservazione 1.4. Inoltre per induzione se $x_1, \dots, x_n \in X$ si ha che

$$\text{D3')} \quad d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

Abbiamo visto, nel caso di \mathbb{R}^N , come le proprietà D1)–D3) dipendono solamente dalle corrispondenti proprietà N1)–N3), e a loro volta queste dipendono solamente dalle proprietà PS1)–PS3) e dalla disuguaglianza CS), che ne è conseguenza (vedi le Osservazioni 1.1 – 1.3). Vale quindi la

Proposizione 1.1. i) *Sia X uno spazio normato con norma $\|\cdot\|$. Posto per $x, y \in X$: $d(x, y) = \|x - y\|$, si ha che d è una distanza in X , detta **distanza indotta dalla norma** e quindi ogni spazio normato è anche spazio metrico.*

ii) *Sia X uno spazio prehilbertiano con prodotto (\cdot, \cdot) . Posto per $x \in X$: $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ si ha che $\|\cdot\|$ è una norma su X , detta **norma indotta dal prodotto scalare**, e quindi ogni spazio prehilbertiano è anche spazio normato (e spazio metrico).*

Naturalmente esistono spazi metrici la cui distanza non è indotta da una norma, dato che una metrica può essere definita su un insieme qualsiasi, mentre una norma è definita su uno spazio vettoriale. Analogamente esistono spazi normati la cui norma non è definibile a partire da un prodotto scalare.

Esempio 1.1. La **metrica discreta** su un insieme qualsiasi X è definita da:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

È facile vedere che gli assiomi di spazio metrico sono verificati.

Esempio 1.2. La **retta reale estesa** è l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, ottenuto aggiungendo all'insieme dei numeri reali i due simboli $\pm\infty$. La funzione

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

è una metrica su \mathbb{R}^* ; si intende che si è estesa a \mathbb{R}^* la funzione arcotangente, che è strettamente crescente da \mathbb{R} sull'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, ponendo $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. È facile vedere che gli assiomi di spazio metrico sono verificati.

Esempio 1.3. La norma euclidea $\|x\|$ di un vettore x in \mathbb{K}^N è spesso indicata con il simbolo $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x^i)^2}$ ed è indotta dal prodotto scalare o hermitiano standard, come abbiamo visto.

Diverse norme su \mathbb{K}^N , non indotte da un prodotto interno, sono le seguenti norme

$$(1.5) \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

La verifica delle proprietà delle norme è immediata.

Queste norme sono equivalenti tra loro ed equivalenti alla norma euclidea, nel senso che ognuna di esse è maggiorata e minorata da un multiplo dell'altra, come segue dalle disuguaglianze, di verifica immediata,

$$(1.6) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty$$

Tali disuguaglianze implicano ad esempio che se il modulo di tutte le componenti di un vettore x è "piccolo", e quindi $\|x\|_1$ è "piccola", anche la norma euclidea $\|x\|_2$ è piccola, e viceversa se la norma euclidea $\|x\|_2$ è piccola allora la norma $\|x\|_\infty$ è piccola, cioè i moduli di tutte le componenti del vettore sono piccole.

La (1.6) si usa quindi spesso per mostrare che molti concetti definiti in termini della norma euclidea sono equivalenti a concetti introdotti "per componenti" (vedi in seguito ad esempio i limiti e la continuità di funzioni a valori in \mathbb{R}^N).

Osservazione 1.5. Più in generale se $p \geq 1$ si può definire la norma

$$(1.7) \quad \|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Per la verifica delle proprietà delle norme nel caso generale la disuguaglianza triangolare segue dal fatto che

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{1}{p}} \text{ e dalla disuguaglianza}$$

$$\left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

nota come *disuguaglianza di Minkowski* che vedremo tra poco.

Tutte queste norme sono equivalenti, nel senso che ognuna di esse è maggiorata e minorata da un multiplo dell' altra, come segue dalle disuguaglianze, di verifica immediata,

$$(1.8) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq N^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty, \quad p \geq 1$$

Talvolta gli spazi normati costituiti dall' insieme \mathbb{R}^N con le norme ora introdotte si indicano con i simboli $\mathbf{P}(N) = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Esempio 1.4 (Norme su $C^0[a, b]$). Siano a, b numeri reali, con $a < b$.

L' insieme $C^0[a, b]$ delle funzioni a valori reali (complessi) continue su $[a, b]$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare definite puntualmente: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ se $x \in [a, b]$.

Se $f \in C^0[a, b]$ allora f assume massimo e minimo nell' intervallo $[a, b]$ per il teorema di Weierstrass (che generalizzeremo in seguito). Inoltre è definito l' integrale di f . Diverse norme su $C^0[a, b]$ sono le seguenti:

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si verifichi per esercizio che $\|\cdot\|_\infty, \|f\|_1$ sono norme e che la norma $\|f\|_2$ è indotta dal seguente prodotto scalare: $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ (se le funzioni sono a valori reali si ignori il segno di coniugio).

Si noti che generalmente con il simbolo $C^0[a, b]$ si intende lo spazio normato con la norma del massimo $\|\cdot\|_\infty$, mentre come vedremo nel capitolo successivo le altre norme sono generalmente definite su una classe di funzioni più ampia delle funzioni continue.

Vedremo in capitoli successivi vari esempi interessanti di spazi metrici, in particolare spazi di funzioni come quello dell' esempio precedente.

In questa prima parte del corso siamo interessati al caso dello spazio \mathbb{R}^N , ma enunciamo alcuni concetti e proprietà nel caso generale non essendoci alcuna difficoltà ulteriore.

Topologia degli spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Se $r > 0$, $x \in X$, la **palla aperta** di centro x e raggio r è il sottoinsieme di X definito da $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$.
- Un **intorno** di un punto $x \in X$ è un sottoinsieme I di X che contiene una palla di centro x : I è intorno di x se esiste $r > 0$ tale che $x \in B_r(x) \subseteq I$.

- Sia $E \subseteq X$ e $x \in X$. Il punto x è **interno** a E se E è intorno di x , cioè se esiste una palla $B_r(x) \subseteq E$.
- Il punto x è **esterno** a E se è interno al complementare $E^c = X \setminus E$, cioè se esiste una palla $B_r(x) \subseteq E^c \iff \exists r > 0 : B_r(x) \cap E = \emptyset$.
- Il punto x è punto **di frontiera** di E se non è né interno né esterno a E ; ciò equivale a dire che per ogni $r > 0$ si ha $B_r(x) \cap E \neq \emptyset, B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset$.

L'insieme dei punti interni (rispettivamente esterni, di frontiera) di un insieme E è detto **interno** di E (rispettivamente **esterno** di E , **frontiera** di E) e si denota con E° oppure $\text{int}(E)$ (rispettivamente con $\text{est}(E) = (E^c)^\circ$, e con ∂E oppure $\text{fr}(E)$). Dalla definizione segue subito che $\partial E = \partial E^c$.

- La **chiusura** di un sottoinsieme E è il sottoinsieme $\bar{E} = \text{cl}(E) = E \cup \partial E$.
- Un sottoinsieme E è **aperto** se $E = E^\circ$, cioè se ogni punto di E è interno ad E .
- Un sottoinsieme E è **chiuso** se $E = \bar{E}$, cioè se $\partial E \subseteq E$.

Per definizione X è unione *disgiunta*

$$(1.9) \quad X = E^\circ \cup \partial(E) \cup \text{est}(E) = \bar{E} \cup \text{est}(E)$$

e dalla relazione (1.9) si ricavano molte proprietà.

In particolare il complementare della chiusura di E è l'esterno di E , cioè l'interno del complementare E^c . Inoltre $\bar{E} = E \cup \partial E$, è anche unione *disgiunta* $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$. Dalle definizioni date segue allora facilmente che:

- E è aperto se e solo se E^c è chiuso.

Inoltre

- Ogni palla aperta $B_r(x)$ è un insieme aperto. L'interno E° di un insieme E è un insieme aperto.

Esercizio 1.2. Dimostrare che $B_r(x)$ e E° sono aperti.

Dato che $\text{est}(E)$ è l'interno di E^c , anche l'esterno è un insieme aperto, e la chiusura è allora un insieme chiuso, essendo il complementare dell'aperto $\text{est}(E)$. Si ha quindi che:

- E° è aperto, $\text{est}(E)$ è aperto, \bar{E} è chiuso

Una proprietà importante della chiusura di un insieme E è quella di essere *il più piccolo insieme chiuso che contiene E* . Infatti abbiamo visto che \bar{E} è chiuso, e inoltre si ha che

- Se $E \subseteq F$ e F è chiuso allora $\bar{E} \subseteq F$. In particolare E è chiuso se e solo se $\bar{E} = E$.

Infatti $\bar{E} \subseteq F$ equivale a $F^c \subseteq (\bar{E})^c = \text{est}(E)$. Se $x \in F^c$, che è aperto, esiste una palla $B_r(x) \subseteq F^c \subseteq E^c$ e allora $x \in \text{est}(E)$.

Dato che $\overline{E} = E^\circ \cup \partial E$, si vede poi facilmente che

- $x \in \overline{E}$ se e solo se ogni intorno di x contiene punti di E .

In particolare se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme dei numeri reali limitato inferiormente [superiormente], si ha che $\inf A \in \overline{A}$, [$\sup A \in \overline{A}$].

Ciò segue facilmente dalla caratterizzazione degli estremi: ad esempio per ogni $\varepsilon > 0$ esistono punti di A in $(\inf A, \inf A + \varepsilon)$ e quindi ogni intorno di $\inf A$ contiene punti di A .

Analogamente se A non è limitato inferiormente [superiormente] si pone $\inf A = -\infty$ [$\sup A = +\infty$] e nello spazio metrico \mathbb{R}^* (retta reale estesa, vedi esempio precedente) si ha che $\inf A = -\infty \in \overline{A}$ [$\sup A = +\infty \in \overline{A}$] dove la chiusura è ora in \mathbb{R}^* .

I punti della chiusura \overline{E} di un insieme E possono essere ulteriormente distinti in punti isolati e punti di accumulazione di E .

Un punto $x \in X$ è **punto di accumulazione** di E se ogni intorno di x contiene punti di E *diversi da* x .

Un punto di accumulazione di E può appartenere o meno a E , ma appartiene comunque alla chiusura \overline{E} . Se x è un punto di accumulazione di E è facile vedere che ogni suo intorno contiene *infiniti* punti di E . Se infatti un intorno I di x contenesse solo un numero finito p_1, \dots, p_n di punti di E distinti da x , posto $r = \min_{1 \leq j \leq n} d(x, p_j)$, si avrebbe che in $B_r(x)$ non cadrebbero punti di E distinti da x , e quindi x non sarebbe punto di accumulazione di E .

$x \in E$ è detto **punto isolato** di E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \{x\}$.

La chiusura di E è unione disgiunta dei punti isolati di E e dei punti di accumulazione di E , come si vede facilmente.

Il comportamento di aperti e chiusi rispetto ad unione ed intersezione è illustrato dal seguente

Teorema 1.2. i) Sia $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una collezione arbitraria di insiemi aperti. Allora $O = \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ è aperto.

ii) Sia O_1, \dots, O_n una collezione finita di insiemi aperti. Allora $O' = \cap_{i=1}^n O_i$ è aperto.

iii) Sia $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una collezione di insiemi chiusi. Allora $C = \cap_{\alpha \in A} C_\alpha$ è chiuso.

iv) Sia C_1, \dots, C_n una collezione finita di insiemi chiusi. Allora $C' = \cup_{i=1}^n C_i$ è chiuso.

Esercizio 1.3. Dimostrare il Teorema 1.2.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $Y \subseteq X$, la restrizione d_Y della funzione distanza a $Y \times Y$, cioè alle coppie di punti $x, y \in Y$, è una metrica su Y , detta **metrica indotta** da d su Y . Lo spazio metrico (Y, d_Y) è talvolta detto **sottospazio metrico** dello spazio (X, d) . Se

$y \in Y$ la palla aperta di centro y e raggio $r > 0$ nello spazio metrico Y è l'insieme $B_r^Y(y) = \{z \in Y : d(z, y) < r\}$ ed è immediato allora vedere che $B_r^Y(y) = B_r(y) \cap Y$, dove $B_r(y) = B_r^X(y) = \{z \in X : d(z, y) < r\}$ è la palla aperta nello spazio metrico X .

Le relazioni tra le nozioni prima introdotte negli spazi metrici X e Y sono le seguenti.

Proposizione 1.2. *Siano (X, d) uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, (Y, d_Y) il sottospazio metrico di X e $A \subseteq Y$.*

- i) *A è aperto in Y se e solo se $A = O \cap Y$ con O aperto in X . In particolare se Y è aperto in X allora un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se è aperto in X .*
- ii) *A è chiuso in Y se e solo se $A = C \cap Y$ con C chiuso in X . In particolare se Y è chiuso in X allora un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se è chiuso in X .*
- iii) *Siano \overline{A}^Y e $\overline{A} = \overline{A}^X$ le chiusure di A negli spazi Y, X rispettivamente. Allora $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.*

Dimostrazione. i) Siano O aperto di X , $A = O \cap Y$ e $x \in A$. Essendo O aperto in X e $x \in O$, esiste una palla (in X) $B_r^X(x) \subseteq O$ e allora $B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subseteq O \cap Y = A$. Ne segue che x è interno ad A (nello spazio metrico Y) e per l'arbitrarietà di x A è aperto.

Viceversa se A è aperto in Y , per ogni $a \in A$ esiste $r = r_a > 0$ tale che $B_r^Y(a) = B_r^X(a) \cap Y \subseteq A$ e quindi $A = \cup_{a \in A} B_{r_a}^Y(a) = (\cup_{a \in A} B_{r_a}^X(a)) \cap Y = O \cap Y$ dove $O = \cup_{a \in A} B_{r_a}^X(a)$ è aperto in X , in quanto unione di aperti di X .

ii) Se C è un chiuso di X e $A = C \cap Y$ si ha che $O = X \setminus C$ è aperto di X , e $Y \setminus A = Y \setminus (C \cap Y) = Y \setminus C = Y \cap O$ è aperto in Y , per quanto visto in i), perché O è aperto in X . Viceversa se A è chiuso in Y allora $Y \setminus A$ è aperto in Y , e per i) si ha che esiste O , aperto in X , tale che $Y \setminus A = O \cap Y$; ma allora, se $C = X \setminus O$, si ha che C è chiuso in X e $A = Y \cap C$, come si vede subito.

iii) Per quanto visto in ii), $\overline{A} \cap Y$ è chiuso in Y e contiene A , quindi contiene \overline{A}^Y e vale l'inclusione $\overline{A}^Y \subseteq \overline{A} \cap Y$. Se però $x \in \overline{A} \cap Y$, allora $x \in Y$ e ogni suo intorno $B_r^X(x)$ contiene punti di $A = A \cap Y$, quindi ogni suo intorno $B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y$ contiene punti di A e $x \in \overline{A}^Y$, quindi vale anche l'inclusione opposta $\overline{A} \cap Y \subseteq \overline{A}^Y$ e allora $\overline{A} \cap Y = \overline{A}^Y$. \square

Esempio 1.5. Sia $X = \mathbb{R}^2$, con la metrica euclidea, e consideriamo il sottospazio $Y = \{(x, y) : y = 0\}$, cioè Y è l'asse delle ascisse. Posto $A = \{(x, y) : y = 0, -1 < x < 1\}$, si ha che A non è aperto in X , perché ogni palla centrata in un punto di A contiene punti (x, y) con $y \neq 0$, quindi non appartenenti ad A . Ciononostante A è aperto in Y , perché è intersezione della palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1 in \mathbb{R}^2 con

Y , o direttamente perché $A = B_1^Y((0,0))$ è la palla di centro $(0,0)$ e raggio 1 nello spazio metrico Y .

Si noti che se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, ogni sottospazio vettoriale Y è uno spazio normato, avente per norma la restrizione a Y della norma in X .

Se però A è un sottoinsieme qualsiasi di X , esso non ha in generale la struttura di spazio vettoriale e non è quindi uno spazio normato.

Ha tuttavia (come ogni sottoinsieme di uno spazio metrico) una struttura naturale di (sotto)spazio metrico con la metrica indotta dalla metrica naturale di X , cioè la metrica indotta dalla norma. Quasi tutti gli spazi metrici che considereremo saranno di fatto spazi normati, i cui sottoinsiemi saranno esempi di spazi metrici senza in generale struttura vettoriale.

Se (X, d) è uno spazio metrico e $A \subseteq X$ il **diametro** di A è definito da $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ e può eventualmente essere $+\infty$. Un sottoinsieme A è detto **limitato** se il suo diametro è finito.

Esercizio 1.4. Dimostrare che A è limitato se e solo se è contenuto in una palla di X .

In particolare se X è uno spazio normato, $A \subseteq X$ è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $\|x\| = d(x,0) \leq M$.

Diremo che una proprietà $\mathcal{P}(n)$, dipendente da $n \in \mathbb{N}$, è verificata **definitivamente** se è verificata per tutti i naturali n , *eccettuati al più un numero finito di essi*, cioè se esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{P}(n)$ è verificata per ogni $n \geq M$.

Definizione 1.4. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X .

Se $x \in X$ si dice che $\{x_n\}$ **converge a x per $n \rightarrow \infty$** , o che x **è il limite per $n \rightarrow \infty$ della successione**, e si scrive in tal caso $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, o $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M = M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq M$ si ha $d(x_n, x) < \varepsilon$, cioè $x_n \in B_\varepsilon(x)$ (ciò equivale a richiedere che la successione reale $d(x_n, x)$ converga a zero in \mathbb{R}). Equivalentemente $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ se per ogni intorno I di x , i valori della successione sono definitivamente in I .

Come per le successioni reali si dimostra facilmente il

Teorema 1.3.

- Se un limite della successione esiste, esso è unico.
- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, allora per ogni sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$.
- Se $\{x_n\}$ è convergente, allora è limitata, cioè esistono $M > 0$, $x_0 \in X$ tali che $d(x_n, x_0) \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.5. Dimostrare il Teorema 1.3.

Teorema 1.4 (Continuità di distanza, norma, prodotto interno). *Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ successioni in uno spazio metrico X e supponiamo che $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$).*

- La successione di numeri reali $d(x_n, y_n)$ converge in \mathbb{R} al numero reale $d(x, y)$.*
- Se in particolare $(X, (\cdot, \cdot))$ è uno spazio con prodotto interno allora (x_n, y_n) converge a (x, y) .*
- Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato allora $\|x_n\|$ converge a $\|x\|$.*

Dimostrazione. a) Per la proprietà D4) (vedi Osservazione 1.4) si ha che

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| = |d(x, y) - d(x, y_n) + d(x, y_n) - d(x_n, y_n)| \leq$$

$$|d(x, y) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(y, y_n) + d(x, x_n)$$

e dato che $d(y, y_n) + d(x, x_n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ si ha la tesi.

b) Essendo convergente, y_n è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $\|y_n\| \leq M$, e per le proprietà del prodotto interno si ha che

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| = |(x, y - y_n) + (x - x_n, y_n)| \leq |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leq$$

$$\|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\| \leq (M + \|x\|)(\|x - x_n\| + \|y - y_n\|)$$

Per ipotesi $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $\|y - y_n\| \rightarrow 0$, e si deduce facilmente la tesi.

c) È un caso particolare di a), prendendo $y_n = 0$. \square

Come per le successioni reali si dimostra facilmente il

Teorema 1.5. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato reale, siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ due successioni in X , convergenti rispettivamente a due vettori $x, y \in X$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione in \mathbb{R} convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.
- Se $Y = \mathbb{R}$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = x y$.

Esercizio 1.6. Dimostrare il Teorema 1.5.

Una importante relazione tra i limiti di successioni e i concetti prima introdotti è data dal

Teorema 1.6 (Caratterizzazione di chiusura e chiusi). *Sia $E \subseteq X$.*

- Un punto x appartiene alla chiusura \bar{E} se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in E e convergente a x .*
- E è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in E e convergente a $x \in X$, il limite x appartiene ad E .*

Dimostrazione. i) È chiaro che se $\{x_n\} \subseteq E$, $x_n \rightarrow x$, allora $x \in \overline{E}$, perché ogni palla $B_\varepsilon(x)$ contiene punti di E , contenendo i valori della successione definitivamente. Viceversa se $x \in \overline{E}$, ogni intorno di x contiene punti di E e in particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. La successione $\{x_n\}$ così definita è a valori in E per costruzione, e converge a x , dato che $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$.

ii) Se E è chiuso, si ha che $E = \overline{E}$. Se $\{x_n\}$ è a valori in E e converge a x , per quanto visto in i), si ha che $x \in \overline{E} = E$. Viceversa se è vera la proprietà di appartenenza ad E dei limiti di successione a valori in E , si ha che $\overline{E} \subseteq E$ e quindi E è chiuso. Infatti se $x \in \overline{E}$, per i) esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in E e convergente a x , ma allora, per la proprietà che si ipotizza, $x \in E$, e quindi $\overline{E} \subseteq E$. □

In particolare se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme dei numeri reali limitato inferiormente [superiormente], si ha che $\inf A \in \overline{A}$, [$\sup A \in \overline{A}$], e quindi esiste una successione $\{x_n\} \subseteq A$ tale che $x_n \rightarrow \inf A$ [$x_n \rightarrow \sup A$]. Ogni successione di questo tipo è detta **successione minimizzante** [**successione massimizzante**] per A . Analogamente se A non è limitato inferiormente [superiormente] si ha che $\inf A = -\infty \in \overline{A}$ [$\sup A = +\infty \in \overline{A}$] dove la chiusura è ora nello spazio metrico \mathbb{R}^* (vedi Esempio 1.3), e quindi esiste una successione $\{x_n\} \subseteq A$ tale che $x_n \rightarrow -\infty$ [$x_n \rightarrow +\infty$].

Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ punto di accumulazione di A e $f : A \rightarrow Y$ una funzione.

Un punto $y_0 \in Y$ è il **limite di $f(x)$ per x che tende a x_0** , in simboli $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = y_0$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A : 0 < d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$$

Si osservi che non è necessario che $x_0 \in A$, e anche se f è definita in x_0 può accadere che $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Ciò che importa è che f sia definita in punti vicini a x_0 , ed è per questo che si suppone che x_0 sia di accumulazione per A . Come per le successioni si vede subito che **se il limite esiste esso è unico**.

Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$, $f : A \rightarrow Y$ una funzione. Si dice che f è **continua in x_0** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Dal confronto tra le definizioni di limite e di funzione continua si deduce che se x_0 è punto isolato di A allora ogni funzione $f : A \rightarrow Y$ è continua in x_0 , perché qualunque sia $\varepsilon > 0$ se $\delta > 0$ è piccolo $d_X(x, x_0) < \delta \implies x = x_0$ e banalmente $d_Y(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$;

viceversa se x_0 è punto di accumulazione di A allora f è continua in x_0 se e solo se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Vale la seguente relazione tra funzioni continue e limiti di successioni detto **Teorema Ponte** (tra i limiti di successione e quelli di funzione), la cui dimostrazione è analoga a quella del corrispondente teorema per funzioni reali di variabile reale.

Teorema 1.7. *Siano X, Y spazi metrici, $A \subseteq X$, $x_0 \in A$, e $f : A \rightarrow Y$.*

- i) *Se f è continua in x_0 e $\{x_n\}$ è una successione in A tale che $x_n \rightarrow x_0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Viceversa:*
- ii) *Se da ogni successione $\{x_n\}$ a valori in A che converge a x_0 è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$ allora f è continua in x_0 .*

Dimostrazione. i) Se f è continua in x_0 , dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$, $d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Se $x_n \rightarrow x_0$, in corrispondenza di questo $\delta > 0$ esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq M$ allora $d(x_n, x_0) < \delta$ e quindi $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Ne segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

ii) Per mostrare il viceversa mostreremo che se f non è continua in x_0 , esiste una successione $x_n \rightarrow x_0$ dalla quale non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione x_{k_n} per la quale $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$. Sia dunque f non continua in x_0 . Ciò implica che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ con $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ e $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Per ogni estratta x_{k_n} si ha quindi $d_Y(f(x_{k_n}), f(x_0)) \geq \varepsilon$ e quindi $f(x_{k_n})$ non converge a $f(x_0)$. \square

Teorema 1.8. *Siano X uno spazio metrico e Y uno spazio normato su \mathbb{K} , e siano $f, g : X \rightarrow Y$, $\alpha : X \rightarrow \mathbb{K}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora le funzioni $f + g$, $\alpha f : X \rightarrow Y$ sono continue in x_0 . Se $Y = \mathbb{R}$ allora la funzione fg è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Il risultato si può dimostrare direttamente, sulla falsariga del Teorema 1.5, oppure come conseguenza dello stesso e del Teorema ponte. \square

Come nel caso delle funzioni reali di variabile reale si dimostra il

Teorema 1.9 (Teorema di composizione). *Siano X, Y, Z spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \rightarrow Y$, $g : f(A) \rightarrow Z$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $h = g \circ f : A \rightarrow Z$ è continua in x_0 .*

Esercizio 1.7. Dimostrare il Teorema 1.9

Se X, Y sono spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione, si dice che f è **continua** (in X) se è continua in ogni punto di X .

Vale il seguente

Teorema 1.10. *Siano X, Y spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$. f è continua se e solo se per ogni aperto [chiuso] V di Y , l'insieme $f^{-1}(V)$ è aperto [chiuso] in X .*

Esercizio 1.8. Dimostrare il Teorema 1.10.

I concetti che abbiamo introdotto in questo paragrafo sono una diretta generalizzazione di concetti e proprietà familiari per gli spazi euclidei \mathbb{R}^N e le applicazioni tra essi.

In \mathbb{R}^N tuttavia alcune definizioni possono essere equivalentemente introdotte "per componenti". Infatti dalla disuguaglianza (1.6) si ricava facilmente il

Teorema 1.11. [*Limiti per componenti*]

- Una successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ converge a $x \in \mathbb{R}^N$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, N$ le successioni delle componenti, x_n^i , convergono alla componente x^i .
- Se X è uno spazio metrico, $f = (f^1, \dots, f^N) : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione a valori in \mathbb{R}^N , e $x_0 \in X$, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \in \mathbb{R}^N$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, N$ le funzioni componenti $f^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfano $\lim_{x \rightarrow x_0} f^i(x) = y^i$.
- Se X è uno spazio metrico, $f = (f^1, \dots, f^N) : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione a valori in \mathbb{R}^N , e $x_0 \in X$, si ha che f è continua (in x_0) se e solo se ogni componente $f^i : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (in x_0).

Esercizio 1.9. Dimostrare il Teorema 1.11.

Il calcolo di limiti di funzioni vettoriali di una variabile (o successioni a valori in \mathbb{R}^N) è quindi immediato conoscendo i limiti di funzioni (o successioni) reali.

Ad esempio $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(\frac{1}{n}), (1 + \frac{2}{n})^n) = (1, e^2)$.

In particolare il calcolo delle **derivate di funzioni di una variabile a valori in \mathbb{R}^N** è immediato dopo aver dato la seguente definizione, del tutto analoga a quella della derivata di una funzione a valori reali.

Definizione 1.5. Sia $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^N) : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ a valori in \mathbb{R}^N . Se $t \in I$ si dice che \mathbf{f} è derivabile in t se esiste (in \mathbb{R}^N) il

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}}{dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h}.$$

In tal caso $\mathbf{f}'(t)$ è la **derivata o vettore derivata** di \mathbf{f} in t .

Se invece $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato gli eventuali vettori derivata destra in a e sinistra in b si definiscono in modo analogo prendendo limiti destri e sinistri rispettivamente.

Dal precedente teorema si ricava subito il

Teorema 1.12 (Derivate per componenti). *La funzione $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^N) : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$ è derivabile in $t \in I$ se e solo se ogni componente f^i*

è derivabile in t . In tal caso \mathbf{f} è continua in t e

$$\mathbf{f}'(t) = ((f^1)'(t), \dots, (f^N)'(t))$$

Ad esempio se $\mathbf{f}(t) = (e^{t^2}, \sin^2(t))$ si ha che $\mathbf{f}'(t) = (2te^{t^2}, 2\sin(t)\cos(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Densità, separabilità

Definizione 1.6. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme A è detto **denso** (in X) se $\overline{A} = X$.

Lemma 1.2. A è denso in X se e solo se per ogni aperto non vuoto O di X l'intersezione $A \cap O$ è non vuota (o se e solo se per ogni palla $B = B_r(x)$, $x \in X$, $r > 0$, l'intersezione $A \cap B$ è non vuota.)

Dimostrazione. Se $x \in X$ si ha che $x \in \overline{A}$ se e solo se ogni intorno di x contiene punti di A . Quindi A è denso in X se e solo se ogni intorno di ogni punto di X contiene punti di A o ancora se e solo se ogni palla centrata in un punto qualsiasi di X contiene punti di A ; dato che un aperto O è intorno di ogni suo punto si conclude facilmente. \square

Quindi A è denso se ogni punto dello spazio è approssimabile con distanza piccola a piacere da un elemento di A : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon$.

Piú in generale se $A \subseteq B \subseteq X$ si dice che A è **denso in B** se A è denso nel sottospazio metrico B di X ; dato che $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$, ciò equivale a dire che $\overline{A} \cap B = B$, e quindi che $B \subseteq \overline{A}$, cioè che ogni elemento $b \in B$ è approssimabile "a piacere" con un elemento $a \in A$:

A è denso in B se e solo se $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : d(a, b) < \varepsilon$

Per il Teorema 1.6 (i) A è **denso in B se e solo se per ogni $b \in B$ esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ che converge a b .**

Se B è denso in X e A è denso in B allora A è denso in X . Infatti se A è denso in B si ha che $B \subseteq \overline{A}$, quindi essendo \overline{A} chiuso si ha che $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Per la densità di B in X si ha poi che $\overline{B} = X$ e quindi $\overline{A} = X$, cioè A è denso in X .

Questa proprietà è molto usata, nel senso che se si conosce già un sottoinsieme B denso in uno spazio metrico X e si vuole dimostrare che un altro sottoinsieme A è denso, basta mostrare che A è denso in B .

Definizione 1.7. Uno spazio metrico (X, d) è detto **separabile** se esiste un suo sottoinsieme $A \subset X$ che sia *numerabile* e *denso* in X .

Esempio 1.6. Se $N \geq 1$ gli spazi \mathbb{R}^N sono separabili.

Infatti l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è numerabile e denso in \mathbb{R} . L'insieme \mathbb{Q}^N è numerabile in quanto prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi numerabili. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste

una successione $q_n \in \mathbb{Q}^N$ che converge a x (come segue facilmente dalla densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} e dalle disuguaglianze 1.6) e quindi \mathbb{Q}^N è denso in \mathbb{R}^N .

Teorema 1.13. *Sia (X, d) uno spazio metrico separabile e sia $Y \subseteq X$. Allora Y è separabile (come spazio metrico con la metrica indotta).*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un sottoinsieme $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, numerabile e denso in X . Per ogni numero razionale r e naturale n tali che $B_r(q_n) \cap Y \neq \emptyset$ si scelga un elemento $y = y_{r,n} \in B_r(q_n) \cap Y$. Il sottoinsieme $S = \{y_{r,n}\}$ così costruito è numerabile ed è denso in Y , cioè $Y \subseteq \overline{S}$: $\forall y \in Y, \forall \varepsilon > 0 \exists s \in S : d(y, s) < \varepsilon$. Infatti sia $y \in Y$ e sia r razionale con $0 < r < \varepsilon$. Essendo Q denso in X esiste $q_n \in Q$ tale che $d(q_n, y) < \frac{r}{2}$, e essendo $B_{\frac{r}{2}}(q_n) \cap Y \neq \emptyset$ esiste $y_{\frac{r}{2}, n} \in Y$ con $d(y_{\frac{r}{2}, n}, q_n) < \frac{r}{2}$. Si ha allora che $d(y, y_{\frac{r}{2}, n}) \leq d(y, q_n) + d(q_n, y_{\frac{r}{2}, n}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r < \varepsilon$. \square

In particolare **ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^N$ è separabile.**

Connessione

Definizione 1.8. Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Una **curva continua** in E è un' applicazione continua $\alpha : I \rightarrow E$ definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (con la metrica indotta dalla metrica euclidea su \mathbb{R}). L' immagine $\alpha(I)$ è detta **sostegno della curva**. Se $I = [a, b]$ è un intervallo compatto si parla di **arco continuo** e i punti $x = \alpha(a)$, $y = \alpha(b)$ sono gli **estremi dell' arco** (rispettivamente punto iniziale e punto finale).

Se X è uno spazio vettoriale normato, $x \in X$, $v \in X \setminus \{0\}$, il più semplice esempio di curva è la **retta passante per x di direzione v** : è la funzione $\alpha(t) = x + tv$, $t \in \mathbb{R}$. La restrizione di questa applicazione all' intervallo $[0, \infty)$ è la **semiretta** di origine x e direzione v , mentre la restrizione a un intervallo $[0, t_0]$ ha per immagine un segmento che va da x a $y = \alpha(t_0)$. Lo stesso insieme è sostegno di altri archi e se $x, y \in X$ definiremo **segmento di estremi x e y** l' arco continuo di estremi x e y $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ definito da $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, la cui immagine sarà pure chiamata segmento di estremi x, y e denotata con il simbolo $[x, y]$.

Definizione 1.9. Un sottoinsieme E di uno spazio normato X è detto **convesso** se dati due punti $p, q \in E$ il segmento $[p, q]$ è contenuto in E .

Un **esempio** di sottoinsieme convesso è una palla aperta (o chiusa); se $p, q \in B_r(x)$ e $z = (1-t)p + tq$ si ha che $\|z - x\| = \|(1-t)(p-x) + t(q-x)\| \leq (1-t)\|p-x\| + t\|q-x\| < (1-t)r + tr = r$.

Definizione 1.10. Un sottoinsieme aperto A di uno spazio normato X è detto **connesso**(per archi) se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste un arco continuo $\alpha : [a, b] \rightarrow E$ di estremi x e y .

Ad esempio un aperto convesso in uno spazio normato è connesso per archi.

Intuitivamente un insieme connesso è un insieme "fatto di un solo pezzo".

Approfondiremo il concetto di connessione nel capitolo sulle curve.

Compattezza

Definizione 1.11. Un sottoinsieme K di uno spazio metrico X è detto **sequenzialmente compatto** o **compatto per successioni** se da ogni successione $\{x_n\}$ a valori in K si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente a un punto di K .

Nel seguito diremo semplicemente che un sottoinsieme K è **compatto** anziché **sequenzialmente compatto** o **compatto per successioni**.

Un sottoinsieme E di X è detto **precompatto** se \bar{E} è compatto.

Teorema 1.14. *Sia X uno spazio metrico.*

- a) *Se $K \subset X$ è compatto allora K è chiuso e limitato.*
- b) *Se X è compatto e $K \subset X$ è chiuso allora K è compatto.*

Dimostrazione. a) Sia K compatto. Per mostrare che esso è chiuso dobbiamo mostrare che per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in K e convergente a $x \in X$, il limite x appartiene ad K . Per ipotesi si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente a un punto y di K , ma dato che $\{x_n\}$ converge a x si ha che $x = y \in K$.

Se K non fosse limitato per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $x_n \in K$ con $\|x_n\| > n$. e da ciò è immediato che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$. Dalla successione x_n non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente a un punto $x \in K$, perché si avrebbe $\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$, e ciò è assurdo perché per ipotesi K è compatto.

b) Sia X compatto e $K \subset X$ chiuso, e sia $\{x_n\}$ una successione in K . Dobbiamo mostrare che si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K . Per ipotesi si può estrarre una sottosuccessione $\{y_n\} = \{x_{k_n}\}$ convergente a un punto $x \in X$, ma essendo $\{y_n\}$ a valori in K e K chiuso, il limite $x \in K$, quindi esiste una estratta $\{x_{k_n}\}$ convergente a un punto di K .

□

Sia $f : X \rightarrow Y$ un' applicazione tra due spazi metrici. Si dice che f è **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in X \quad d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Per definizione di limite si ha che $f : X \rightarrow Y$ è uniformemente continua se e solo se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x, y \in X, d_X(x, y) < \delta} (d_Y(f(x), f(y))) \right\} = 0$$

Alcune proprietà fondamentali dei compatti sono illustrate nel seguente

Teorema 1.15.

- (1) $K \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
- (2) Se X, Y sono spazi metrici, $f : X \rightarrow Y$ è continua, e $K \subseteq X$ è compatto, allora $f(K)$ è un sottoinsieme compatto di Y .
- (3) (Teorema di Weierstrass) Se X è uno spazio metrico, $K \subseteq X$ è compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f ha massimo e minimo assoluto in K : esistono $x_1, x_2 \in K$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in K$.
- (4) (Teorema di Heine-Cantor) Se X, Y sono spazi metrici, $f : X \rightarrow Y$ è continua, e $K \subseteq X$ è compatto, allora f è uniformemente continua in K .
- (5) Se X, Y sono spazi metrici, $K \subseteq X$ è compatto e $f : K \rightarrow Y$ è continua e iniettiva, allora $(f(K))$ è un sottoinsieme compatto di Y e $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ è continua.

Dimostrazione. (1) Se K è compatto esso è chiuso, segue subito dalla caratterizzazione dei chiusi. Se K non è limitato esiste una successione x_n in K tale che $\lim_n \|x_n\| = +\infty$, e da tale successione non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente (perché la norma convergerebbe in \mathbb{R}).

Viceversa per mostrare che C chiuso e limitato è compatto (Teorema di Bolzano-Weierstrass in \mathbb{R}^N), osserviamo che C è in tal caso un sottoinsieme chiuso di un N -intervallo $J = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ e basta dimostrare che un tale intervallo J è compatto. Se $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^N)$ è una successione in J , per il teorema di Bolzano-Weierstrass in \mathbb{R} esiste una sottosuccessione $x_{k_1(n)}$ tale che $x_{k_1(n)}^1$ converge a $x^1 \in [a_1, b_1]$, da questa si può estrarre una sottosuccessione $x_{k_2(n)}$ tale che $x_{k_2(n)}^2 \rightarrow x^2 \in [a_2, b_2]$, \dots , e alla fine si ottiene una sottosuccessione convergente a $x = (x^1, \dots, x^N) \in J$ perché le sue componenti convergono alle componenti di x .

- (2) Sia y_n una successione in $f(K)$ e x_n una successione in K tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo K compatto si può estrarre una sottosuccessione $x_{k_n} \rightarrow x \in K$ e per la continuità di f si ha che $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x) \in f(K)$.
- (3) È una conseguenza dei precedenti punti: $f(K)$ è compatto, quindi chiuso e limitato. Ne segue che $\sup f(K)$ è finito, e appartiene a $f(K)$ essendo nella chiusura di $f(K)$ come si vede

facilmente (esiste una successione x_n in K tale che $\lim_n f(x_n) = \sup f(K)$), analogamente per l' estremo inferiore.

- (4) Per assurdo esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta = \frac{1}{n}$ esistono punti $x_n, y_n \in K$ con $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0 \forall n$. Dalla successione x_n si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a $x \in K$, e quindi, essendo $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$, per la disuguaglianza triangolare anche y_{k_n} converge a x .

Per la continuità di f le successioni $f(x_{k_n})$ e $f(y_{k_n})$ convergono entrambe a $f(x)$, contraddicendo la relazione

$$d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0 \forall n.$$

- (5) Per il Teorema ponte dobbiamo mostrare che se $y = f(x) \in f(K)$ e $y_n = f(x_n)$ è una successione in $f(K)$ che converge a y , allora una estratta della successione $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge a $x = f^{-1}(y)$.

Per la compattezza di K dalla successione x_n si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a $z \in K$, e per la continuità di f si ha che $f(z) = \lim_n f(x_n) = \lim_n y_n = y$, e quindi $z = f^{-1}(y) = x$ e $x_{k_n} = f^{-1}(y_{k_n})$ converge a $x = f^{-1}(y)$. □

Definizione 1.12. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra due spazi metrici. Si dice che f è Lipschitziana se esiste $L > 0$ (costante di Lipschitz per f) tale che per ogni $a, b \in X$ si ha $d_Y(f(a), f(b)) \leq L d_X(a, b)$.

Se f è Lipschitziana la più piccola costante L per la quale la relazione precedente è verificata è detta *migliore costante di Lipschitz per f* e indicata con il simbolo $\text{Lip}(f)$:

$$\text{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} : a, b \in X, a \neq b\right\}.$$

È immediato vedere che **se f è Lipschitziana con costante L allora f è uniformemente continua**: la definizione di uniforme continuità è verificata con $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$.

Definizione 1.13. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme non vuoto di X . La funzione **distanza da A** è la funzione $d_A : X \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $d_A(y) = d(y, A) = \inf\{d(x, y) : x \in A\}$. Se A, B sono sottoinsiemi non vuoti di X la **distanza tra A e B** è il numero reale non negativo definito da $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

Lemma 1.3. Sia X uno spazio metrico e siano A, B sottoinsiemi non vuoti di X .

- i) La funzione d_A è Lipschitziana (con costante di Lipschitz 1), quindi uniformemente continua.
- ii) $d_A(y) = 0$ se e solo se $y \in \overline{A}$.
- iii) $d(A, B) = \inf\{d_A(y) : y \in B\} = \inf\{d_B(x) : x \in A\}$

Dimostrazione. i) Siano $y, z \in X$, $x \in A$. Per la disuguaglianza triangolare si ha che $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ e prendendo l'estremo inferiore al variare di $x \in A$ al primo membro si ottiene $d_A(y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x \in A$, $z \in X$. Prendendo ora l'estremo inferiore al secondo membro si ha: $d_A(y) \leq d_A(z) + d(z, y)$ e quindi $d_A(y) - d_A(z) \leq d(z, y)$. Scambiando i ruoli di y e z , essendo $d(y, z) = d(z, y)$ si ottiene $d_A(y) - d_A(z) \leq d(z, y)$ e quindi infine $|d_A(y) - d_A(z)| \leq d(y, z)$ e allora d_A è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$.

ii) Se $y \in \overline{A}$, per la Proposizione 2.3 esiste una successione y_n a valori in A che converge a y , quindi $d_A(y) \leq d(y, y_n) \rightarrow 0$ e $d_A(y) = 0$. Viceversa se $d_A(y) = \inf\{d(x, y) : x \in A\} = 0$ per le proprietà dell'estremo inferiore per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $y_n \in A$ tale che $d(y, y_n) < \frac{1}{n}$. È chiaro che $y_n \rightarrow y$ per $n \rightarrow \infty$ e allora $y \in \overline{A}$ essendo limite di una successione a valori in A .

iii) Se $x \in A$, $y \in B$ si ha che $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \leq d(x, y)$. Prendendo l'estremo inferiore al variare di $x \in A$ nel secondo membro si ottiene che $d(A, B) \leq d_A(y)$ per ogni $y \in B$. Prendendo l'estremo inferiore al variare di $y \in B$ si ha infine che $d(A, B) \leq \inf\{d_A(y) : y \in B\}$.

Per mostrare la disuguaglianza inversa ricordiamo che per le proprietà dell'estremo inferiore, dato $\varepsilon > 0$, esistono $x \in A$, $y \in B$ tali che $d(x, y) < d(A, B) + \varepsilon$. Prendendo prima l'estremo inferiore al variare di $x \in A$ e poi l'estremo inferiore al variare di $y \in B$ si ottiene $\inf\{d_A(y) : y \in B\} \leq d(A, B) + \varepsilon$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ è quindi $\inf\{d_A(y) : y \in B\} \leq d(A, B)$, che insieme alla disuguaglianza precedente dà $d(A, B) = \inf\{d_A(y) : y \in B\}$. Analogamente si ottiene che $d(A, B) = \inf\{d_B(x) : x \in A\}$. \square

Una conseguenza del precedente lemma è il seguente teorema, per il quale premettiamo una definizione.

Definizione 1.14. Sia X uno spazio metrico e sia $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Il **supporto** di g è la chiusura in X dell'insieme dei punti di X nei quali la funzione non è nulla: $\text{supp } g = \overline{\{x \in X : g(x) \neq 0\}}$.

Teorema 1.16. Siano C, K, A sottoinsiemi di uno spazio metrico X .

- i) Se C è chiuso, K è compatto e $C \cap K = \emptyset$ allora $d(C, K) > 0$.
- ii) Se K è compatto, A è aperto e $K \subseteq A$, esistono un aperto B e una funzione continua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tali che $K \subset B \subset \overline{B} \subset A$, $g(x) = 1 \forall x \in K$, e $\text{supp } g$ è contenuto in $\overline{B} \subset A$ (quindi $g(x) = 0 \forall x \notin A$).

Se inoltre $X = \mathbb{R}^N$ si può prendere l'aperto B a chiusura compatta \overline{B} , e quindi $\text{supp } g \subseteq \overline{B}$ è un compatto contenuto in A .

Dimostrazione. i) Per quanto visto nel lemma precedente la funzione d_C è continua in X e essendo K compatto essa ha minimo in K : esiste $a \in K$ tale che $d_C(a) = \inf\{d_C(y) : y \in K\} = d(C, K)$. Dato che C è chiuso e $a \notin C$ si ha che $a \notin \overline{C} = C$ e quindi $d(C, K) = d_C(a) > 0$.

ii) Posto $C = A^c = X \setminus A$ si ha che K e C sono disgiunti, K è compatto e C è chiuso, quindi $d(C, K) = d > 0$. Definiamo $B = \{x \in X : d_K(x) < \frac{d}{2}\}$ e sia $D = B^c = \{x \in X : d_K(x) \geq \frac{d}{2}\}$. Essendo d_K continua e $D = d_K^{-1}([\frac{d}{2}, +\infty))$, si ha che D è chiuso. Definiamo la funzione $g(x) = \frac{d(x,D)}{d(x,D)+d(x,K)}$.

Essa è continua in X perché il denominatore non si annulla mai. Se $x \in K$ è $d(x, D) \geq \frac{d}{2}$ e $g(x) = \frac{d(x,D)}{d(x,D)} = 1$, mentre se $x \in D$ è $d(x, D) = 0$ e quindi $g(x) = 0$. Ne segue che $\{x \in X : g(x) \neq 0\} \subseteq B = D^c$ e allora $\text{supp } g = \overline{\{x \in X : g(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{B}$. Inoltre se $x \in \overline{B}$ allora $d_K(x) \leq \frac{d}{2}$, quindi $\{x \in X : d_K(x) > \frac{d}{2}\} \subseteq [\overline{B}]^c$. Ciò implica che $\overline{B} \subset A$ perché $C = A^c \subset [\overline{B}]^c$: se $x \in C = A^c$ allora $d_K(x) \geq d$ e quindi $x \in \{x \in X : d_K(x) > \frac{d}{2}\} \subseteq [\overline{B}]^c$.

Se poi $X = \mathbb{R}^N$ e K è compatto, allora K è chiuso e limitato e si verifica subito che B è pure limitato, dunque \overline{B} è compatto, essendo chiuso e limitato. Essendo $\text{supp } g$ chiuso e contenuto nel compatto \overline{B} esso è compatto. \square

Torneremo nel capitolo sulle curve su alcuni concetti, in particolare sui concetti di connessione e compattezza, approfondendo alcune proprietà relative.

Completezza, Spazi di Banach e Hilbert

Definizione 1.15. Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio metrico X è detta **successione di Cauchy o fondamentale** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq N$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Talvolta si esprime questa condizione scrivendo $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Lemma 1.4. Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in X convergente a un punto $x \in X$ allora è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Per definizione di limite di successione se $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che se $n \geq N$ si ha $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se ora $n, m \geq N$ per la disuguaglianza triangolare si ha $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. \square

Il viceversa non è in generale vero. Ad esempio se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in \mathbb{Q} , convergente in \mathbb{R} a un numero irrazionale x (ad esempio $(1 + \frac{1}{n})^n$ che converge al numero e), per il lemma precedente essa è una successione di Cauchy in \mathbb{R} e quindi anche nel sottospazio metrico \mathbb{Q} . D' altra parte essa non converge in \mathbb{Q} a un numero y , perché per

la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} convergerebbe a y anche in \mathbb{R} e per l'unicità del limite si avrebbe $y = x$, irrazionale che non appartiene a \mathbb{Q} .

Definizione 1.16. Uno spazio metrico (X, d) è detto **spazio metrico completo** se ogni successione di Cauchy in X converge a un elemento di X .

Vale la seguente relazione per i sottospazi metrici di spazi completi.

Teorema 1.17. *Sia X uno spazio metrico completo e sia E un sottoinsieme di X . Il sottospazio metrico E (con la metrica indotta da X) è completo se e solo se E è chiuso in X .*

Dimostrazione. Sia E chiuso in X e sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in E . Per la completezza di X la successione converge a un elemento $x \in X$, e essendo E chiuso, per la Proposizione 2.3 ii) $x \in E$. Quindi la successione converge in E , che è allora completo.

Viceversa supponiamo che E sia completo come sottospazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione in E che converge a un elemento $x \in X$. Se mostriamo che $x \in E$, ancora per la Proposizione 2.3 ii) otterremo che E è chiuso in X .

Dato che $\{x_n\}$ converge in X , essa è di Cauchy in X e quindi in E . Per la completezza di E , $\{x_n\}$ converge in E a un elemento $y \in E$. Ma allora $\{x_n\}$ converge a y anche in X , e per l'unicità del limite si ha $x = y \in E$. \square

Il noto Criterio di Cauchy per le successioni reali mostra che \mathbb{R} con la metrica usuale è uno spazio completo. Un modo per dimostrare il criterio di Cauchy in \mathbb{R} è il seguente.

Innanzitutto dimostriamo due utili lemmi generali.

Lemma 1.5. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in uno spazio metrico (X, d) . Allora $\{x_n\}$ è limitata.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di successione di Cauchy, e sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq 1$ si ha $d(x_n, x_m) < 1$. Posto $M = \max_{i=1, \dots, n_1-1} d(x_i, x_{n_1})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $d(x_n, x_{n_1}) < M + 1$, e quindi $\{x_n\} \subseteq B_{M+1}(x_{n_1})$ e la successione è limitata. \square

Lemma 1.6. *Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in uno spazio metrico X e supponiamo che esista una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente a un elemento $x \in X$. Allora la successione $\{x_n\}$ converge a x .*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi esistono N_1 e N_2 tali che se $n, m \geq N_1$ si ha $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, mentre se $n \geq N_2$ si ha $d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se ora $N = \max\{N_1, N_2\}$ e $n \geq N$, essendo $m = k_n \geq n$ per ogni n (per definizione di sottosuccessione), si ha che $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si ha che $\{x_n\}$ converge a x . \square

Teorema 1.18 (Criterio di Cauchy in \mathbb{R}). *Lo spazio metrico \mathbb{R} (con la metrica euclidea) è completo: ogni successione di Cauchy in \mathbb{R} converge a un numero reale.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.5 la successione è limitata, per il Teorema 1.15 si può allora estrarre da essa una sottosuccessione convergente a un numero reale, e per il Lemma 1.6 si ha allora che tutta la successione converge a tale numero. \square

Definizione 1.17. Uno **spazio di Banach** è uno spazio vettoriale normato che sia completo nella metrica indotta dalla norma.

Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio vettoriale con prodotto interno che sia completo nella metrica indotta dal prodotto interno.

Lo spazio può essere reale o complesso e ove necessario si specifica dicendo spazio di Banach (Hilbert) reale (complesso).

Teorema 1.19. *Gli spazi \mathbb{R}^N , \mathbb{C}^N sono spazi di Hilbert.*

Dimostrazione. Il risultato segue facilmente dalla completezza di \mathbb{R} . Infatti è facile verificare che, grazie alle (1.6), una successione $\{x_n\}$ in \mathbb{R}^N è di Cauchy se e solo se le sue componenti $\{x_n^i\}$ sono successioni di Cauchy in \mathbb{R} , e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ se e solo se per ogni componente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$. \square

Alcune disuguaglianze notevoli

Proponiamo ora come un lungo esercizio guidato alcune disuguaglianze, che ci saranno utili in seguito

Esercizio 1.10. (1) Dimostrare che se $x, y \geq 0$ valgono le seguenti disuguaglianze per $p > 0$, $p \neq 1$:

$$\begin{aligned} x^p + y^p &\leq (x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p) && \text{se } p > 1 \\ (x + y)^p &\leq x^p + y^p \leq 2^{1-p}(x + y)^p && \text{se } 0 < p < 1 \end{aligned}$$

[Le disuguaglianze da dimostrare sono ovvie se $x = 0$ oppure $y = 0$. Se invece x, y sono entrambi positivi, ponendo $t = \frac{x}{x+y}$, e quindi $1 - t = \frac{y}{x+y}$, si studia per $0 \leq t \leq 1$ la funzione continua $g(t) = t^p + (1 - t)^p$ e si osserva che se $p > 1$ ha minimo in $t = \frac{1}{2}$ e $2^{1-p} = g(\frac{1}{2}) \leq g(t) \leq 1 = g(0) = g(1)$, mentre se $0 < p < 1$ ha massimo in $t = \frac{1}{2}$ e $2^{1-p} = g(\frac{1}{2}) \geq g(t) \geq 1 = g(0) = g(1)$...]

(2) **Disuguaglianza di Young 1** Dimostrare che

$$(1.10) \quad x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \text{se } x, y \geq 0, \quad 0 < \lambda < 1$$

[Se $y = 0$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti dividendo per $y > 0$ si deve dimostrare che $g(t) = t^\lambda - \lambda t \leq 1 - \lambda$ per $t \geq 0$. Studiando la funzione $g(t)$ si osserva che ha derivata

$g'(t) = \lambda(t^{\lambda-1} - 1)$, positiva in $(0, 1)$ e negativa per $t > 1$, quindi $t = 1$ è un punto di massimo assoluto per g in $[0, +\infty)$. Essendo $g(1) = 1 - \lambda$, si ottiene che $t^\lambda - \lambda t \leq 1 - \lambda$ per ogni $t \geq 0$.]

(3) **Disuguaglianza di Young 2**

Se $p > 1$ e $p' = \frac{p}{p-1}$, essi verificano l'uguaglianza $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e si dice che p e p' sono **esponenti coniugati**.

Si noti che $(p')' = p$, $h(p) = p' = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ è una funzione decrescente, $p' \rightarrow +\infty$ se $p \rightarrow 1^+$, $p' \rightarrow 1$ se $p \rightarrow +\infty$, $2' = 2$ (quindi $1 < p < 2$ se e solo se $p' > 2$).

Dimostrare che la disuguaglianza elementare $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (che equivale a $(a - b)^2 \geq 0$) si generalizza nella seguente

$$(1.11) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \text{se } a, b \geq 0, p > 1, p' = \frac{p}{p-1}$$

e più in generale se $\varepsilon > 0$ si ha che

$$(1.12) \quad ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{b^{p'}}{p'}$$

[La prima disuguaglianza si ottiene subito dalla precedente versione della disuguaglianza di Young, ponendo $x = a^p$, $y = b^{p'}$, $\lambda = \frac{1}{p}$, e quindi $1 - \lambda = \frac{1}{p'}$. La seconda si ottiene scrivendo $ab = [a \varepsilon^{\frac{1}{p}}] [b (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}]$ e procedendo allo stesso modo.]

(4) **Disuguaglianza di Hölder finita**

Siano $n \geq 2$; $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$; $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ il coniugato di p . Dimostrare che

$$(1.13) \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Siano $A = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$. Se $A = 0$ oppure $B = 0$ la disuguaglianza è ovvia. In caso contrario per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ fissato la disuguaglianza di Young ci dice che $\frac{|x_i|}{A} \frac{|y_i|}{B} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{A^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_i|^{p'}}{B^{p'}}$. Sommando per i da 1 a n si ottiene $\frac{1}{AB} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{A^p} + \frac{1}{p'} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} \frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{p'} \frac{B^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, quindi $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq AB = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$.]

(5) **Disuguaglianza di Minkowski finita**

Siano $n \geq 2$; $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$; $p \geq 1$. Dimostrare che

$$(1.14) \quad \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ è una norma su \mathbb{R}^N .

[La disuguaglianza è immediata se $p = 1$ oppure se $x_i = y_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ (in quest'ultimo caso è un'uguaglianza). Altrimenti si ha che

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1},$$

e per la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)p'} \right]^{\frac{1}{p'}} + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Essendo $(p-1)p' = p$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left[(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right] [\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p]^{\frac{1}{p'}}.$$

Dividendo per $[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p]^{\frac{1}{p'}} = [\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p]^{1-\frac{1}{p}}$ si ottiene la disuguaglianza.]

(6) Disuguaglianza di Hölder per le serie

Siano $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p . Siano $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni reali e supponiamo che

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^{p'} < +\infty.$$

Dimostrare che la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$ converge assolutamente e che vale la disuguaglianza

$$(1.15) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Come per la disuguaglianza finita sommando per infiniti termini, passando al limite sulle somme finite ...]

(7) Disuguaglianza di Minkowski per le serie

Sia $p \geq 1$, e siano $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni reali tali che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty$, $\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p < +\infty$. Dimostrare che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p < +\infty$ e che vale la disuguaglianza

$$(1.16) \quad \left[\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ è una norma sullo spazio l^p , spazio delle successioni reali $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tali che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty$.

[Come per la disuguaglianza finita sommando per infiniti termini, passando al limite sulle somme finite ...]

(8) Disuguaglianza di Hölder per gli integrali

Siano $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p e siano f, g due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$. Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$(1.17) \quad \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Come per la dis. finita, se $A = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \neq 0$, applicando la disuguaglianza di Young e integrando $\frac{f(x)}{A} \frac{g(x)}{B}$ invece che sommare ...]

(9) Disuguaglianza di Minkowski per gli integrali

Sia $p \geq 1$, e siano f, g due funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$.

Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$(1.18) \quad \left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ è una norma su $C^0([a, b])$.

[Come per la disuguaglianza finita integrando invece che sommare ...]

2. CALCOLO DIFFERENZIALE

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definita in un aperto A di \mathbb{R}^N . Se $i \in \{1, \dots, n\}$, diremo che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x^i in un punto $x = (x^1, \dots, x^N) \in A$ se esiste finito $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i+t, x^{i+1}, \dots, x^N) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \dots, x^N)}{t}$.

Si noti che il limite è un limite di una funzione di una variabile, si dà un incremento alla sola variabile x^i mentre le altre variabili sono fissate. In tal caso il valore del limite è la **derivata parziale di f rispetto alla variabile x^i nel punto x** e si indica come detto con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Altri simboli per indicare la stessa quantità sono i seguenti

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = f_{x^i}(x) = D_i f(x).$$

Il **gradiente** di f in x è il vettore che ha per componenti le derivate parziali: $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^N}(x))$.

Se f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x^k in ogni punto $x \in A$ la **funzione derivata parziale k -esima in A** è la funzione che a ogni $x \in A$ associa $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x)$.

Il calcolo delle derivate parziali di una funzione elementare è semplice e meccanico come quello delle derivate di una funzione di una variabile: si tratta di fissare tutte le variabili tranne una rispetto alla quale invece si calcola la derivata.

Infatti se $g(s) = f(x^1, \dots, x^{i-1}, s, x^{i+1}, \dots, x^N)$, per definizione $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i+t, x^{i+1}, \dots, x^N) - f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \dots, x^N)}{t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x^i+t) - g(x^i)}{t} = g'(x^i)$.

Nel caso di $N = 2$ si indicano spesso le variabile come (x, y) e le due derivate parziali come $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.

Esempio Se $f(x, y) = x^2 + y^2$ le funzioni derivate parziali sono $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$, mentre se $f(x, y) = xy$ si ha che le funzioni derivate parziali sono $f_x(x, y) = y$, $f_y(x, y) = x$.

Il concetto di derivata parziale è un caso particolare del concetto di derivata direzionale.

Una direzione in \mathbb{R}^N è un vettore unitario, cioè un vettore $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^N)$ di norma $|\mathbf{v}| = 1$, e la **derivata di f nel punto x nella direzione \mathbf{v}** è, se esiste,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t\mathbf{v}) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^1+tv^1, \dots, x^N+tv^N) - f(x^1, \dots, x^N)}{t}.$$

Se $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, dove \mathbf{e}_j è il j -esimo versore della base canonica con tutte le componenti nulle tranne la j -esima che è pari a 1, dalla definizione si vede che $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, e quindi le derivate parziali sono un caso particolare delle derivate direzionali.

Se $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è una funzione a valori vettoriali si dà la stessa definizione di funzione derivabile e dei vettori derivate parziali e si usa la stessa notazione $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(x)$ per il **vettore derivata parziale**.

Come nel caso dei vettori derivati di funzioni di una variabile si ottiene subito che \mathbf{f} è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x^i in x se e solo se esistono le derivate parziali rispetto alla variabile x^i di tutte le componenti di f e in tal caso

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial x_j}(x) \right).$$

Analogamente se \mathbf{v} è una direzione il vettore derivata di \mathbf{f} in x nella direzione \mathbf{v} sarà indicato con la stessa notazione del caso scalare:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(x), \dots, \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{v}}(x) \right).$$

La matrice $M \times N$ che ha per colonne i vettori derivate parziali è la **matrice jacobiana** di f (a volte chiamata anche in questo caso **gradiente** di f), che si indica con uno dei simboli $J_f(x) = Df(x)$:

$$(J_f(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

Tale matrice, che ha per colonne i vettori derivate parziali, ha invece per righe i gradienti $\nabla f_i(x)$, $i = 1, \dots, M$ delle componenti $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Un altro modo di indicare la matrice jacobiana di $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N))$ è

$$Df(x) = J_f(x) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_M)}{\partial(x_1, \dots, x_N)}(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^{M,N}$$

Una funzione $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è detta **differenziabile in** $x \in A$ se esiste un' applicazione lineare $T = T_x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, detta in tal caso **differenziale** di f in x , tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + T\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \quad (\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}), \quad \text{cioè}$$

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - T\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - T\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^M}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

Dimostriamo ora un teorema che dà **condizioni necessarie di differenziabilità** e precisa l' operatore lineare che compare nella definizione:

Teorema 2.1. *Se una funzione definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori in \mathbb{R}^M è differenziabile in un punto x , allora*

- (1) *essa è continua in x*
- (2) *esistono tutte le derivate parziali e direzionali in x , e se \mathbf{v} è una direzione $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(x) = T_x \mathbf{v}$*
- (3) *Il differenziale T_x di \mathbf{f} in x è rappresentato nella base canonica dalla matrice jacobiana $J_f(x)$, cioè se A è la matrice dell' operatore lineare T_x allora $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.*

*In particolare vale per le derivate direzionali la **formula del gradiente**: $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(x) = \mathbf{f}'(x) \mathbf{v} = J_f(x) \mathbf{v}$
(se $M = 1$: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = \nabla f(x) \cdot \mathbf{v}$).*

Dimostrazione. Sia dapprima $M = 1$, cioè f è una funzione scalare.

In tal caso l' operatore lineare $T = T_x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è rappresentato da una matrice riga ${}^t \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, dove $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x$ è un vettore di \mathbb{R}^N , e $T_x h = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}$ dove il punto indica il prodotto scalare, e $f(x+h) - f(x) = T_x \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$.

- (1) Dalla relazione precedente, usando la disuguaglianza triangolare e quella di Cauchy-Schwarz, si ha che

$$0 \leq |f(x+h) - f(x)| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})| \leq (\|\mathbf{a}\| + \alpha(h))\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$$
 se $\mathbf{h} \rightarrow 0$, e quindi f è continua in x .
- (2) Se \mathbf{v} è una direzione, cioè $\|\mathbf{v}\| = 1$, e $h = h(t) = t\mathbf{v}$, si ha che $\|t\mathbf{v}\| = |t|$, e se $t \rightarrow 0$ allora $h \rightarrow 0$.
 Riscrivendo la relazione precedente si ottiene che

$$\frac{f(x+t\mathbf{v}) - f(x)}{t} = \frac{T_x(t\mathbf{v}) + |t|\alpha(t\mathbf{v})}{t} = \frac{tT_x(\mathbf{v}) + |t|\alpha(t\mathbf{v})}{t} =$$

$$T_x(\mathbf{v}) + \frac{|t|}{t}\alpha(t\mathbf{v}) \rightarrow T_x(\mathbf{v}) \text{ se } t \rightarrow 0.$$
- (3) Se scegliamo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ otteniamo $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = T_x \mathbf{e}_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = a_j$, quindi la matrice riga ${}^t \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ che rappresenta T_x è costituita dalle derivate parziali di f in x .

Il caso vettoriale segue subito dal caso scalare, ricordando che i limiti di funzioni a valori vettoriali esistono se e solo se esistono i limiti delle componenti, e si calcolano per componenti. Ne segue che \mathbf{f} è differenziabile in x se e solo se lo sono le sue componenti f_i , e in tal caso \mathbf{f} è continua ed esistono i vettori derivate direzionali in x .

Inoltre, se data la matrice A di $T = T_x$ indichiamo con A^i l' i -esima riga di A , e \mathbf{f} è differenziabile in x , cioè

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$
 deve essere per ogni componente

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}) - (A\mathbf{h})_i}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$
 e quindi dal caso scalare si ottiene che $(A\mathbf{h})_i = A^i \cdot \mathbf{h} = \nabla f_i \cdot \mathbf{h}$, cioè $A^i = \nabla f_i$, e quindi A è la matrice jacobiana di \mathbf{f} . \square

Il **differenziale** di f in x sarà indicato con uno dei simboli

$f'(x) = df(x)$ (ma anche $Df(x)$ identificandolo alla matrice jacobiana che lo rappresenta nella base canonica).

Osservazione Nella dimostrazione del teorema abbiamo visto che se A è un aperto di \mathbb{R}^N , $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in x , \mathbf{v} è una direzione e poniamo $g(t) = f(x + t\mathbf{v})$, essa è definita almeno in un intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di 0 in \mathbb{R} (perché A è aperto) e esiste $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = f'(x)\mathbf{v} = \nabla f(x) \cdot \mathbf{v}$.

La relazione non dipende dal fatto che \mathbf{v} sia una direzione: se $h \in \mathbb{R}^N$ e $g(t) = f(x + th)$, allora g è derivabile in 0 con
 $g'(0) = f'(x)h = \nabla f(x) \cdot h$.

Più in generale se f è differenziabile in A , $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^N$ e il segmento $[x, x+h] = \{x + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset A$, allora la funzione $g(t) = f(x + th)$ è derivabile in ogni punto $t \in [0, 1]$, e si ha che

$$g'(t) = f'(x + th)h = \nabla f(x + th) \cdot h$$

La verifica è identica: $\frac{g(t+s) - g(t)}{s} = \frac{f(x+th+sh) - f(x+th)}{s} = \frac{\nabla f(x+th) \cdot (sh) + |s|\|\mathbf{h}\|\alpha(sh)}{s} =$
 $\nabla f(x+th) \cdot h + \frac{|s|\|\mathbf{h}\|}{s}\alpha(sh)$, con $\alpha(sh) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow 0$ (e quindi $sh \rightarrow 0$).

Ne segue che $g'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(t+s) - g(t)}{s} = f'(x + th)h = \nabla f(x + th) \cdot h$.

Questa osservazione conduce subito al

Teorema 2.2. (di Lagrange o del valor medio per funzioni scalari). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in un aperto A ; siano $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^N$ tali che il segmento $[x, x+h] = \{x+th : 0 \leq t \leq 1\} \subset A$. Esiste allora un punto $x_0 = x+t_0h \in [x, x+h]$, con $0 < t_0 < 1$ tale che $f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h$

Dimostrazione. Dall'osservazione precedente, se $g(t) = f(x+th)$, sappiamo che g è derivabile nel segmento $[0, 1]$ con $g'(t) = f'(x+th)h = \nabla f(x+th) \cdot h$. Dal teorema di Lagrange per funzioni di una variabile deduciamo che esiste $t_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t_0)(1-0) = g'(t_0)h = f'(x+t_0h)h = \nabla f(x+t_0h) \cdot h$ \square

Dimostriamo ora un teorema che dà invece delle **condizioni sufficienti di differenziabilità**.

Teorema 2.3 (del differenziale totale). Sia $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ una funzione definita in un aperto A di \mathbb{R}^N , sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, e supponiamo che esistano le derivate parziali $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(x)$ per x in un intorno U di \mathbf{x}_0 , e che esse siano continue in \mathbf{x}_0 .

Allora \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 .

Dimostrazione. Dato che una funzione $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$ è differenziabile in x_0 se e solo se lo sono le sue componenti f_i , si può supporre che la funzione f sia scalare, cioè $M = 1$. Inoltre per semplicità di notazioni supporremo che $N = 2$ (nel caso generale la complicazione è solo formale e grafica ...) e useremo la notazione classica (x, y) per le coordinate cartesiane di un punto nel piano.

Sappiamo dalle condizioni necessarie di differenziabilità che $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) se e solo se ammette derivate parziali in questo punto e inoltre $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Sia $B = B_r((x_0, y_0))$ una palla contenuta in U e consideriamo un incremento (h, k) con $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < r$.

Per valutare l'incremento della funzione lo decomponiamo in un incremento orizzontale e in uno verticale, in modo da avere lungo i segmenti paralleli agli assi funzioni di una sola variabile, cui possiamo applicare il teorema di Lagrange per funzioni scalari di una variabile: $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$.

Osserviamo che se consideriamo la funzione di una variabile $g(x) = f(x, y_0+k)$, essa è derivabile in un intorno di x_0 con $g'(x) = f_x(x, y_0+k)$ (è la definizione stessa di derivata parziale) perché f_x esiste in un intorno di (x_0, y_0) .

Per il teorema di Lagrange esiste $0 < t_1 < 1$ tale che posto $x_1 = x_0+t_1h$ si ha che $g(x) - g(x_0) = g'(x_1)(x-x_0)$, ovvero, posto $x = x_0+h$, $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) = f_x(x_0+t_1h, y_0+k)h$.

Analogamente esiste $0 < t_2 < 1$ tale che $f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0+t_2k)k$.

Si ha allora che

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \\ f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \\ f_x(x_0 + t_1 h, y_0 + k) h + f_y(x_0, y_0 + t_2 k) k. \end{aligned}$$

Ne segue che $|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) h - f_y(x_0, y_0) k| =$
 $|[f_x(x_0 + t_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)] h + [f_y(x_0, y_0 + t_2 k) - f_y(x_0, y_0)] k| \leq$
 $|[f_x(x_0 + t_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)]| |h| + |[f_y(x_0, y_0 + t_2 k) - f_y(x_0, y_0)]| |k|$
e quindi $0 \leq | \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) h - f_y(x_0, y_0) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} | \leq | [f_x(x_0 + t_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)] | \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + | [f_y(x_0, y_0 + t_2 k) - f_y(x_0, y_0)] | \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e basta mostrare che quest'ultimo termine tende a zero se $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.
Ciò segue dal fatto che $\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e $\frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ sono limitati (non superano 1) e sia $f_x(x_0 + t_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)$ che $f_y(x_0, y_0 + t_2 k) - f_y(x_0, y_0)$ tendono a zero per la continuità in (x_0, y_0) delle derivate parziali. \square

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita in un aperto A di \mathbb{R}^N è detta **funzione di classe C^1 a valori in \mathbb{R}^M** , in simboli $f \in C^1(A; \mathbb{R}^M)$, se esistono le derivate parziali di ogni componente in ogni punto di A , e le funzioni $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$, sono continue in A .

Corollario 2.1. *Se $f \in C^1(A; \mathbb{R}^M)$ allora f è differenziabile in A (cioè in ogni punto di A).*

Osservazione terminologica importante

Per alcuni testi la matrice jacobiana è indicata solo dal simbolo $DF(x)$, mentre $J_f(x)$ o $\frac{\partial(f_1, \dots, f_M)}{\partial(x_1, \dots, x_N)}(x)$ indicano il **determinante jacobiano** $\det(DF(x))$ di f .

Per altri testi $f'(x)$ è la matrice jacobiana e $DF(x)$ il differenziale ... fare quindi attenzione alle convenzioni del testo che si consulta.

Abbiamo usato continuamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, che vogliamo generalizzare.

Per studiare funzioni a valori vettoriali, è utile generalizzare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz al caso del prodotto di una matrice per un vettore colonna, e per questo è opportuno introdurre la seguente

Definizione 2.1. Se $A = A_{ij}$ è una matrice $M \times N$ la **norma di A** è la norma euclidea del vettore in \mathbb{R}^{MN} che ha per componenti tutte le entrate della matrice: $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |A_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Se $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è un' applicazione lineare si definisce **norma di T** la norma della sua matrice nelle basi canoniche di \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M : $\|T\| = \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |T(e_j) \cdot e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Osservazione 2.1. La definizione data è una delle possibili norme sullo spazio delle matrici, tutte equivalenti tra di loro, essendo tutte le norme equivalenti su uno spazio di dimensione finita come vedremo.

Proposizione 2.1 (Generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz). *Se ${}^t h = (h_1, \dots, h_N)$ è un vettore in \mathbb{R}^N e $A = A_{ij}$ è una matrice $M \times N$ vale la disuguaglianza*

$$|Ah| \leq \|A\| \|h|$$

dove $|h| = (\sum_{i=1}^N |h_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $|Ah| = (\sum_{i=1}^M |(Ah)_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ sono le norme euclidee in \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M .

Dimostrazione. Denotando con A^i la i -esima riga della matrice, $\|Ah\|^2 = \|(A^1 \cdot h, \dots, A^M \cdot h)\|^2 = \sum_{i=1}^M |A^i \cdot h|^2 \leq (\text{Cauchy-Schwarz}) \sum_{i=1}^M \|A^i\|^2 \|h\|^2 = \|h\|^2 \sum_{i=1}^M \|A^i\|^2 = \|h\|^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |A_{ij}|^2 = \|h\|^2 \|A\|^2$ \square

Teorema 2.4 (Differenziale delle funzioni composte). *Siano*
 $f = (f_1(x_1, \dots, x_P), \dots, f_N(x_1, \dots, x_P)) : A \text{ aperto } \subseteq \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^N$,
 $g = (g_1(y_1, \dots, y_N), \dots, g_M(y_1, \dots, y_N)) : B \text{ aperto } \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$
 tali che $f(A) \subseteq B$, sia $G = g \circ f : A \text{ aperto } \subseteq \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^M$,
 con $G(x) = (g_1(x_1, \dots, x_P), \dots, g_M(x_1, \dots, x_P)) = g(f(x))$
 e siano $x \in A$, $y = f(x) \in B$.

Se f è differenziabile in x e g è differenziabile in $y = f(x)$, allora G è differenziabile in x e

$$G'(x) = g'(y) \circ f'(x),$$

cioè se $h \in \mathbb{R}^N$ l'azione del differenziale di G su h è data da

$$G'(x)(h) = g'(f(x))(f'(x)(h))$$

Dimostrazione. Per ipotesi

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|) = f'(x)h + \|h\|o(1) \quad (h \rightarrow 0),$$

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + o(\|k\|) \quad (k \rightarrow 0), \quad \text{quindi}$$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\|\alpha(h) \quad \text{con } \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ se } h \rightarrow 0,$$

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \|k\|\beta(k) \quad \text{con } \beta(k) \rightarrow 0 \text{ se } k \rightarrow 0.$$

Se $h \in \mathbb{R}^P$ poniamo $k = k(h) = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y$.
 Se $h \rightarrow 0$ allora $k = k(h) \rightarrow 0$ perché la funzione f essendo differenziabile è continua in x .

Si ha allora che $G(x+h) - G(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \|k\|\beta(k) = g'(y)(f'(x)h + \|h\|\alpha(h)) + \|k\|\beta(k)$,
 quindi $\frac{G(x+h) - G(x) - g'(y)(f'(x)h)}{\|h\|} = g'(y)(\alpha(h)) + \frac{\|k\|}{\|h\|}\beta(k)$.

Dato che $\alpha(h) \rightarrow 0$, $k = k(h) \rightarrow 0$, $g'(y)$ è continua ($\|g'(y)k\| \leq \|g'(y)\|\|k\|$), e $\beta(k) = \beta(k(h)) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$, per mostrare che questa frazione tende a zero se $h \rightarrow 0$, basta mostrare che $\frac{\|k\|}{\|h\|}$ è limitato in un intorno di 0. Si ha che, essendo $\|f'(x)h\| \leq \|f'(x)\|\|h\|$,
 $\frac{\|k\|}{\|h\|} = \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \frac{\|f'(x)h + \|h\|\alpha(h)\|}{\|h\|} \leq \|f'(x)\| + \|\alpha(h)\| \leq 2\|f'(x)\|$
 in un intorno di 0, perché $\alpha(h) \rightarrow 0$ in \mathbb{R}^N . \square

Corollario 2.2 (Regola della catena). *Nelle ipotesi del teorema le derivate parziali delle componenti di G (che esistono in x perché le componenti sono differenziabili in x) sono date da*

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

In particolare se $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione vettoriale di una variabile derivabile in I (equivale alla differenziabilità per funzioni di una variabile) e $g : B$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare di più variabili differenziabile in B , la funzione $\alpha(t) = g(\mathbf{r}(t)) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in I , e $\alpha'(t) = \nabla g(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$

Dimostrazione. In termini di matrici jacobiane $J_G(x) = J_g(f(x)) J_f(x)$ e l'elemento (i, j) si scrive in questo modo, come prodotto scalare del gradiente di g_i per il vettore derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ \square

Il Teorema di Lagrange non vale nel caso di funzioni a valori vettoriali, almeno nella forma di un'uguaglianza, ma si può generalizzare in una forma molto utile dove compare una disuguaglianza.

Teorema 2.5 (Teorema di Lagrange vettoriale). *Sia $f : A$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ differenziabile in A , e siano $x, x+h \in \mathbb{R}^N$ tali che il segmento $[x, x+h] = \{x+th : 0 \leq t \leq 1\}$ sia contenuto in A .*

Esiste allora un punto $y_0 = x+t_0h \in (x, x+h)$, con $t_0 \in (0, 1)$, tale che $\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|f'(y_0)\| \|h\|$.

Dimostrazione. Sia $z = f(x+h) - f(x)$ e consideriamo la funzione scalare di una variabile definita da

$$\alpha(t) = z \cdot f(x+th) = \sum_{k=1}^M z_k f_k(x+th).$$

Per la regola della catena è derivabile, e essendo h il vettore derivato di $t \mapsto x+th$, la sua derivata vale $\alpha'(t) = z \cdot f'(x+th)h$.

Per il teorema di Lagrange per funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} esiste $t_0 \in (0, 1)$ tale che $\alpha(1) - \alpha(0) = \alpha'(t_0)$, e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la sua generalizzazione si ottiene

$$\|f(x+h) - f(x)\|^2 = z \cdot (f(x+h) - f(x)) = z \cdot f'(x+t_0h)h \leq \|z\| \|f'(x+t_0h)h\| \leq \|z\| \|f'(x+t_0h)\| \|h\| = \|f(x+h) - f(x)\| \|f'(x+t_0h)\| \|h\|.$$

Se $f(x+h) - f(x) = 0$ il teorema è ovvio, altrimenti dividendo per $\|f(x+h) - f(x)\|$ si ottiene la disuguaglianza da dimostrare. \square

Corollario 2.3 (Disuguaglianza di valor medio). *Sia $f \in C^1(A; \mathbb{R}^M)$, con A aperto di \mathbb{R}^N e sia $C \subseteq A$ un compatto convesso (ad esempio una palla chiusa o un N -rettangolo chiuso).*

Allora $M = \sup_{z \in C} \|Df(z)\| = \max_{z \in C} \|Df(z)\| < +\infty$, e $\|f(y) - f(x)\| \leq M \|y - x\|$ per ogni coppia di punti $x, y \in C$.

Dimostrazione. In queste ipotesi la funzione $\|Df(z)\|$ (essendo di fatto la norma euclidea in \mathbb{R}^{NM}) è continua sul compatto C e ha valori in \mathbb{R} , quindi ha massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass. Inoltre essendo C convesso, se $x, y \in C$ il segmento $[x, y]$ è contenuto

in C . Applicando il teorema precedente con $h = y - x$ si ottiene la disuguaglianza. \square

Le derivate di ordine $k \geq 1$ si denotano in vari modi, analogamente alle derivate prime.

Ad esempio se $k = 2$, se esistono, le derivate seconde di una funzione scalare $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sono indicate con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = f_{x_i x_j}(x) = D_{ij} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x).$$

Se $i = j$ si usa la notazione $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ invece di $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$.

La matrice A con entrate $A_{i,j} = f_{x_i x_j}(x)$ è detta **matrice hessiana di f in x** e si indica con il simbolo $H_f(x)$ oppure $D^2 f(x)$.

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita in un aperto A di \mathbb{R}^N è di classe $C^K(A; \mathbb{R}^M)$ se esistono tutte le derivate parziali di ordine $j \leq k$ in ogni punto di A , e sono funzioni continue in A (se $k = 0$ si conviene che l' unica derivata di ordine zero della funzione f sia la funzione stessa).

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definita in un aperto A di \mathbb{R}^N è detta di classe $C^\infty(A; \mathbb{R}^M)$ se esistono tutte le derivate parziali di qualunque ordine $j \in \mathbb{N}$ in ogni punto di A , e sono funzioni continue in A .

Se $M = 1$ si scrive a volte $C^k(A) = C^K(A; \mathbb{R})$.

Se A è un sottoinsieme qualsiasi di \mathbb{R}^N (non più necessariamente aperto), una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ è detta di classe $C^K(A; \mathbb{R}^M)$ se per ogni $x \in A$ esiste un suo intorno aperto (in \mathbb{R}^N) $U = U_x$ e una funzione g di classe $C^K(U; \mathbb{R}^M)$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A \cap U$. In particolare se Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^N , lo spazio $C^k(\overline{\Omega})$ si può anche descrivere come l' insieme delle funzioni continue nel compatto $\overline{\Omega}$ che siano restrizioni di funzioni $g \in C^k(B)$ con B aperto contenente $\overline{\Omega}$; in tal caso ogni derivata di f ha massimo e minimo in $\overline{\Omega}$ ed è limitata.

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **due volte differenziabile** in $x_0 \in A$, se è differenziabile (quindi continua e derivabile) in un intorno U di x_0 , con le derivate parziali $f_{x_j}(x)$ differenziabili (quindi continue e derivabili) in x_0 .

Per quanto detto se f è due volte differenziabile in A , cioè in ogni punto di A , allora è di classe $C^1(A)$ ed esistono tutte le derivate seconde in A , mentre se $f \in C^2(A)$ allora è due volte differenziabile in A .

Teorema 2.6 (di Schwarz o dell' inversione dell' ordine di derivazione). *Siano A un aperto di \mathbb{R}^N , $x \in A$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione due volte differenziabile in $x \in A$, cioè differenziabile (quindi continua e derivabile) in un intorno di x , con le derivate parziali $f_{x_j}(x)$ differenziabili (quindi continue e derivabili) in x .*

$$\text{Allora } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso di $N = 2$, $f = f(x, y)$ (d' altra parte essendo 2 le variabili coinvolte in realtà basta considerare questo caso ...).

$$\text{Per definizione } \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{xy}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y+t) - f_x(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y)}{st} \right].$$

$$\text{Analogamente } \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_y(x+s, y) - f_y(x, y)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y)}{st} \right].$$

È naturale quindi considerare e studiare la funzione

$$F(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y).$$

Mostreremo che $f_{yx}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, t)}{t^2} = f_{xy}(x, y)$. Posto $g(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x, y+t)$; $h(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x+s, y)$, si può scrivere in due modi

$$F(s, t) = g(s, t) - g(s, 0) = h(s, t) - h(0, t).$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\vartheta = \vartheta_t \in (0, 1)$ tale che $F(s, t) = g(s, t) - g(s, 0) = t g_t(s, \vartheta t) = t [f_y(x+s, y+\vartheta t) - f_y(x, y+\vartheta t)] =$ (poiché f_y è differenziabile in (x, y))

$$t [f_y(x, y) + f_{yx}(x, y) s + f_{yy}(x, y) \vartheta t + o(\sqrt{s^2 + t^2}) - (f_y(x, y) + f_{yy}(x, y) \vartheta t + o(\sqrt{(\vartheta t)^2}))] = f_{yx}(x, y) st + t o(\sqrt{s^2 + t^2}).$$

Ponendo $s = t$ si ottiene $\frac{F(t, t)}{t^2} = f_{yx}(x, y) + o(1)$ e facendo tendere $t \rightarrow 0$ si ottiene $f_{yx}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, t)}{t^2}$.

Analogamente esiste ϑ_s tale che $F(s, t) = h(s, t) - h(0, t) = s h_s(\vartheta s, t) = s [f_x(x+\vartheta s, y+t) - f_x(x, y+t)] =$ (poiché f_x è differenziabile in (x, y)) $s [f_x(x, y) + f_{xx}(x, y) \vartheta s + f_{xy}(x, y) t + o(\sqrt{s^2 + t^2}) - (f_x(x, y) + f_{xx}(x, y) \vartheta s + o(\sqrt{(\vartheta s)^2}))] = f_{xy}(x, y) st + s o(\sqrt{s^2 + t^2})$.

Ponendo $s = t$ si ottiene $\frac{F(t, t)}{t^2} = f_{xy}(x, y) + o(1)$ e facendo tendere $t \rightarrow 0$ si ottiene $f_{xy}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, t)}{t^2}$. \square

Corollario 2.4. Se f è due volte differenziabile in A , in particolare se $f \in C^2(A)$, la **matrice hessiana** $H = H_f(x)$ di f in x , definita da $H_{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, è simmetrica in ogni punto.

Dimostrazione. Se $f \in C^2(A)$ le derivate prime hanno derivate continue, quindi sono differenziabili e si applica il teorema. \square

Osservazione 2.2. Il teorema è spesso enunciato e dimostrato con l' ipotesi più forte della continuità delle derivate seconde in x ; ipotesi verificata in molte applicazioni del teorema, ma che non rende la dimostrazione realmente più semplice; per questo motivo inseriamo questa dimostrazione leggermente più generale.

Ricordiamo dall' algebra lineare che una matrice $N \times N$ simmetrica $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N$ definisce una **forma bilineare simmetrica** a in \mathbb{R}^N (cioè una funzione $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $a(\cdot, \cdot)$ è lineare in

ognuna delle due variabili fissata l'altra e che è simmetrica, cioè verifica $a(h, k) = a(k, h) \forall h, k \in \mathbb{R}^N$, che scrivendo i vettori $h = (h^1, \dots, h^N)$, $k = (k^1, \dots, k^N)$ come vettori colonna agisce su di essi come $a(h, k) = h \cdot (Ak) = {}^t h Ak = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} h^i k^j (= a(k, h))$.

A ogni forma bilineare simmetrica a è poi associata una **forma quadratica** $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $Q(h) = Q_a(h) = a(h, h)$.

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, il differenziale è la forma lineare $f'(x)$ che agisce su un vettore h come $f'(x)h = \nabla f(x) \cdot h$. In modo analogo se $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione due volte differenziabile, il **differenziale secondo di f in $x \in A$** è la *forma bilineare simmetrica* che ha per matrice la matrice hessiana nella base canonica di \mathbb{R}^N e si indica con uno dei simboli

$$f''(x) = d^2 f(x) = D^2 f(x)$$

Indicando i vettori come vettori colonna si ha quindi che $f''(x)(h, k) = {}^t h H_f(x) k = h \cdot (H_f(x)k) = \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x) h^i k^j$.

In particolare la *forma quadratica* associata alla forma bilineare differenziale secondo è definita da

$$Q_f(h) = f''(x)(h, h) = {}^t h H_f(x) h = \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x) h_i h_j$$

e anche ad essa ci si riferisce parlando del differenziale secondo di una funzione.

Scrivendo $f''(x)h^2 := f''(x)(h, h)$ vedremo che la forma che ha la formula di Taylor del secondo ordine è identica a quella per funzioni di una variabile (ma la derivata ora è l'operatore lineare differenziale, e la derivata seconda la forma quadratica data dal differenziale secondo).

Teorema 2.7. *Se f è due volte differenziabile in $x \in A$ e v, w sono direzioni in \mathbb{R}^N , esistono le derivate direzionali seconde*

$$f_{vw}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (x) = f''(x)(v, w) = {}^t v H_f(x) w = \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x) v_i w_j$$

Inoltre $f_{vw}(x) = f_{wv}(x)$ per ogni coppia di direzioni.

Dimostrazione. Ogni derivata parziale f_{x_i} è differenziabile in x , quindi esiste la sua derivata secondo la direzione w data da $\frac{\partial f_{x_i}}{\partial w}(x) = \sum_{j=1}^N (f_{x_i})_{x_j} w^j$.

Per linearità la derivata $\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{i=1}^N f_{x_i} v^i$ è anche differenziabile e ha quindi la derivata rispetto a w data da $f_{vw}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (x) = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N (f_{x_i})_{x_j} w^j \right) v^i = \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x) v_i w_j$.

È chiaro poi che, data la forma che hanno le derivate direzionali seconde ed essendo la matrice hessiana simmetrica, si ha che

$$f_{vw}(x) = f_{wv}(x) \text{ per ogni coppia di direzioni.} \quad \square$$

Teorema 2.8 (Formula di Taylor del secondo ordine). *Sia A un aperto di \mathbb{R}^N e sia $f \in C^2(A)$.*

(1) (resto in forma di Lagrange)

Se $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^N$ e il segmento $[x, x+h] \subset A$, esiste un punto $x_0 = x + t_0 h \in [x, x+h]$, con $0 < t_0 < 1$, tale che

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+t_0h)h^2 = \\ &= f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2}H_f(x+t_0h)h \cdot h = \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x+t_0h)h_i h_j \end{aligned}$$

(2) (resto in forma di Peano)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(\|h\|^2) = \\ &= f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2}H_f(x)h \cdot h + o(\|h\|^2) = \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema di Lagrange scalare poniamo $g(t) = f(x+th)$ e indichiamo con $D_i f$ le derivate prime e con $D_{ij} f$ le derivate seconde.

La funzione g è definita in $[0, 1]$, è derivabile, e per la regola della catena, essendo h il vettore derivato di $t \mapsto x+th$, la sua derivata è data da $g'(t) = \nabla f(x+th) \cdot h = \sum_{i=1}^N D_i f(x+th) h_i$.

Applicando ancora la regola della catena a ogni elemento della somma si ha che g è derivabile due volte e vale la formula

$$g''(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_j(D_i f(x+th))h_j h_i = \sum_{i,j=1}^N D_{ij} f(x+th)h_i h_j.$$

Inoltre g è di classe $C^2([0, 1])$, essendo f di classe $C^2(A)$.

(1) Per la formula di Taylor con resto di Lagrange per funzioni di una variabile, esiste $t_0 \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{aligned} g(1) &= g(0) + g'(0)(1-0) + \frac{1}{2}g''(t_0)(1-0)^2, \text{ cioè} \\ f(x+h) &= f(x) + \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x+t_0h)h_i h_j \end{aligned}$$

(2) Per quanto visto nel punto precedente, si ha che per ogni h sufficientemente piccolo esiste $t_0 = t_0(h) \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{aligned} &|f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x)h_i h_j| \\ &= \left| \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [f_{x_i x_j}(x+t_0h) - f_{x_i x_j}(x)]h_i h_j \right| \leq \\ &\frac{1}{2}\|h\|^2 \sum_{i,j=1}^N |f_{x_i x_j}(x+t_0h) - f_{x_i x_j}(x)| = o(\|h\|^2) \\ &\text{perché per la continuità delle derivate seconde} \\ &\sum_{i,j=1}^N |f_{x_i x_j}(x+t_0h) - f_{x_i x_j}(x)| \rightarrow 0 \text{ se } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Osservazione Useremo per lo studio dei massimi e minimi di una funzione scalare di più variabili la formula di Taylor del secondo ordine, ma in generale per ogni ordine $n \in \mathbb{N}$ si può scrivere la formula di Taylor di ordine n . In analogia con il caso $n = 2$ in cui interviene una forma bilineare simmetrica $a(h, k)$ e nella formula di Taylor la forma quadratica associata, cioè la forma bilineare applicata a $h^2 = (h, h)$, in essa interviene il **differenziale n -esimo** $f^{(n)}(x)$ di una funzione, che è una forma n -lineare simmetrica.

Se definiamo per $f \in C^n(A)$ (dove $n \in \mathbb{N}^+$ e A è un aperto di \mathbb{R}^N)

$f^{(n)}(x)h^n = f^{(n)}(x)(h, \dots, h) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(x)h_{i_1} \dots h_{i_n}$,
la formula di Taylor ha la stessa forma di quella familiare per funzioni di una variabile e con una dimostrazione analoga a quella svolta nel caso $n = 2$ si può dimostrare il

Teorema 2.9 (Formula di Taylor di ordine n). *Sia A un aperto di \mathbb{R}^N e sia $f \in C^n(A)$, $n \in \mathbb{N}^+$.*

(1) *(resto in forma di Lagrange)*

Se $x \in A$, $h \in \mathbb{R}^N$ e il segmento $[x, x+h] \subset A$, esiste un punto $x_0 = x + t_0h \in [x, x+h]$, con $0 < t_0 < 1$, tale che

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+t_0h)h^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x+t_0h)h^n =$$

$$f(x) + \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(x+t_0h)h_{i_1} \dots h_{i_n}$$

(2) *(resto in forma di Peano)*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + o(\|h\|^n) =$$

$$f(x) + \sum_{i=1}^N f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(x)h_{i_1} \dots h_{i_n} + o(\|h\|^n) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(x)h_{i_1} \dots h_{i_k} + o(\|h\|^n)$$

$$(h \rightarrow 0)$$

Osservazione 2.3. La formula di Taylor si può anche scrivere in un'altra forma usando i **multiindici** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$.

Per un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ si pone
 $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$.

Con queste convenzioni ad esempio la formula di Taylor di ordine $n \geq 1$ con resto in forma di Peano si può scrivere come

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x) + o(\|h\|^n) \quad (h \rightarrow 0)$$

Infatti nella forma precedente $f(x+h) = f(x) +$
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(x)h_{i_1} \dots h_{i_k} + o(\|h\|^n) \quad (h \rightarrow 0)$,

le derivate di ordine $k \geq 1$ che contengono α_1 derivate rispetto a x_1, \dots, α_N derivate rispetto a x_N (qualche α_j può essere zero con $|\alpha| = k$) si possono raggruppare, per la simmetria delle derivate miste, e tali termini sono in numero di $\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} = \frac{k!}{\alpha!}$ (sono permutazioni con ripetizione di k oggetti dei quali α_1 di un tipo 1, indistinguibili tra loro, $\dots \alpha_N$ di un tipo N , indistinguibili tra loro).

Prima di applicare la formula di Taylor del secondo ordine allo studio dei massimi e minimi di una funzione scalare di più variabili, ricordiamo alcuni risultati di algebra lineare.

Sia data la forma bilineare simmetrica a associata alla matrice $N \times N$ simmetrica A : $a(h, k) = {}^t h A k = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} h^i k^j$ se $h = (h^1, \dots, h^N)$, $k = (k^1, \dots, k^N)$.

Ricordiamo che si dice che la forma a (o la forma quadratica associata $Q_A(h) = a(h, h) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} h^i k^j$, o la matrice simmetrica A) è

semidefinita positiva se $Q(h) = a(h, h) \geq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}^N$.

definita positiva se $Q(h) > 0$ per ogni $h \neq 0$.

semidefinita negativa se $Q(h) \leq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}^N$.

definita negativa se $Q(h) < 0$ per ogni $h \neq 0$.

indefinita se non è semidefinita positiva né semidefinita negativa, cioè se esistono almeno due vettori h, k tali che $Q(h) > 0, Q(k) < 0$.

Scriveremo

$A \geq 0$ se A è semidefinita positiva

$A > 0$ se A è definita positiva

$A \leq 0$ se A è semidefinita negativa

$A < 0$ se A è definita negativa

Il **teorema fondamentale sulle forme quadratiche**, conseguenza del teorema spettrale che si studia in algebra lineare afferma che esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^N tale che la forma quadratica in quella base ha matrice diagonale, e sulla diagonale compaiono gli autovalori della matrice A (che sono tutti reali e sono N se contati con le rispettive molteplicità).

In altre parole se le coordinate in quella base di un vettore $h = (h^1, \dots, h^N) \in \mathbb{R}^N$ sono date da $((h^1)', \dots, (h^N)')$, si ha che la norma del vettore non cambia, cioè $\sum_{k=1}^N [(h^k)']^2 = \sum_{k=1}^N (h^k)^2$, mentre $Q(h) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} h^i k^j = \sum_{k=1}^N \lambda_k [(h^k)']^2$.

Una conseguenza è la seguente.

Teorema 2.10. *Se A è definita positiva (non solo $Q(h) > 0$ e quindi $\frac{Q(h)}{\|h\|^2} > 0$ per ogni $h \neq 0$ ma) esiste $\lambda_1 > 0$ tale che $\frac{Q(h)}{\|h\|^2} \geq \lambda_1 > 0$, cioè $Q(h) = {}^t h A h \geq \lambda_1 \|h\|^2$ per ogni $h \in \mathbb{R}^N$.*

Se A è definita negativa (non solo $Q(h, h) < 0$ per ogni $h \neq 0$ ma) esiste $\lambda_N < 0$ tale che $Q(h) \leq \lambda_N \|h\|^2$ per ogni $h \in \mathbb{R}^N$.

Definizione 2.2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare di più variabili definita nell'insieme A .

Un punto $x_0 \in A$ è **punto di massimo assoluto di f in A** [**punto di minimo assoluto di f in A**] se $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$ [rispettivamente $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in A$].

Un punto $x_0 \in A$ è un **punto di massimo locale o relativo per f relativamente ad A** [rispettivamente **punto di minimo locale o relativo per f relativamente ad A**] se esiste un intorno U di x in \mathbb{R}^N tale che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U \cap A$ [rispettivamente $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in U \cap A$].

Per punto di estremo intendiamo punto di massimo oppure minimo (relativo o assoluto).

Un punto $x_0 \in A$ è un punto di massimo locale o relativo **stretto** per f relativamente ad A [rispettivamente punto di minimo locale o relativo **stretto** per f relativamente ad A] se esiste un intorno U di x in \mathbb{R}^N tale che $f(x) < f(x_0) \forall x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$ [rispettivamente $f(x) > f(x_0) \forall x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$]

Osservazione 2.4. Se x_0 è *interno* ad A (qualunque punto se A è aperto) si parla a volte di massimi e minimi *liberi* (in contrasto con i massimi e minimi vincolati dei quali ci occupiamo in seguito), e per gli estremi locali si parla di massimi e minimi locali di f (senza specificare in A , evidentemente non necessario).

Teorema 2.11 (Teorema di Fermat in più dimensioni).

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare di più variabili differenziabile nell' interno dell' insieme A , e sia $x_0 \in A$ un punto interno ad A di estremo locale per f .

Allora $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Sia \mathbf{v} una direzione. Posto $g(t) = f(x_0 + t\mathbf{v})$, essa è definita almeno in un intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di 0 in \mathbb{R} (perché x_0 è interno) e qualunque sia la direzione fissata, per ipotesi g ha un estremo locale in $t = 0$.

Essendo differenziabile, f è derivabile nella direzione \mathbf{v} , e ciò equivale a dire che g è derivabile in 0, essendo $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0) = g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \mathbf{v}$.

Per il Teorema di Fermat in dimensione 1 si ha che

$$0 = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Per l' arbitrarietà di \mathbf{v} si ha quindi che $\nabla f(x_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ per ogni direzione, e questo implica che $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$.

Infatti se $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$, posto $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ si ha che $\nabla f(x_0) \cdot \mathbf{v} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\| > 0$. \square

Definizione 2.3. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare di più variabili differenziabile nell' interno dell' insieme A , e sia $x_0 \in A$ un punto *interno* ad A . Si dice che x_0 è un **punto critico** di f se $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$.

Un **punto di sella** per f è un punto critico x_0 che non si di estremo locale (né massimo né minimo).

Il teorema di Fermat afferma quindi che ogni punto interno di di estremo locale per f è un punto critico di f .

Teorema 2.12 (Condizioni necessarie e condizioni sufficienti di estremo in più dimensioni).

Siano A un aperto di \mathbb{R}^N , $f \in C^2(A)$ una funzione scalare di più variabili, e sia $x \in A$ un punto critico di f , cioè tale che $\nabla f(x) = \mathbf{0}$.

- (1) Condizioni necessarie per un estremo.
Se x è un punto di minimo [massimo] locale, allora $f''(x) \geq 0$ [$f''(x) \leq 0$].
- (2) *Se $f''(x)$ è indefinita, allora x è un punto di sella.*
- (3) Condizioni sufficienti per un estremo basate sul segno stretto della matrice hessiana in x .
Se $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$] allora x è un punto di minimo [massimo] locale stretto.
Se la matrice hessiana in x è solo semidefinita, in generale non si può dedurre che carattere ha il punto critico x . Vale però il seguente criterio.
- (4) Condizioni sufficienti per un estremo basate sul segno debole della matrice hessiana in un intorno di x .
Se esiste un intorno $U = B_\varepsilon(x)$ di x tale che $f''(z) \geq 0$ [$f''(z) \leq 0$] per ogni $z \in U$ allora x è punto di minimo locale [massimo locale].

Dimostrazione.

- (1) Se $h \in \mathbb{R}^N$ definiamo $g(t) = f(x+th)$. È definita in un intervallo aperto cui 0 appartiene, e dato che f ha un minimo [massimo] locale, la funzione g ha in $t = 0$ un minimo [massimo] locale, quindi $g'(0) = 0$, $g''(0) \geq 0$ [$g''(0) \leq 0$].
 Essendo $g''(0) = f''(x)h^2$ e h arbitrario, si ha che $f''(x)$ è semidefinita positiva [negativa].
- (2) Segue dalla condizione necessaria: se $f''(x)$ è indefinita, cioè né semidefinita positiva né semidefinita negativa, allora x non può essere punto di massimo o minimo, è cioè un punto di sella.
- (3) Se $f''(x)$ è definita positiva sappiamo che esiste $\lambda_1 > 0$ tale che $f''(x)h^2 \geq \lambda_1\|h\|^2$. Dalla formula di Taylor con resto in forma di Peano, essendo $f'(x) = 0$, è $f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \alpha(h)\|h\|^2 \geq f(x) + [\frac{1}{2}\lambda_1 + \alpha(h)]\|h\|^2$, con $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$.
 Scelto un intorno $U = B_\varepsilon(0)$ di $\mathbf{0}$ in \mathbb{R}^N tale che $|\alpha(h)| \leq \frac{1}{4}\lambda_1$ se $h \in U$, si ottiene che $f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{4}\lambda_1\|h\|^2$ con $\lambda_1 > 0$, e quindi $f(y) > f(x)$ se $y \in B_\varepsilon(x)$, $y \neq x$, cioè x è un punto di minimo locale stretto.
 Analogamente se $f''(x)$ è definita negativa sappiamo che esiste $\lambda_N < 0$ tale che $f''(x)h^2 \leq \lambda_N\|h\|^2$. e procedendo come prima si trova che se $h \in U = B_\varepsilon(0)$, dove $|\alpha(h)| \leq -\frac{1}{4}\lambda_N$, vale la relazione $f(x+h) - f(x) \leq \frac{1}{4}\lambda_N\|h\|^2$ con $\lambda_N < 0$, e quindi $f(y) < f(x)$ se $y \in B_\varepsilon(x)$, $y \neq x$, cioè x è un punto di massimo locale stretto.
- (4) Per la formula di Taylor con resto in forma di Lagrange, se $y \in U$ esiste $z \in [x, y] \subset U$ tale che $f(y) - f(x) = \frac{1}{2}f''(z)(y-x)^2 \geq 0$ [≤ 0].

□

Per quanto riguarda i metodi per determinare il carattere di una forma quadratica, sono noti alcuni criteri per la definita positività o negatività di una matrice, ricordiamo qui il criterio di Sylvester.

Se la matrice è diagonale, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ e a meno di rinumerare supponiamo che $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, cioè che λ_1 sia il più piccolo e λ_N il più grande degli elementi diagonali, è facile capire il significato della positività o negatività della matrice.

Infatti in tal caso si ha che mancano i termini misti, cioè $Q(h) = \sum_{k=1}^N \lambda_k (h^k)^2$ e quindi A è

semidefinita positiva se $\lambda_1 \geq 0$

definita positiva se $\lambda_1 > 0$

semidefinita negativa se $\lambda_N \leq 0$

definita negativa se $\lambda_N < 0$

indefinita se $\lambda_1 < 0 < \lambda_N$.

Si noti che in questa situazione particolare, se definiamo i **minori principali della matrice** A come le sottomatrici $A^{(k)} = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$ (a partire dal primo minore principale, che è l'elemento A_{11} della matrice, si aggiungono ogni volta una riga e una colonna fino ad arrivare al minore $A^{(N)}$ che coincide con la matrice A), e indichiamo con lo stesso simbolo $A^{(k)}$ i determinanti di questi minori principali, si ha che per una matrice diagonale A

A è definita positiva se e solo se $A^{(k)} > 0$ per $k = 1, \dots, N$ (tutti i minori principali sono positivi).

A è definita negativa se e solo se $(-1)^k A^{(k)} > 0$ per $k = 1, \dots, N$ (i minori principali hanno segni alterni partendo dal segno meno per A_{11}).

Nel caso generale, benché nella trasformazione della matrice della forma quadratica nella matrice diagonale che ha nella nuova base ortonormale non si conservino i determinanti minori principali, si conserva però l'eventuale positività di tutti (o il segno alterno). Vale cioè il seguente risultato (per la dimostrazione del quale si rimanda a un testo di algebra lineare).

Teorema 2.13 (Criterio di Sylvester). *La matrice simmetrica A è definita positiva se e solo se ha tutti i determinanti minori principali positivi, è definita negativa se e solo se ha i determinanti minori principali con segni alterni, a partire dal segno meno.*

Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametri.

Teorema 2.14. (1) *Sia $f = f(x, y) : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia*

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx .$$

Allora g è continua in (c, d) .

- (2) Se oltre a f anche f_y è una funzione continua in $[a, b] \times (c, d)$, allora g è derivabile in (c, d) , e

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

Il teorema è un teorema di **passaggio al limite e di derivazione sotto il segno di integrale**.

Infatti 1) si può leggere come $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$, cioè

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] dx.$$

Analogamente 2) si può leggere come

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Dimostrazione.

- (1) Sia $y_0 \in (c, d)$, e sia $r > 0$ tale che posto $c' = y_0 - r$, $d' = y_0 + r$, si ha che $[c', d'] = [y_0 - r, y_0 + r] \subset (c, d)$ (considereremo solo punti y in questo intervallo compatto per dimostrare la continuità di g in y_0).

La funzione f è continua sul compatto $[a, b] \times [c', d']$, quindi è ivi uniformemente continua, e dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \delta^2$ allora $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Se $y \in [c', d']$ è tale che $|y - y_0| \leq \delta = \delta(\varepsilon)$, allora qualunque sia $x \in [a, b]$ si ha che (x, y) e (x, y_0) hanno distanza minore o uguale a δ , essendo $(x - x)^2 + (y - y_0)^2 = (y - y_0)^2 \leq \delta^2$.

Ne segue che $|g(y) - g(y_0)| = \left| \int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$.

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha che g è continua in y_0 , e y_0 è un punto qualsiasi di (c, d) .

- (2) Sia $y_0 \in (c, d)$ e definiamo $h(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ f_y(x, y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$

È una funzione continua in $[a, b] \times (c, d)$ perché f e f_y sono continue. Infatti se $(x_1, y_1) \in [a, b] \times (c, d)$ con $y_1 \neq y_0$, localmente vicino a (x_1, y_1) è $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$ ed è continua in (x_1, y_1) perché f è continua.

Se invece ho un punto (x_0, y_0) e $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, per il teorema di Lagrange esiste $t_0 \in [0, 1]$ tale che

$$h(x, y) - h(x_0, y_0) = [h(x, y) - h(x, y_0)] + h(x, y_0) - h(x_0, y_0) = f_y(x, y_0 + t_0(y - y_0))(y - y_0) + f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)$$

e essendo f_y continua

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) - h(x_0, y_0) = 0 \text{ e } h \text{ è continua in } (x_0, y_0).$$

Ne segue per quanto appena dimostrato che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b h(x, y) dx = \int_a^b h(x, y_0) dx, \text{ cioè}$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b h(x, y) dx =$$

$$\int_a^b h(x, y_0) dx = \int_a^b f_y(x, y_0) dx.$$

□

Corollario 2.5. Sia $f = f(x, y) : [a, b] \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, dotata di derivata parziale f_y continua in $[a, b] \times (c, d)$, e siano $\alpha(y), \beta(y)$ funzioni derivabili in (c, d) a valori in $[a, b]$. Posto

$$h(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

si ha che h è derivabile in (c, d) e

$$h'(y) = f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx$$

Dimostrazione. Definiamo $H : (c, d) \times [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ come $H(y, z, w) = \int_w^z f(x, y) dx$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale è $H_z(y, z, w) = f(z, y)$, $H_w(y, z, w) = -f(w, y)$, e per quanto dimostrato $H_y(y, z, w) = \int_w^z f_y(x, y) dx$.

La nostra funzione è $h(y) = H(y, \beta(y), \alpha(y))$, e applicando la regola della catena al calcolo di $g'(y)$ si ottiene la formula. □

I parametri possono essere più di uno, e ad esempio vale con la stessa dimostrazione il

Teorema 2.15. (1) Sia $f = f(x, \mathbf{y}) = f(x, y_1, \dots, y_m) : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^m una funzione continua in $[a, b] \times A$, e sia $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Allora g è continua in A .

(2) Se oltre a f anche f_{y_1}, \dots, f_{y_m} sono continue in $[a, b] \times A$, allora g è di classe $C^1(A)$, e $\frac{\partial g}{\partial y_j}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) dx$.

Nel precedente teorema è essenziale che l'intervallo $[a, b]$ sia compatto.

Se vogliamo estendere il teorema al caso di integrali impropri su intervalli non compatti bisogna aggiungere un'ulteriore ipotesi, che richiede la presenza di una *funzione maggiorante integrabile* indipendente da y .

Ad esempio nel caso di un intervallo del tipo $[a, +\infty)$ possiamo dimostrare il seguente risultato. Come prima i parametri possono essere più di uno, ma per semplicità lo enunciamo nel caso di un parametro, e analoghi risultati valgono per integrali impropri su altri tipi di intervalli.

Teorema 2.16. (1) Sia $f = f(x, y) : [a, +\infty) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e supponiamo che esista $g_0 = g_0(x) : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua e integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ tale che $|f(x, y)| \leq g_0(x) \forall x \in [a, +\infty), y \in (c, d)$.

Posto $g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ si ha che g è continua in (c, d) .

(2) Se oltre a f anche f_y è continua in $[a, b] \times (c, d)$, ed esiste $g_1 = g_1(x) : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua e integrabile in

senso improprio in $[a, +\infty)$ tale che $|f_y(x, y)| \leq g_1(x) \forall x \in [a, +\infty), y \in (c, d)$, allora g è di classe $C^1(c, d)$ e
 $g'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$.

Dimostrazione.

- (1) Dato $y_0 \in (c, d)$ sia $r > 0$ tale che $[y_0 - r, y_0 + r] \subset (c, d)$, e dato $\varepsilon > 0$ sia $b \geq a$ tale che

$$\int_b^{+\infty} g_0(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

(esiste perché l' integrale improprio di g_0 converge).

La funzione f è uniformemente continua nel compatto $K = [a, b] \times [y_0 - r, y_0 + r]$ ed esiste quindi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (che possiamo supporre minore di r) tale che se $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \delta^2$ allora $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Inoltre per ipotesi si ha che $|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq 2g_0(x)$.

Si ha allora che se $|y - y_0| < \delta$ si ha

$$|g(y) - g(y_0)| \leq 2 \int_b^{+\infty} g_0(x) dx + \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq 2 \frac{\varepsilon}{4} + (b - a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon.$$

- (2) Come nel caso di integrali su intervalli compatti, se $y_0 \in (c, d)$ per dimostrare la derivabilità in y_0 di $g(y)$, consideriamo la

$$\text{funzione } h(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ f_y(x, y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

e osserviamo come prima che essa è una funzione continua in $[a, +\infty) \times (c, d)$ perché f e f_y sono continue.

Inoltre $|h(x, y)| \leq g_1(x) \forall x \in [a, +\infty), y \in (c, d)$.

Infatti se $y \neq y_0$ per il Teorema di Lagrange esiste $t_0 \in (0, 1)$ tale che

$$|h(x, y)| = \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| = |f_y(x, (1 - t_0)y_0 + t_0 y)| \leq g_1(x).$$

Se invece $y = y_0$ si ha direttamente $|h(x, y_0)| = |f_y(x, y_0)| \leq g_1(x)$.

Per quanto visto nella prima parte

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b h(x, y) dx = \int_a^b h(x, y_0) dx = \int_a^b f_y(x, y_0) dx.$$

□

3. CURVE E INTEGRALI CURVILINEI.
INVARIANZA PER OMOTOPIA DEGLI INTEGRALI CURVILINEI DI
FORME CHIUSE, INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI

3.1. **Complementi sulla connessione e compattezza.**

Connessione

Sia (X, d) uno spazio metrico (o topologico).

Si dice che X è **sconnesso** se è unione di due aperti A, B non vuoti e disgiunti (essendo complementari l'uno dell'altro essi sono anche chiusi). Si dice in tal caso che A e B sconnettono X .

X è **connesso** se non è sconnesso.

La stessa definizione si applica a un sottoinsieme $E \subset X$, in questo caso usando la topologia relativa:

E è sconnesso se esistono aperti (o chiusi) U, V di X tali che

$$U \cap E \neq \emptyset, V \cap E \neq \emptyset, U \cap V \cap E = \emptyset, E \subseteq U \cup V. \quad ^1$$

Teorema 3.1.

- (1) $I \subseteq \mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.
- (2) Se X, Y sono spazi metrici, $f : X \rightarrow Y$ è continua, e $E \subseteq X$ è connesso, allora $f(E)$ è un sottoinsieme connesso di Y .
- (3) (Teorema dei valori intermedi) Se X è uno spazio metrico, $E \subseteq X$ è connesso, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $f(x_1) = a < b = f(x_2)$, con $x_1, x_2 \in E$, per ogni c tale che $a < c < b$ esiste $x_3 \in E$ tale che $f(x_3) = c$.

Dimostrazione. (1) Se I non è un intervallo esistono $a < c < b$ tali che $a, b \in I, c \notin I$. Ma allora $A = (-\infty, c) \cap I$ e $B = (c, +\infty) \cap I$ sono non vuoti, disgiunti, hanno per unione I e sono entrambi relativamente aperti.

Viceversa se I è un intervallo, supponiamo per assurdo che esistano aperti U, V di \mathbb{R} tali che $U \cap I, V \cap I$ siano non vuoti, disgiunti, e $I \subseteq U \cup V$. Si scelgano $a \in U \cap I, b \in V \cap I$, e sia $a < b$. Essendo I un intervallo si ha che $[a, b] \in I$, e essendo U e V aperti esiste $\varepsilon > 0$ tale che $[a, a + \varepsilon] \subseteq U \cap I, (b - \varepsilon, b] \subseteq V \cap I$.

Sia $c = \sup(U \cap [a, b])$. Per costruzione $a + \varepsilon \leq c \leq b - \varepsilon$, quindi $a < c < b$, ed essendo I un intervallo è $c \in I \subseteq U \cup V$.

¹Una condizione equivalente per la sconnessione di $E \subset X$ che non fa intervenire la topologia relativa di E ma solo quella di X è la seguente. E è sconnesso se è unione disgiunta di due insiemi non vuoti e *separati* :

$$E = E_1 \cup E_2, \text{ con } E_1, E_2 \neq \emptyset, \overline{E_1} \cap E_2 = E_1 \cap \overline{E_2} = \emptyset$$

(dove la chiusura è la chiusura in X).

Infatti se $E = E_1 \cup E_2$ con gli E_j non vuoti, disgiunti e chiusi in E , è $\overline{E_1}^E = \overline{E_1} \cap E = E_1$, e quindi essendo $E_2 \subset E$ si ha che $\overline{E_1} \cap E_2 = \overline{E_1} \cap E \cap E_2 = E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Se viceversa $E = E_1 \cup E_2$, con $E_1, E_2 \neq \emptyset, \overline{E_1} \cap E_2 = E_1 \cap \overline{E_2} = \emptyset$ allora E è unione disgiunta degli insiemi non vuoti E_1, E_2 e questi sono chiusi in E perché $\overline{E_1}^E = \overline{E_1} \cap E = E_1$ (l'insieme $\overline{E_1} \cap E$ contiene E_1 , è contenuto in E , ma ha intersezione vuota con $E_2 = E \setminus E_1$ essendo $\overline{E_1} \cap E \cap E_2 = \overline{E_1} \cap E_2 = \emptyset$).

Se fosse $c \in U$, essendo U aperto si avrebbe che $(c - \delta, c + \delta) \subseteq U$ per un $\delta > 0$, contraddicendo la definizione di c , e analogamente se fosse $c \in V$, essendo V aperto si avrebbe che $(c - \delta, c + \delta) \subseteq V$ per un $\delta > 0$, contraddicendo la definizione di c .

(2) Se $f(E)$ è sconnesso, esistono U, V aperti di Y tali che $U \cap f(E) \neq \emptyset, V \cap f(E) \neq \emptyset, U \cap V \cap f(E) = \emptyset, f(E) \subseteq U \cup V$.

Ma allora, posto, $U' = f^{-1}(U), V' = f^{-1}(V)$ si ha che U' e V' sono aperti in X (per la continuità di f), $U' \cap E \neq \emptyset, V' \cap E \neq \emptyset, U' \cap V' \cap E = \emptyset, E \subseteq U' \cup V'$, quindi E è sconnesso.

(3) È una conseguenza dei precedenti punti. □

Nel caso di un sottoinsieme $A \subset X$ aperto, i sottoinsiemi aperti di A coincidono con i sottoinsiemi aperti di X contenuti in A , quindi

Un aperto $A \subseteq X$ è **sconnesso** se esistono due aperti (di X) $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A = A_1 \cup A_2$.

Si dice che A è **connesso** se non è sconnesso.

Un **arco continuo** in E , con $E \subseteq X$, è un' applicazione continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha([0, 1]) \subseteq E$.

L'immagine $\alpha([0, 1]) \subseteq E$ è il **sostegno** dell' arco. I punti $P_1 = \alpha(0)$ e $P_2 = \alpha(1)$ sono gli **estremi** dell' arco (rispettivamente punto iniziale e punto finale dell' arco), e si dice che α li congiunge.

Se α è un arco continuo l' arco opposto $-\alpha$ è definito da $-\alpha(t) = \alpha(1 - t), 0 \leq t \leq 1$.

Se α_1, α_2 sono archi in E e il punto finale di α_1 coincide con il punto iniziale di α_2 , cioè $\alpha_1(1) = \alpha_2(0)$ si definisce il prodotto (o somma, o concatenazione) $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ di α_1 e α_2 come

$$\alpha(t) = [\alpha_1 \alpha_2](t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Per induzione si definisce la concatenazione di 3 o più curve.

In particolare se $X = \mathbb{R}^N$, dati due punti P_1, P_2 abbiamo già incontrato il **segmento da P_1 a P_2** : è il sostegno $[P_1, P_2]$ dell' arco α definito da $\alpha(t) = (1 - t)P_1 + tP_2 = P_1 + t(P_2 - P_1), 0 \leq t \leq 1$.

Una **spezzata o poligonale** in $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un arco α ottenuto come prodotto di un numero finito di segmenti contenuti in E .

Se ognuno di questi segmenti è parallelo a uno degli assi coordinati (cioè lungo il segmento varia solo una coordinata) si parla di **spezzata o poligonale con lati paralleli agli assi**.

Un aperto A è **connesso per archi** se dati due punti $P_1, P_2 \in A$ esiste un arco continuo in A che li congiunge.

In generale (in ogni spazio metrico o topologico) un insieme connesso per archi è connesso, ma non vale il viceversa.

Tuttavia nel caso che ci interessa maggiormente ora, il caso di un aperto di \mathbb{R}^N , i due concetti coincidono.

Teorema 3.2. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^N .*

- (1) *Se A è connesso per archi allora è connesso (l'implicazione è vera in ogni spazio metrico).*
- (2) *Se A è connesso allora esso è connesso per archi, anzi è connesso per spezzate poligonali parallele agli assi: dati due punti essi sono congiunti da una poligonale con lati paralleli agli assi.*

Dimostrazione.

- (1) Sia A sconnesso: esistono due aperti $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A = A_1 \cup A_2$. Mostriamo che se $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ è un arco continuo in A con $\alpha(a) = P_1 \in A_1$, allora anche $\alpha(b) \in A_1$.

Ne seguirà che non si possono congiungere punti di A_1 a punti di A_2 e quindi A non è connesso per archi.

Sia $t_0 = \sup\{t \in [a, b] : \alpha(s) \in A_1 \text{ se } a \leq s \leq t\}$. Essendo A_1 aperto, $\alpha(a) = P_1 \in A_1$ e α continua, esiste $\delta > 0$ tale che $\alpha(s) \in A_1$ se $a \leq s \leq a + \delta$, quindi $t_0 > a$.

Inoltre $\alpha(t_0) \in A_1$. Infatti se così non fosse, essendo $A_2 = A \setminus A_1$ aperto, dovrebbe essere $\alpha(t_0) \in A_2$ e per continuità $\alpha(t) \in A_2$ per $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, contraddicendo la definizione del sup. Se fosse $t_0 < b$, essendo A_1 aperto, $\alpha(t_0) \in A_1$ e α continua, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $\alpha(s) \in A_1$ se $a \leq s \leq t_0 + \delta$, contraddicendo la definizione del sup.

- (2) Sia A connesso, sia $x_0 \in A$, e sia A_1 l'insieme dei punti di A che possono essere congiunti con x_0 da una poligonale con lati paralleli agli assi.

L'insieme A_1 è non vuoto ($x_0 \in A_1$) ed è aperto.

Infatti se $x_1 \in A_1$ esiste una poligonale che congiunge x_0 a x_1 , e esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x_1) \subseteq A$. Evidentemente ogni punto y della palla aperta $B_\varepsilon(x_1)$ può essere congiunto a x_1 da una poligonale con lati paralleli agli assi e prendendo il prodotto di concatenazione di una poligonale da x_0 a x_1 con questa si congiunge x_0 a y .

Per lo stesso motivo l'insieme $A_2 = A \setminus A_1$ è aperto: se x_1 non può essere connesso da una poligonale con x_0 e $B_\varepsilon(x_1) \subseteq A$, ne segue che nessun punto y della palla $B_\varepsilon(x_1)$ può essere connesso con x_0 (altrimenti lo sarebbe anche x_0 per concatenazione con una poligonale da y a x_0).

Essendo A connesso e A_1, A_2 aperti disgiunti con $A_1 \neq \emptyset$, è $A_2 = A \setminus A_1 = \emptyset$, cioè $A = A_1$: ogni punto di A si può connettere a x_0 con una poligonale con lati paralleli agli assi.

□

Una conseguenza del precedente teorema è il seguente risultato (conseguenza immediata del Teorema di Lagrange scalare o vettoriale per applicazioni differenziabili definite in aperti convessi, ma qui dimostrata in ipotesi più generali).

Teorema 3.3 (Funzioni con derivate nulle in un connesso). *Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^N e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ un' applicazione derivabile in A , cioè tale che esistono le derivate parziali in ogni punto di A . Se le derivate parziali di f si annullano in A allora f è costante.*

Dimostrazione. Si può supporre $M = 1$, cioè che la funzione sia a valori reali (applicando poi alle componenti il risultato).

Se f ha un valore c in un punto x , applicando il teorema di Lagrange per funzioni scalari di una variabile, si vede che f ha lo stesso valore su ogni segmento parallelo agli assi che parte da x . Sia $x_0 \in A$ e $c = f(x_0)$. Essendo A connesso, per ogni punto $x \in A$ esiste una poligonale con lati paralleli agli assi che lo congiunge a x_0 e per quanto detto la funzione f mantiene il valore c lungo questa poligonale. \square

Definizione 3.1. Se A è un aperto di \mathbb{R}^N , definiamo la relazione $x\mathcal{R}y$ se esiste un arco continuo in A che congiunge x e y .

È una relazione di equivalenza, come si può verificare facilmente (utilizzando per le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva rispettivamente la curva costante, la curva opposta di una data curva e il prodotto di due curve).

Le classi di equivalenza sono dette **componenti connesse** di A e lo stesso A è unione disgiunta delle sue componenti connesse.

Evidentemente se A è connesso l' unica componente connessa è A .

Compattezza

Ricordiamo che un sottoinsieme K di uno spazio metrico X si dice **compatto per successioni o sequenzialmente compatto** se da ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a un punto $x \in K$.

Vogliamo ora dare delle condizioni equivalenti di compattezza negli spazi metrici.

Una collezione $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di sottoinsiemi di X è un **ricoprimento** del sottoinsieme $F \subset X$ se $F \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$; è un **ricoprimento finito** se l' insieme A degli indici è finito; se inoltre ogni O_α è aperto è un **ricoprimento aperto di F** .

Un sottoinsieme K è **compatto per ricoprimenti** se da ogni ricoprimento aperto $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di K si può estrarre un sottoricoprimento finito: se $K \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ con gli O_α aperti, esistono $m \in \mathbb{N}^+$ e indici $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A$ tali che $K \subset \cup_{i=1}^m O_{\alpha_i}$.

Il **diametro** di un sottoinsieme $C \subset X$ è definito come $\text{diam}(C) = \sup_{x,y \in C} d(x,y)$. L'insieme C è limitato se il suo diametro è finito.

Un sottoinsieme K di X è **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento *finito* di K con palle centrate in K di raggio $\leq \varepsilon$ (è equivalente richiedere un ricoprimento finito con insiemi di diametro $\leq \varepsilon$).

Un sottoinsieme $F \subset X$ è **completo** se ogni successione di Cauchy a valori in F è convergente a un punto di F .

Se (X, d) è completo, un sottoinsieme $F \subset X$ è completo se e solo se è chiuso.

Teorema 3.4 (Numero di Lebesgue di un ricoprimento). *Siano (X, d) uno spazio metrico, $K \subset X$ un sottoinsieme compatto (per successioni) di X e $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di K .*

a) *Esiste allora un numero $\varepsilon_0 > 0$ (numero di Lebesgue del ricoprimento) con la seguente proprietà: ogni palla chiusa con centro in un punto $y \in K$ e raggio ε_0 (e quindi ogni palla aperta o chiusa di raggio $\varepsilon \leq \varepsilon_0$) è contenuta in un insieme $O_{\bar{\alpha}}$ del ricoprimento.*

b) *Esiste $\varepsilon_1 > 0$ tale che ogni insieme B che interseca K con $\text{diam}(B) \leq \varepsilon_1$ è contenuto in un insieme $O_{\bar{\alpha}}$ del ricoprimento.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una palla B_ε di raggio ε che non è contenuta in alcun insieme O_α del ricoprimento. Ponendo successivamente $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$, $m \in \mathbb{N}$, si ottiene quindi una successione $\bar{B}_m = \bar{B}(x_m, \frac{1}{2^m})$ di palle chiuse centrate in punti $x_m \in K$ non contenute in alcun insieme del ricoprimento.

Essendo K compatto esiste una sottosuccessione x_{k_m} convergente a un punto $x \in K$. Essendo $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di K , esistono $\bar{\alpha} \in A$, $\delta > 0$ tali che $x \in B(x, \delta) \subset O_{\bar{\alpha}}$.

Se m è tale che $d(x_{k_m}, x) < \frac{\delta}{2}$, $\frac{1}{2^{k_m}} < \frac{\delta}{2}$, si ha che $\bar{B}(x_{k_m}, \frac{1}{2^{k_m}}) \subset B(x, \delta) \subset O_{\bar{\alpha}}$ (infatti se $y \in X$, $d(y, x_{k_m}) \leq \frac{1}{2^{k_m}} (< \frac{\delta}{2})$ è $d(y, x) \leq d(y, x_{k_m}) + d(x_{k_m}, x) < 2 \frac{\delta}{2} = \delta$). Ciò contraddice l'assunzione che $\bar{B}(x_{k_m}, \frac{1}{2^{k_m}})$ non fosse contenuto in alcun insieme del ricoprimento.

Una semplice modifica del ragionamento dimostra la b); alternativamente si osserva che ogni insieme B che interseca K in x , con $\text{diam}(B) = \varepsilon$ è contenuto nella palla chiusa $\bar{B}(x, \varepsilon)$ \square

Osservazione 3.1. Se $X = \mathbb{R}^N$, nella a) si possono prendere N -cubi, basta considerare \mathbb{R}^N con la norma $\|(x_1, \dots, x_N)\| = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|$, (equivalente alla norma euclidea $\|(x_1, \dots, x_N)\| = (\sum_{i=1}^N x_i^2)^{\frac{1}{2}}$).

Nella metrica indotta da questa norma le palle di raggio ε centrate in x sono appunto i cubi di semilato ε centrati in x .

Teorema 3.5 (Caratterizzazione della compattezza in spazi metrici). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni per un sottoinsieme $K \subset X$*

- (1) K è compatto per successioni.
 (2) K è completo e totalmente limitato.
 (3) K è compatto per ricoprimenti.

Dimostrazione (schema). 1) \implies 2) . Sia K sequenzialmente compatto. Se x_n è una successione di Cauchy in K , esiste una sottosuccessione x_{k_n} convergente a $x \in K$, ma una successione di Cauchy che ha un'estratta convergente è convergente. Quindi K è completo.

Se K non è totalmente limitato esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio $\varepsilon > 0$ ricopre K . Scelto $x_1 \in K$, dato che $B(x_1, \varepsilon_0)$ non ricopre K , esiste $x_2 \in K$ con $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Dato che $B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0)$ non ricopre K esiste $x_3 \in K$ tale che $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon_0$, $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon_0$. Proseguendo si costruisce una successione x_n tale che $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$ se $i \neq j$. Da essa non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente contraddicendo la compattezza sequenziale. Quindi se K è sequenzialmente compatto allora è totalmente limitato.

2) \implies 1) (versione astratta del Teorema di Bolzano-Weierstrass). Sia K completo e totalmente limitato, e sia x_n una successione in K . Esiste un ricoprimento finito di K con palle centrate in K di raggio 1, e una di queste, sia B_1 è tale che $x_k \in B_1 \cap K$ per infiniti indici k . K , e quindi $B_1 \cap K$, è ricoperto da un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$, e una di queste, sia B_2 , è tale che $x_k \in B_1 \cap B_2 \cap K$ per infiniti indici k . Proseguendo si costruisce una successione di palle B_m di raggio $\frac{1}{m}$ e tali che $x_k \in B_1 \cap \dots \cap B_m \cap K$ per infiniti indici k .

Scelto $x_{k_1} \in B_1 \cap K$, $x_{k_2} \in B_1 \cap B_2 \cap K$ con $k_2 > k_1$ (ce ne sono infiniti), ... si costruisce una sottosuccessione $y_n = x_{k_n}$.

Tale successione è di Cauchy: se $\varepsilon > 0$, $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$, e $n, m \geq n_0$, si ha, essendo $k_n \geq n$, che $y_n, y_m \in B_{n_0} = B(y_0, \frac{1}{n_0})$, quindi $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, y_0) + d(y_0, x_m) < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Essendo K completo la successione x_{k_n} converge a un punto di K .

1) \implies 3) Useremo l'equivalenza già dimostrata tra 1) e 2), e il Teorema 3.4. Sia K compatto, quindi completo e totalmente limitato, e sia $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di K . Se $\varepsilon_0 > 0$ è un numero di Lebesgue del ricoprimento, essendo K totalmente limitato esiste un ricoprimento finito di K con palle $B(x_j, \varepsilon_0)$, $j = 1, \dots, M$, e ognuna di esse è contenuta in un insieme $O_{\alpha(j)}$ del ricoprimento. In questo modo la collezione $O_{\alpha(j)}$, $j = 1, \dots, M$, è un sottoricoprimento finito di K .

3) \implies 1) Se 1) è falso mostriamo che 3) è falso. Sia x_n una successione in K dalla quale non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente. Se $x \in K$, dato che non è limite di alcuna sottosuccessione, esiste un intorno $U = U_x$ di x tale che $x_k \in U$ per al più un numero finito di indici (se per ogni intorno U di x si ha che $x_k \in U$ per infiniti indici, è facile costruire una sottosuccessione convergente a x prendendo $x_{k_n} \in B(x, \frac{1}{n})$ con $k_1 < k_2 < \dots$). Dal ricoprimento aperto $\{U_x\}_{x \in K}$ di K non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito

(si avrebbe $x_k \in K$ per un numero finito di indici). \square

Corollario 3.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo.*

Se $E \subset X$ sono equivalenti le seguenti condizioni.

- (1) *Da ogni successione in E si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a un punto di X (necessariamente in \bar{E}).*
- (2) *E è totalmente limitato.*
- (3) *\bar{E} è compatto per ricoprimenti.*

*Se E verifica una tra (e quindi tutte) le condizioni precedenti, si dice che E è **precompatto** (o a chiusura compatta) in X .*

Dimostrazione. Basta mostrare (la verifica non è difficile) che ognuna delle condizioni equivale per $K = \bar{E}$ alle condizioni analoghe nel teorema: nella 2) occorre verificare che E è totalmente limitato (se e solo se lo è anche $\bar{E} = K$ (che è completo come sottoinsieme chiuso di uno spazio completo); nella 1) che se da ogni successione in E si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente in X , allora anche da ogni successione in $\bar{E} = K$ si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente in K (il viceversa essendo ovvio). \square

Osservazione 3.2. Il fatto che i compatti di \mathbb{R}^N sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati (teorema di Bolzano Weierstrass che abbiamo dimostrato in precedenza) oltre che per verifica diretta si può ottenere come corollario del teorema di caratterizzazione, una volta che si provi (la verifica non è difficile) che in \mathbb{R}^N un insieme è limitato (se e solo se è totalmente limitato).

Ciò è falso in generale, in particolare negli spazi normati di dimensione infinita, come vedremo in capitoli successivi.

3.2. Curve e integrali curvilinei di prima specie.

Siano $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \dots \\ g_m(t) \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ due funzioni

di una variabile derivabili a valori vettoriali, e consideriamo la funzione scalare $\alpha(t) = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$. È una semplice verifica, ricordando che

$\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \dots \\ f_m'(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \dots \\ g_m'(t) \end{pmatrix}$ la seguente regola di derivazione

di un prodotto scalare:

$$\alpha'(t) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

Ponendo $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ si ottiene una semplice ma importante conseguenza:

Se $\mathbf{f}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione derivabile e $\|\mathbf{f}(t)\| = \text{cost}$, allora $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = 0 \forall t \in [a, b]$, cioè i vettori valore $\mathbf{f}(t)$ e derivato $\mathbf{f}'(t)$ sono tra loro ortogonali.

La regola di derivazione di un prodotto vale anche per il prodotto vettoriale: se $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono due funzioni di una variabile derivabili a valori in \mathbb{R}^3 e $\alpha(t) = \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t) \\ f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t) \\ f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t) \end{pmatrix}$, si ha che

$$\alpha'(t) = (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t)$$

Sia $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_m(t) \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua di una variabile a valori vettoriali e definiamo l'integrale di f come $\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \dots \\ \int_a^b f_m(t) dt \end{pmatrix}$.

Vale allora il Teorema fondamentale del calcolo integrale, e in particolare se \mathbf{f} è continua in $[a, b]$ e $\mathbf{F}(t) = \int_a^t \mathbf{f}(s) ds$ allora F è derivabile in $[a, b]$ con $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)$, viceversa se \mathbf{F} è di classe $C^1([a, b])$ allora $\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = \int_a^b \mathbf{F}'(t) dt$.

Inoltre se $z \in \mathbb{R}^N$ si verifica subito che $\int_a^b \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{z} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t) dt$.

Una importante disuguaglianza analoga a quella che vale per le funzioni scalari di una variabile, è la seguente:

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\| dt$$

Per dimostrarla, definiamo $\mathbf{z} = \int_a^b \mathbf{f}(t) dt$ e consideriamo la funzione $\beta(t) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t)$.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t) dt \right\|^2 = \mathbf{z} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \int_a^b \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t) dt \leq \int_a^b \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{f}(t)\| dt = \|\mathbf{z}\| \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\| dt = \left\| \int_a^b \mathbf{f}(t) dt \right\| \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\| dt.$$

Se $\int_a^b \mathbf{f}(t) dt \neq \mathbf{0}$, dividendo per $\|\mathbf{z}\| = \left\| \int_a^b \mathbf{f}(t) dt \right\| > 0$ si ha la tesi, se invece $\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{0}$ la disuguaglianza è immediata.

Una **parametrizzazione di una curva continua** in \mathbb{R}^N è un'applicazione continua $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, dove I è un intervallo di \mathbb{R} . Le componenti $x_1(t), \dots, x_N(t)$ danno le cosiddette **equazioni parametriche**

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \dots \\ x_N = x_N(t) \end{cases}.$$

Intuitivamente è una deformazione continua di un oggetto 1-dimensionale nello spazio N -dimensionale.

L'immagine $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^N$ è il **sostegno o traccia** della parametrizzazione.

Una **parametrizzazione è di classe C^1** se $\mathbf{r} \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$, è **regolare** se è di classe C^1 e inoltre $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t \in I$ (se ad esempio $I = [a, b]$ si intende la derivata destra in a , quella sinistra in b).

Ad esempio le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ danno una parametrizzazione regolare}$$

che ha come sostegno la circonferenza di raggio R e centro l'origine nel piano percorsa una volta in senso antiorario, le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ danno una parametrizzazione}$$

regolare che ha come sostegno il segmento nel piano di estremi $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Un caso particolare di curva piana (cioè in \mathbb{R}^2) è quello di una parametrizzazione di una **curva cartesiana** associata al grafico di una funzione continua $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 : è la curva che si ottiene identificando la variabile indipendente x con il parametro t , di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Se la funzione $y(x)$ è di classe C^1 , questo tipo di parametrizzazione è sempre regolare, perché

$$\mathbf{r}'(t) = (1, y'(t)) \neq (0, 0).$$

Se non si impongono altre condizioni però, la regolarità è una di queste, una parametrizzazione di classe C^1 di una curva può anche non essere un oggetto 1-dimensionale, ad esempio la parametrizzazione di una curva costante $\mathbf{r}(t) = P \in \mathbb{R}^N$, $t \in [a, b]$, che ha come sostegno il singolo punto P . Questo tipo di curva ci sarà utile in seguito e a volte parlando di curve parleremo di un punto P intendendo la curva costante $\mathbf{r}(t) = P \in \mathbb{R}^N$.

Una **parametrizzazione (continua) $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è detta C^1 a tratti** [rispettivamente **regolare a tratti**] se esiste una partizione $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ di $[a, b]$ tale che la restrizione di \mathbf{r} a ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m$ è una parametrizzazione di classe C^1 [rispettivamente **regolare a tratti**] (nei punti di raccordo i vettori derivati destro e sinistro esistono non nulli ma possono essere differenti tra loro).

Una **trasformazione regolare di coordinate o cambiamento regolare di parametro** in \mathbb{R} è un'applicazione biunivoca $\varphi : J \rightarrow I$ di classe C^1 tra intervalli tale che $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in J$ (e quindi $\varphi'(s) > 0$ oppure $\varphi'(s) < 0$ per ogni $s \in J$).

Due **parametrizzazioni** $\mathbf{r}_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{r}_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono dette

equivalenti se esiste una trasformazione regolare di coordinate $\varphi : J \rightarrow I$ tale che $\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(\varphi(s)) \forall s \in J$, cioè $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ \varphi$. Se $\varphi'(s) > 0 \forall s \in J$ si dice che le parametrizzazioni sono equivalenti ed **equiverse**, se invece $\varphi'(s) < 0 \forall s \in J$ si dice che le parametrizzazioni sono equivalenti e **controverse**.

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno (ma due curve possono essere non equivalenti ma avere lo stesso sostegno, ad esempio la circonferenza percorsa una volta e quella percorsa due volte, con le stesse equazioni parametriche ma intervallo del parametro $[0, 4\pi]$).

La relazione, nell'insieme delle parametrizzazioni, $\mathbf{r}_1 \mathcal{R} \mathbf{r}_2 \iff \mathbf{r}_1$ e \mathbf{r}_2 sono equivalenti [ed equiverse] è una relazione di equivalenza, e le corrispondenti classi di equivalenza sono dette **curve** [**curve orientate**] continue.

Ogni nozione che non dipende dalla parametrizzazione può essere definita anche per una curva, ad esempio si può parlare di **sostegno di una curva** γ definito dal sostegno di una qualunque delle parametrizzazioni equivalenti che definiscono γ .

Nella maggior parte dei casi avremo a che fare con parametrizzazioni aventi per dominio un intervallo compatto $[a, b]$. A volte si parla di **arco** continuo in questo caso, ma continueremo ad usare il termine curva indifferentemente.

Data la parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, i punti $P_1 = \alpha(0)$ e $P_2 = \alpha(1)$ sono gli **estremi** della curva (rispettivamente punto iniziale e punto finale della curva), e si dice che α li congiunge.

Consideriamo data una curva γ se è data una sua parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, e parleremo indifferentemente di una curva γ o di una curva \mathbf{r} , identificando la curva con una sua qualunque parametrizzazione.

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ diremo che una curva γ è una **curva in** E se il sostegno di γ è contenuto in E .

Una curva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è **semplice** se è iniettiva in $[a, b]$, è **chiusa** se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Una curva può essere semplice e chiusa, ad esempio la circonferenza di raggio R e centro l'origine nel piano percorsa una volta in senso antiorario.

Una **curva è di classe** C^1 [rispettivamente **regolare**, C^1 **a tratti**, **regolare a tratti**] se tale è una sua parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (e quindi tutte quelle ad essa equivalenti).

Se $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una parametrizzazione di una curva *regolare* il **versore tangente** al tempo t in questa parametrizzazione è definito da $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.

Osservazione 3.3. Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrizzazione regolare, $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ un cambiamento regolare di parametro e consideriamo la parametrizzazione equivalente $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \circ \varphi$. Se $\varphi(s) = t$, cosicché

$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(t)$, i versori tangenti $T(t)$ nella parametrizzazione \mathbf{r} e $T_1(s)$ nella parametrizzazione \mathbf{r}_1 coincidono se la parametrizzazione è equivalente ed equiversa, sono tra loro opposti se la parametrizzazione è equivalente ed controversa.

Infatti se $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(\varphi(s))$, $t = \varphi(s)$, si ha che $\mathbf{T}_1(s) = \frac{\mathbf{r}'_1(s)}{\|\mathbf{r}'_1(s)\|} = \frac{\mathbf{r}'(\varphi(s))\varphi'(s)}{\|\mathbf{r}'(\varphi(s))\varphi'(s)\|} = \frac{\varphi'(s)}{|\varphi'(s)|} \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \pm \mathbf{T}(t)$ con il segno determinato dal segno di $\varphi'(s)$.

Se la curva è semplice si può considerare una funzione definita sul sostegno della curva, che al punto $p_0 \in \mathbf{r}(t_0)$, con $t_0 = \mathbf{r}^{-1}(p_0)$ fa corrispondere $\mathbf{T}(t_0)$. Si può quindi parlare in questo senso di **versore tangente a una curva orientata regolare semplice**.

Ad esempio se γ è una curva cartesiana associata al grafico della funzione di classe C^1 $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, il versore tangente in $t = x$ è dato da $T(x) = \frac{(1, y'(x))}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$.

Ogni curva è equivalente ed equiversa ad una curva che ha come intervallo del parametro l'intervallo $[0, 1]$ scegliendo come cambio di parametro l'applicazione $\varphi(s) = a + s(b - a) : [0, 1] \rightarrow [a, b]$: data la curva $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, essa è equivalente (ed equiversa) alla curva $\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(a + s(b - a))$, $s \in [0, 1]$.

Questa rappresentazione è comoda, ad esempio per definire la curva opposta e la concatenazione di curve.

Se γ è una curva definita dalla parametrizzazione $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, la **curva opposta** $-\gamma$ è definita dalla parametrizzazione

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Evidentemente tale curva è equivalente e controversa alla curva γ .

Se γ_1, γ_2 sono curve definite dalle parametrizzazioni $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, e il punto finale di \mathbf{r}_1 coincide con il punto iniziale di \mathbf{r}_2 , cioè $\mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}_2(0)$ si definisce il **prodotto (o somma, o concatenazione)** $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_2$ come la curva che ha parametrizzazione

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathbf{r}_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Per induzione si definisce il prodotto di più curve.

La concatenazione di curve regolari può non essere regolare, e dà invece l'esempio tipico di curva regolare a tratti.

Molti dei concetti che abbiamo visto o vedremo si generalizzano al caso di curve C^1 a tratti o regolari a tratti.

Ad esempio il versore tangente può essere definito per parametrizzazioni regolari a tratti, tranne che per un numero finito di valori del parametro.

La lunghezza di un segmento $[P_1, P_2]$ è la distanza tra P_1 e P_2 , cioè la norma euclidea $\|P_2 - P_1\|$ del vettore $P_2 - P_1$.

Una spezzata poligonale è una curva ottenuta come concatenazione di un numero finito di segmenti, e la sua lunghezza è definita come la somma delle lunghezze dei segmenti che la compongono.

Per definire la lunghezza di una curva si approssima la curva con delle *spezzate poligonali inscritte* e si considera l' estremo superiore.

Più precisamente diamo la seguente

Definizione 3.2. Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ la parametrizzazione di una curva γ in \mathbb{R}^N . Data una partizione o suddivisione $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ di $[a, b]$ consideriamo la spezzata poligonale formata dai segmenti $[P_{i-1}, P_i]$, con $P_i = \mathbf{r}(t_i)$, $i = 1, \dots, m$ e la sua lunghezza $l(\gamma; \Pi) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|$.

Diremo che γ è una **curva rettificabile** se

$$\sup\{l(\gamma; \Pi) : \Pi \text{ partizione di } [a, b]\} < +\infty,$$

e in tal caso definiamo la **lunghezza di** γ come

$$l(\gamma) = \sup\{l(\gamma; \Pi) : \Pi \text{ partizione di } [a, b]\}$$

Osservazione 3.4. La definizione non dipende dalla scelta di una parametrizzazione equivalente (sia equiversa che controversa), perché se $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è un cambiamento regolare di parametro e consideriamo la parametrizzazione $\mathbf{r} \circ \varphi$, ad ogni suddivisione di $[c, d]$ corrisponde biunivocamente una partizione di $[a, b]$. . .

Non tutte le curve continue sono rettificabili. Ad **esempio** la curva cartesiana associata al grafico della funzione

$$y = \begin{cases} x \cos(\frac{\pi}{x}) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{non è rettificabile (si osservi che la}$$

funzione non è di classe $C^1([0, 1])$, non è derivabile in $x = 0$).

Infatti data la suddivisione $\Pi_n = \{0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$ di $[0, 1]$ si ha che il segmento da $(\frac{1}{k+1}, \frac{\cos((k+1)\pi)}{k+1})$ a $(\frac{1}{k}, \frac{\cos(k\pi)}{k})$ ha lunghezza maggiore e uguale a $|\frac{\cos((k+1)\pi)}{k+1} - \frac{\cos(k\pi)}{k}| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$, e quindi la corrispondente spezzata poligonale verifica $l(\gamma, \Pi_n) \geq \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}) \geq \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k})$, termine generale della serie armonica che diverge.

Per determinare condizioni sufficienti per la rettificabilità e formule per calcolare la lunghezza, cominciamo a mostrare l' **additività della lunghezza**.

Teorema 3.6. Se $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una parametrizzazione di una curva γ , e $a, b, c \in I$ con $a < c < b$, indichiamo con $l(\gamma; [a, c])$, $l(\gamma; [c, b])$, $l(\gamma; [a, b])$ le lunghezze della curve associate alle restrizioni di \mathbf{r} agli intervalli $[a, c]$, $[c, b]$, $[a, b]$.

Si ha allora che $l(\gamma; [a, b]) = l(\gamma; [a, c]) + l(\gamma; [c, b])$.

Dimostrazione. Se \mathcal{S} è una suddivisione di $[a, c]$ e \mathcal{T} una suddivisione di $[c, b]$ allora $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ è una suddivisione di $[a, b]$ e si ha che $l(\gamma; \mathcal{S}) + l(\gamma; \mathcal{T}) = l(\gamma; \mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \leq l(\gamma; [a, b])$. Per l' arbitrarietà di \mathcal{S} e \mathcal{T} si ottiene che $l(\gamma; [a, c]) + l(\gamma; [c, b]) \leq l(\gamma; [a, b])$. Viceversa se \mathcal{D} è una suddivisione

di $[a, b]$ e (qualora mancasse) si aggiunge il punto c alla suddivisione si ha che $\mathcal{D} \cup \{c\}$ si può scrivere come $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ per suddivisioni \mathcal{S} e \mathcal{T} di $[a, c]$, rispettivamente $[c, b]$.

D' altra parte è chiaro che per la disuguaglianza triangolare se si aggiunge un punto la lunghezza della spezzata aumenta, cioè $l(\gamma; \mathcal{D}) \leq l(\gamma; \mathcal{D} \cup \{c\}) = l(\gamma; \mathcal{S} \cup \mathcal{T}) = l(\gamma; \mathcal{S}) + l(\gamma; \mathcal{T}) \leq l(\gamma; [a, c]) + l(\gamma; [c, b])$. Per l' arbitrarietà di \mathcal{D} si ottiene allora che $l(\gamma; [a, b]) \leq l(\gamma; [a, c]) + l(\gamma; [c, b])$ e quindi $l(\gamma; [a, b]) = l(\gamma; [a, c]) + l(\gamma; [c, b])$. \square

Una condizione sufficiente per la rettificabilità di una curva e una formula per il calcolo della lunghezza sono date dal

Teorema 3.7. *Se γ è un arco di classe C^1 associato alla parametrizzazione $\mathbf{r} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ essa è rettificabile e la sua lunghezza è data da $l(\gamma) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$*

Dimostrazione. Se $\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ è una suddivisione di $[a, b]$ è $\|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{r}'(t) dt\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ e sommando per $i = 1, \dots, m$ si ottiene $l(\gamma; \mathcal{D}) \leq \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$.

Ciò mostra che $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ è un maggiorante dell' insieme $\{l(\gamma; \Pi) : \Pi \text{ partizione di } [a, b]\}$, quindi la curva è rettificabile e

$$l(\gamma) \leq \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt .$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta, con le notazioni del precedente teorema introduciamo la funzione $s(x) = l(\gamma; [a, x])$.

Per il lemma precedente se $x \in [a, b]$ e $0 < h < b - x$ vale la formula $s(x+h) - s(x) = l(\gamma; [x, x+h])$ (perché $s(x) + l(\gamma; [x, x+h]) = l(\gamma; [a, x]) + l(\gamma; [x, x+h]) = l(\gamma; [a, x+h]) = s(x+h)$).

Inoltre per la disuguaglianza appena dimostrata si ha che $s(x+h) - s(x) = l(\gamma; [x, x+h]) \leq \int_x^{x+h} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$.

Inoltre (considerando la partizione banale $\mathcal{E} = \{x, x+h\}$ di $[x, x+h]$) si ha che

$$\|\mathbf{r}(x+h) - \mathbf{r}(x)\| \leq l(\gamma; [x, x+h]) = s(x+h) - s(x).$$

Ne segue che se $x \in [a, b]$ e $0 < h < b - x$ si ha

$$\frac{1}{h} \|\mathbf{r}(x+h) - \mathbf{r}(x)\| = \left\| \frac{1}{h} (\mathbf{r}(x+h) - \mathbf{r}(x)) \right\| \leq \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Per $h \rightarrow 0^+$ si ottiene $s_+'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \|\mathbf{r}'(x)\|$ e in modo analogo $s_-'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \|\mathbf{r}'(x)\|$.

Ne segue che $s'(x) = \|\mathbf{r}'(x)\|$ e quindi $s(b) - s(a) = l(\gamma) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ \square

Corollario 3.2. *Sia γ un arco di classe C^1 a tratti associato alla parametrizzazione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che per la partizione $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ di $[a, b]$ la restrizione di \mathbf{r} a ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m$ è una parametrizzazione di classe C^1 .*

Allora γ è rettificabile e la sua lunghezza è data ancora dalla formula $l(\gamma) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$.

Osservazione 3.5. Nella formula precedente la derivata $\mathbf{r}'(t)$ non è definita in un numero finito di punti, t_1, \dots, t_{m-1} (in a e b come sempre intendiamo le derivate destra e sinistra), ma la funzione è continua e limitata altrove (in quei punti esistono finite le derivate destre e sinistre, eventualmente diverse tra loro), quindi integrabile.

Per convenzione, per essere definita sempre, si può intendere che $\mathbf{r}'(t_i) = 0$ (o è definito in modo arbitrario nei punti t_i).

Anche in seguito quando parleremo di funzioni C^1 a tratti intenderemo questo.

Dimostrazione. Essendo la lunghezza d' arco additiva e \mathbf{r} di classe C^1 negli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$, si ha subito che $l(\gamma) = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$. \square

Osservazione 3.6. Dalla formula precedente abbiamo una conferma, almeno per gli archi di classe C^1 a tratti, che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione equivalente scelta.

Infatti se $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una parametrizzazione di classe C^1 , $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è un cambiamento regolare di parametro e consideriamo la parametrizzazione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \circ \varphi$ si ha che se $\varphi'(s) > 0 \forall s \in [c, d]$ allora $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$

e applicando la formula di integrazione per sostituzione si ottiene che

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_c^d \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_c^d \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds =$$

$$\int_c^d \|\mathbf{r}'_1(s)\| ds, \text{ mentre se } \varphi'(s) < 0 \forall s \in [c, d] \text{ allora}$$

$$\varphi(c) = d, \varphi(d) = a \text{ e}$$

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_d^c \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = - \int_d^c \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds =$$

$$\int_c^d \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds = \int_c^d \|\mathbf{r}'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_c^d \|\mathbf{r}'_1(s)\| ds.$$

Se γ è una curva di classe C^1 a tratti in \mathbb{R}^N di parametrizzazione $\mathbf{r}(t), t \in [a, b]$, e $f = f(x_1, \dots, x_N)$ è una funzione continua in un aperto A che contiene il sostegno di γ , si definisce

l' **integrale curvilineo di prima specie o rispetto alla lunghezza d' arco** $\int_\gamma f ds = \int_\gamma f(x_1, \dots, x_N) ds =$

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_N(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_N'^2(t)} dt$$

Osserviamo che se $f(x_1, \dots, x_N) = 1$ riotteniamo la lunghezza della curva.

Ad **esempio** se γ è la circonferenza di raggio R e centro l' origine,

$$\text{di equazioni parametriche } \begin{cases} x = R \cos(t) \\ y = R \sin(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

il vettore derivato e il vettore $\mathbf{v}(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$, la sua norma è $\|\mathbf{r}'(t)\| = R \forall t \in [0, 2\pi]$, e quindi la lunghezza è

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R, \text{ mentre ad esempio l' integrale curvilineo}$$

$$\int_\gamma x^2 ds = \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2(t) R dt = R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi R^3$$

Sia $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, una parametrizzazione di una curva γ di classe C^1 a tratti. Definiamo la funzione **ascissa curvilinea** come

$$s(t) = l(\gamma; [a, t]) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| dt, \quad a \leq t \leq b$$

Si ha che $s(a) = 0$, $s(b) = l(\gamma)$, e l'immagine di questa funzione è l'intervallo chiuso $[0, l(\gamma)]$.

Supponiamo d'ora in poi di avere una curva regolare (con qualche cambiamento si trattano le curve regolari a tratti) con parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, $\mathbf{r}'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

Essendo $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$, si può quindi interpretare $s(t) : [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$ come cambio regolare di parametro con inversa $t = t(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [a, b]$.

La parametrizzazione $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(t(s)) : I = [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è detta **parametrizzazione naturale o rispetto alla lunghezza d'arco**, e ha la proprietà che

$$\|\mathbf{r}'_1(s)\| = 1, \quad \mathbf{T}_1(s) = \mathbf{r}'_1(s) \quad \forall s \in I.$$

dove $\mathbf{T}_1(s)$ è il versore tangente nella parametrizzazione naturale corrispondente al valore s del parametro naturale.

Infatti $\mathbf{r}'_1(s) = \mathbf{r}'(t(s)) t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} \mathbf{r}'(t(s)) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|} \mathbf{r}'(t(s))$, quindi $\|\mathbf{r}'_1(s)\| = \frac{\|\mathbf{r}'(t(s))\|}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|} = 1$ e $\mathbf{T}_1(s) = \frac{\mathbf{r}'_1(s)}{\|\mathbf{r}'_1(s)\|} = \mathbf{r}'_1(s)$

Inoltre in questa parametrizzazione la lunghezza del tratto di curva percorso quando il parametro naturale varia da 0 a s è proprio s :

$$l(\gamma; [0, s]) = \int_0^s \|\mathbf{r}'_1(s)\| ds = \int_0^s ds = s$$

Definiamo la **curvatura (senza segno)** della curva in funzione del parametro naturale come

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'_1(s)\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}_1}{ds}(s) \right\|$$

È il modulo del vettore che dà il tasso di variazione del versore tangente *rispetto alla lunghezza d'arco*, ed è definita in funzione del parametro naturale.

Se $\mathbf{T}'_1(s) \neq \mathbf{0}$ si può definire il **versore normale principale** alla curva: $\mathbf{N}_1(s) = \frac{\mathbf{T}'_1(s)}{\|\mathbf{T}'_1(s)\|}$.

È un versore e ha direzione perpendicolare al versore tangente, perché essendo $\|\mathbf{T}_1(s)\| = 1 = \text{cost}$, si ha che $\mathbf{T}'_1(s) \cdot \mathbf{T}_1(s) = 0$.

Si ha quindi che $\mathbf{T}'_1(s) = \kappa(s) \mathbf{N}_1(s)$.

Le definizioni date sono tutte quantità geometriche, sono definite nella parametrizzazione naturale, e sono indipendenti da cambiamenti regolari di parametro.

Se abbiamo una parametrizzazione qualsiasi $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, usiamo la terminologia fisica e consideriamo t come il tempo e $\mathbf{r}(t)$ come il **vettore posizione**. Il **vettore velocità** è $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, mentre la **velocità scalare** è $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = s'(t)$ dove $s(t)$ è l'ascissa curvilinea al tempo t , lo spazio percorso misurato lungo la curva.

Abbiamo visto che

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{T}(t) = s'(t) \mathbf{T}(t),$$

dove $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$ è il versore tangente, che è indipendente dalla parametrizzazione (equivarsa) e dà l'aspetto geometrico, mentre la velocità scalare $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = s'(t)$ dipende dalla parametrizzazione e dà l'aspetto cinematico del moto.

Per calcolare in funzione di t la curvatura $\kappa(t)$, cioè la curvatura $\kappa(s)$, dove $s = s(t)$ è l'ascissa curvilinea, con funzione inversa $t = t(s)$, si può usare la formula

$$\kappa(t) := \kappa(s(t)) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Infatti $s'(t) = v(t)$, quindi $t'(s) = \frac{1}{v(t)}$ e inoltre $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}(t(s))$, $\mathbf{T}'_1(s) = \mathbf{T}'(t(s)) t'(s) = \mathbf{T}'(t(s)) \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|}$, quindi $\kappa(t) := \kappa(s(t)) = \|\mathbf{T}'_1(s)\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t(s))\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.

Vediamo ora che il **vettore accelerazione**, definito come $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, si decompone in una componente tangenziale e in una componente normale al moto:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + \kappa(t) v^2(t) \mathbf{N}(t)$$

dove $v'(t) = s''(t)$ è l'**accelerazione tangenziale**, dipendente dall'aspetto cinematico del moto, $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$ ($= \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}$, indipendente dalla parametrizzazione usata) è il versore normale principale, e $\kappa(t) v^2(t)$ è l'**accelerazione normale**.

Per ricavare la precedente formula basta usare la formula per la derivata di un prodotto (vale anche per la derivata di una funzione scalare per una vettoriale):

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (v \mathbf{T})'(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \frac{d\mathbf{T}}{dt} = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \kappa(t) \mathbf{N}(t) v(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + \kappa(t) v^2(t) \mathbf{N}(t)$$

Per curve di classe C^2 in \mathbb{R}^3 di parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$, ed equazioni

$$\text{parametriche } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \text{ se si indica con } \times \text{ il prodotto}$$

vettoriale, vale la seguente formula per la curvatura (senza segno):

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{v^3(t)}$$

Infatti $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (v \mathbf{T}) \times (v' \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{N}) =$ (essendo il prodotto vettoriale nullo se i vettori sono paralleli) $= v^3 \kappa \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Dato che \mathbf{T} e \mathbf{N} sono vettori ortogonali di norma uno, il loro prodotto vettoriale (è ortogonale ad entrambi e) ha norma 1, quindi $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = v^3 \kappa$.

La stessa formula vale per curve piane, scrivendo una curva di equa-

$$\text{zioni parametriche } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{come curva } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

In questo caso $(x', y', 0) \times (x'', y'', 0) = (0, 0, x'y'' - x''y')$, e si ottiene

quindi la formula

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Per definire il versore normale principale non basta che la curva sia regolare, ma è necessario che $\mathbf{T}'_1(s) \neq 0$ (equivalentemente $\mathbf{T}'(t) \neq 0$ con una parametrizzazione equivalente), cioè che la curvatura senza segno che abbiamo definito $\|\mathbf{T}'_1(s)\|$ (che invece è possibile definire sempre) non si annulli (e ad esempio per una retta è sempre nulla).

Per curve piane è invece possibile definire una *curvatura con segno* e un versore normale se la curva è regolare. Se la curva ha parametrizzazione naturale $\mathbf{r}_1(s) = (x(s), y(s))$ con $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{r}'_1(s)$, $\|\mathbf{r}'_1(s)\| = 1$, definiamo il **versore normale** come $\mathbf{N}_1(s) = (-y'(s), x'(s))$. Esso si ottiene dal versore tangente ruotandolo di un angolo di $\frac{\pi}{2}$

(in una parametrizzazione qualsiasi $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ è

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Se la curva è il bordo $\partial\Omega$ di un aperto regolare di \mathbb{R}^2 percorso in senso antiorario rappresenta il **”versore normale interno”**, che punta verso l'interno di Ω . In ogni caso è una funzione continua a valori vettoriali di norma uno definita sulla curva: una tale funzione è detta **orientazione** della curva.

Naturalmente è possibile scegliere l'orientazione opposta, ma per fissare le idee definiamo in questo modo la relazione tra il versore tangente e il versore normale (nella curva opposta cambiano entrambi segno).

Essendo $\|\mathbf{T}(s)\| = 1 = \text{cost}$ il vettore derivato di \mathbf{T} è ortogonale a \mathbf{T} , quindi proporzionale a $\mathbf{N}(s)$, essendo questo evidentemente ortogonale a \mathbf{T} .

Ne segue che si può scrivere

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa_1(s) \mathbf{N}(s)$$

e $\kappa_1(s)$ è la **curvatura (con segno)** della curva.

Se $\kappa_1(s) > 0$ la curva si incurva nella direzione del versore normale scelto, nella direzione opposta se $\kappa_1(s) < 0$, e il modulo di κ_1 dà la curvatura senza segno definita prima (che si può definire anche per curve in \mathbb{R}^3 o dimensioni superiori).

3.3. Campi vettoriali, Forme differenziali, Integrali curvilinei di seconda specie.

Se $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare, il gradiente $\nabla f(x)$ nel punto $x \in A$ è un vettore, mentre il differenziale $df(x)$ è un' applicazione lineare $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, è cioè un elemento del duale $(\mathbb{R}^N)^*$.

Se indichiamo con $\{dx_1, \dots, dx_N\}$ la base duale della base canonica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ (che verifica $dx_i(h) = dx_i(h_1, \dots, h_N) = h_i$), si può quindi scrivere $df(x) = F_1 dx_1 + \dots + F_N dx_N$, con le stesse componenti $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ del gradiente nella base canonica.

Al variare di $x \in A$ si ottengono un **campo vettoriale in A** , cioè un' applicazione $\mathbf{F} = \nabla f : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ che manda

$$x \in A \mapsto \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \mathbf{e}_i,$$

e una **forma differenziale lineare in A** , cioè un' applicazione $\omega = df : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$ che manda

$$x \in A \mapsto df(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) dx_N.$$

In generale c'è una corrispondenza biunivoca tra campi vettoriali in A , cioè funzioni $\mathbf{F} = (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N)) : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e forme differenziali in A , cioè funzioni $\omega : A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow (\mathbb{R}^N)^*$, che fa corrispondere al campo vettoriale

$$x \mapsto \mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x)) = \sum_{i=1}^N F_i(x) \mathbf{e}_i \quad \text{la forma differenziale}$$

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_{i=1}^N F_i(x) dx_i = F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N$$

Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x) = F_1(x_1, \dots, x_N) dx_1 + \dots + F_N(x_1, \dots, x_N) dx_N$$

continua in un aperto connesso $O \subseteq \mathbb{R}^N$, cioè tale che i coefficienti $F_i(x)$ sono continui in O

(equivalentemente dato il campo vettoriale continuo in O

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_N) = (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N)),$$

e data in O una curva C^1 a tratti γ di parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ ed equazioni parametriche $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, $t \in [a, b]$, si definisce l' **integrale curvilineo di ω su γ** , denotato con uno dei simboli

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} (F_1 dx_1 + \dots + F_N dx_N), \text{ come}$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt =$$

$$\int_a^b [F_1(x_1(t), \dots, x_N(t)) x_1'(t) + \dots + F_N(x_1(t), \dots, x_N(t)) x_N'(t)] dt.$$

Questi integrali curvilinei sono anche detti **integrali curvilinei di seconda specie**, e sono integrali di campi vettoriali (o forme differenziali), al contrario degli integrali curvilinei di prima specie o rispetto alla lunghezza d' arco, che sono integrali di funzioni scalari.

Si verifica facilmente che gli integrali su curve equivalenti ed equiverse sono uguali, mentre quelli su curve equivalenti e controverse sono opposti.

Inoltre se $\mathbf{F}(x)$ è un campo vettoriale continuo ($\omega(x) = F_1(x_1, \dots, x_N) dx_1 + \dots + F_N(x_1, \dots, x_N) dx_N$ è una forma continua) nell' aperto O e $\gamma =$

$\gamma_1 \cdot \gamma_2$ è una concatenazione di due curve C^1 a tratti in O vale la formula

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Infatti se γ_i ha come parametrizzazione $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2$, per definizione

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mathbf{r}_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \text{ e}$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(2t)) \cdot 2\mathbf{r}'_1(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(2t - 1)) \cdot 2\mathbf{r}'_2(2t) dt = \\ = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(s)) \cdot \mathbf{r}'_1(s) ds + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(s)) \cdot \mathbf{r}'_2(s) ds = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

La forma differenziale lineare

$$\omega(x) = F_1(x_1, \dots, x_N) dx_1 + \dots + F_N(x_1, \dots, x_N) dx_N$$

continua in un aperto connesso $O \subseteq \mathbb{R}^N$, è detta **esatta in $E \subseteq O$** (equivalentemente il campo vettoriale continuo

$$\mathbf{F}(X) = (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N))$$

è detto **conservativo in E**)

se esiste una funzione scalare $U = U(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(E)$, detta **primitiva o potenziale scalare** di ω (di \mathbf{F}), tale che

$$\nabla U(x) = \mathbf{F}(x) \text{ in } E, \text{ equivalentemente } dU(x) = \omega:$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in E, i = 1, \dots, N.$$

Se ω è esatta in E con primitiva U , e γ è una curva regolare a tratti in E (cioè con sostegno in E') di equazioni parametriche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ ed estremi $P_1 = \mathbf{r}(a)$ e $P_2 = \mathbf{r}(b)$, si ha che

$$\int_{\gamma} \omega = U(P_2) - U(P_1)$$

Infatti posto $g(t) = U(\mathbf{r}(t))$ è

$$g'(t) = \nabla U(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t), \text{ e quindi}$$

$$\int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)).$$

Quindi l' integrale curvilineo dipende solo dagli estremi di γ .

Questa è in realtà una *condizione necessaria e sufficiente di esattezza*.

Teorema 3.8. Sia $\omega(x) = F_1(x_1, \dots, x_N) dx_1 + \dots + F_N(x_1, \dots, x_N) dx_N$ una forma differenziale lineare continua in un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Le seguenti condizioni sono equivalenti

- (1) ω è esatta in E
- (2) Se γ è una curva C^1 a tratti in E chiusa, allora $\int_{\gamma} \omega = 0$.
- (3) Se γ è una curva C^1 a tratti in E allora $\int_{\gamma} \omega$ dipende solo dagli estremi di γ .

A volte si chiamano *circuiti* le curve chiuse C^1 a tratti e *circuitazioni* di una forma gli integrali della forma su circuiti.

La condizione 2) si può quindi esprimere dicendo che tutte le circuitazioni in E di ω sono nulle.

Dimostrazione. Se γ_1 e γ_2 sono curve che vanno da P a Q , allora $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ è una curva chiusa, e viceversa data una curva chiusa e

scelti due punti P e Q sul sostegno si può scrivere la curva come $\gamma_1 - \gamma_2$ come sopra.

Si ottiene quindi subito l'equivalenza di 2) e 3).

Abbiamo già visto che da 1) segue 3) mostrando anzi la formula $\int_{\gamma} \omega = U(P_2) - U(P_1)$ dove U è una primitiva della forma esatta ω .

Rimane quindi da mostrare che se la 3) è verificata allora esiste una primitiva U di ω . A questo proposito, fissato un punto di riferimento $x_0 \in E'$, definiamo $U(x) = \int_{\gamma_x} \omega$, dove γ_x è un qualsiasi arco regolare a tratti che va da x_0 a x (essendo E' connesso esistono ad esempio spezzate con lati paralleli agli assi).

La definizione è ben posta perché il valore dell'integrale non dipende dal cammino scelto.

Verifichiamo che U è una primitiva di ω , cioè $\nabla U = \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_N)$, e in particolare per fissare le idee verifichiamo ad esempio che

$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_N) = F_1(x_1, \dots, x_N)$ (analogamente per le altre coordinate).

Dobbiamo valutare la differenza $U(x + h\mathbf{e}_1) - U(x)$, e osserviamo che se γ_x è un arco regolare a tratti che va da x_0 a x , come arco regolare a tratti che va da x_0 a $x + h\mathbf{e}_1$ possiamo scegliere la concatenazione di γ_x e del segmento S parallelo all'asse x_1 che va da $x = (x_1, \dots, x_N)$ a $x + h\mathbf{e}_1 = (x_1 + h, x_2, \dots, x_N)$ (essendo per ipotesi l'integrale indipendente dal cammino scelto).

Ne segue che $U(x + h\mathbf{e}_1) - U(x) = \int_S \omega$.

Il segmento S ha parametrizzazione

$x_1 = x_1 + th, x_2 = x_2, \dots, x_N = x_N, 0 \leq t \leq 1$, e $x'_2 = \dots x'_N = 0$, mentre $x'_1(t) = h$. Calcolando si ha quindi che

$$U(x + h\mathbf{e}_1) - U(x) = h \int_0^1 F_1(x_1 + th, x_2, \dots, x_N) dt,$$

e quindi, essendo invece banalmente

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_0^1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) dt, \text{ si ha che}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{U(x + h\mathbf{e}_1) - U(x)}{h} - F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \right] =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 [F_1(x_1 + th, x_2, \dots, x_N) - F_1(x_1, x_2, \dots, x_N)] dt = 0$$

perché valgono le ipotesi che permettono di passare al limite sotto il segno di integrale (o direttamente perché

$$\left| \int_0^1 [F_1(x_1 + th, x_2, \dots, x_N) - F_1(x_1, x_2, \dots, x_N)] dt \right| \leq$$

$$\int_0^1 |F_1(x_1 + th, x_2, \dots, x_N) - F_1(x_1, x_2, \dots, x_N)| dt \leq$$

$\sup_{0 \leq t \leq 1} |F_1(x_1 + th, x_2, \dots, x_N) - F_1(x_1, x_2, \dots, x_N)| =: \alpha(h) \rightarrow 0$
se $h \rightarrow 0$ per l'uniforme continuità di F_1 . \square

Se la forma ω (il campo \mathbf{F}) è di classe C^1 , cioè $F_1, \dots, F_N \in C^1(E)$, la forma ω è detta **chiusa** in E (il campo \mathbf{F} è **irrotazionale** in E) se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \forall x \in E$ e per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Proposizione 3.1. *Se la forma ω di classe C^1 è esatta in E allora è chiusa in E :*

Dimostrazione. Infatti in tal caso se U è una primitiva in E , essa ha per gradiente una funzione di classe C^1 , quindi è di classe C^2 e per il Teorema di Schwarz è

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x). \quad \square$$

La condizione di chiusura di una forma è facile da verificare, bisogna solo calcolare delle derivate parziali, e in virtù della precedente proposizione se si verifica che una forma non è chiusa in un insieme E allora si può affermare che non è esatta.

Purtroppo in generale l'implicazione inversa è falsa, cioè esistono forme chiuse in un insieme che non sono ivi esatte.

L' **esempio** tipico è la forma $\omega = \omega(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$: è chiusa in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non è esatta in E perché ad esempio l'integrale $\int_\gamma \omega = 2\pi$ se γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario.

Vedremo tra poco che però la condizione di chiusura, facile da verificare, diventa sufficiente per l'esattezza in una classe di aperti connessi, gli aperti semplicemente connessi.

Teorema 3.9. (Esattezza delle forme chiuse in rettangoli)

Sia $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ un N -rettangolo chiuso contenuto nell'aperto E , e sia $\omega = \sum_{i=1}^N F_i(x) dx_i$ una forma differenziale di classe C^1 chiusa in E .

Allora ω è esatta in R e una primitiva di ω è la funzione

$$U(x) = U(x_1, \dots, x_N) = \left\{ \int_{a_1}^{x_1} F_1(t, a_2, \dots, a_N) dt + \int_{a_2}^{x_2} F_2(x_1, t, \dots, a_N) dt + \dots + \int_{a_{N-1}}^{x_{N-1}} F_{N-1}(x_1, x_2, \dots, t, a_N) dt \right\} + \int_{a_N}^{x_N} F_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, t) dt$$

Dimostrazione. Se $N = 1$ il teorema è vero anche se $f(x)$ è una funzione solo continua in $[a, b]$: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Supponiamo che $N \geq 2$ e che il teorema sia vero in dimensione $N-1$.

La derivata della funzione U rispetto a x_N , essendo il termine in parentesi graffa indipendente da x_N , è

$$\frac{\partial U}{\partial x_N}(x) = F_N(x_1, \dots, x_N).$$

Se invece $1 \leq j \leq N-1$ per ipotesi induttiva, applicata al campo $\mathbf{G}(x_1, \dots, x_{N-1}) = (F_1(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N), \dots, F_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N))$, la derivata del termine in parentesi rispetto a x_j è

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = F_j(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N).$$

Considerando anche l'ultimo integrale e derivando sotto il segno di integrale (sono tutte funzioni con derivata continua e sono verificate le ipotesi per poterlo fare) si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = F_j(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N) + \int_{a_N}^{x_N} \frac{\partial F_N}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, t) dt.$$

Essendo ω chiusa, è $\frac{\partial F_N}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_N}$, e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x) &= F_j(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N) + \int_{a_N}^{x_N} \frac{\partial F_j}{\partial x_N}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, t) dt = \\ &= F_j(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N) + [F_j(x_1, \dots, x_N) - F_j(x_1, \dots, x_{N-1}, a_N)] = \\ &= F_j(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Ne segue che per ogni j con $1 \leq j \leq N$ è verificata l'uguaglianza $\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = F_j(x)$. \square

Corollario 3.3. (Locale esattezza delle forme chiuse) *Ogni forma chiusa ω in un aperto E è localmente esatta in E : $\forall x \in E \exists V = V_x$ intorno di x dove ω è esatta.*

Dimostrazione. Se R è un rettangolo di centro x contenuto in E per il Teorema 3.9 ω è esatta in R . \square

Definizione 3.3. Siano γ_0, γ_1 curve chiuse regolari a tratti in un aperto connesso E di \mathbb{R}^N , di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{r}_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, rispettivamente $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$ (ogni curva è equivalente ad una curva che ha $[0, 1]$ come intervallo in cui varia il parametro).

Una **omotopia in E di curve chiuse** tra γ_0 e γ_1 è una funzione continua $h = h(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ tale che

- i) $h(0, t) = \mathbf{r}_0(t)$, $h(1, t) = \mathbf{r}_1(t)$
- ii) $h(s, 0) = h(s, 1)$

Se esiste una omotopia in E che connette γ_0 a γ_1 si dice che γ_0 e γ_1 sono **omotope in E** .

Un aperto connesso E di \mathbb{R}^N è detto **semplicemente connesso** se ogni circuito γ in E è omotopo in E ad un punto $P \in E$ (dove per punto P si intende la curva costante di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t) = P$ per ogni $t \in [0, 1]$).

Si può interpretare una omotopia come una famiglia di curve γ_s di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{r}_s(t) = h(s, t)$, $0 \leq t \leq 1$, che per la i) connettono γ_0 di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{r}_0(t) = h(0, t)$ a γ_1 di equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1(t) = h(1, t)$ con una deformazione *continua* essendo la funzione h continua, e che per la ii) sono curve chiuse, cioè $\mathbf{r}_s(0) = \mathbf{r}_s(1)$.

Per $s = 0$ e $s = 1$ le curve sono i cammini iniziale e finale, che consideriamo di solito regolari a tratti per poter definire gli integrali curvilinei su essi, ma per $0 < s < 1$ in generale la curva γ_s è solo una curva continua, chiusa per ii).

Intuitivamente un dominio semplicemente connesso è un dominio senza buchi, in cui una qualsiasi curva chiusa può deformarsi con continuità e restringersi a un punto senza uscire da E .

Teorema 3.10 (Invarianza per omotopia di integrali di forme chiuse).
 Sia E un aperto connesso di \mathbb{R}^N , e sia ω una forma di classe C^1 chiusa in E . Se γ_0 e γ_1 sono circuiti in E e essi sono omotopi in E , allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Dimostrazione. Essendo ω chiusa essa è localmente esatta: per ogni $x \in E$ esiste un intorno U_x di x , un N -rettangolo centrato in x dove ω è esatta.

Se $V_x = h^{-1}(U_x)$, per la continuità di h esso è aperto in $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, e $\{V_x\}_{x \in E}$ è un ricoprimento aperto del compatto Q .

Per il teorema 3.4 sul numero di Lebesgue, esiste $m \in \mathbb{N}^+$ tale che se dividiamo il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ in m^2 quadrati $Q_{ij} = [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, $1 \leq i, j \leq m$, di lato $\frac{1}{m}$ ognuno di essi è contenuto in qualche $V_x = h^{-1}(U_x)$, cioè l'immagine $h(R_{ij}) \subset U_x$ dove ω è esatta (e ha quindi circuitazioni nulle in U_x).

Per $1 \leq i, j \leq m$ sia C_{ij} il bordo del quadrato Q_{ij} percorso in senso antiorario, cioè la poligonale nel piano $s-t$ costituita dai segmenti che vanno da $(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m})$ a $(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{m})$, da $(\frac{i}{m}, \frac{j-1}{m})$ a $(\frac{i}{m}, \frac{j}{m})$, da $(\frac{i}{m}, \frac{j}{m})$ a $(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{m})$, e da $(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{m})$ a $(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m})$.

Sia poi γ_{ij} la poligonale che ha per vertici le immagini per $h = h(s, t)$ dei vertici di C_{ij} .²

Ad esempio γ_{11} è la poligonale che ha per lati i segmenti che vanno da $h(0, 0)$ a $h(\frac{1}{m}, 0)$, da $h(\frac{1}{m}, 0)$ a $h(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$, da $h(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ a $h(0, \frac{1}{m})$, e infine da $h(0, \frac{1}{m})$ a $h(0, 0)$.

Dato che ω è esatta in un intorno del sostegno di ciascuna curva chiusa γ_{ij} , tutte le circuitazioni $\int_{\gamma_{ij}} \omega$ sono nulle, ed è quindi nulla la loro somma.

Mostriamo che la somma di tutte le circuitazioni sulle curve γ_{ij} (che è nulla per quanto detto) vale $\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega$ ed è quindi verificato il teorema (disegnare la decomposizione e sarà tutto più chiaro nella spiegazione che segue).

Tutti i lati di ogni γ_{ij} che non sono immagini di segmenti aventi per estremi punti della frontiera del quadrato originario Q vengono percorsi due volte in senso opposto, e quindi i contributi dell'integrale si annullano sui lati intermedi.

Per quanto riguarda invece i lati di Q , le immagini dei lati orizzontali sono coppie di segmenti da $h(\frac{i-1}{m}, 0)$ a $h(\frac{i}{m}, 0)$ e da $h(\frac{i}{m}, 1)$ a $h(\frac{i-1}{m}, 1)$ e danno contributo nullo, perché ognuna delle curve $\gamma_s = h(s, \cdot)$ è una curva chiusa, quindi $h(s, 0) = h(s, 1)$, ma lungo questa poligonale il lato superiore e il lato inferiore sono percorsi in senso opposto.

²Prendiamo la poligonale che ha gli stessi vertici, e non più semplicemente l'immagine secondo h del circuito C_{ij} , per avere una curva regolare a tratti, a priori h è solo continua.

Per quanto riguarda invece le immagini dei lati verticali il segmento da $h(1, \frac{j-1}{m})$ a $h(1, \frac{j}{m})$ ha gli stessi estremi della parte della curva γ_1 che si ottiene limitando il valore del parametro a $t \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$, e quindi per l'esattezza di ω sul sostegno di questi sottointervalli, l'integrale su un tale lato di ω è uguale all'integrale di ω su γ_1 ristretta a questo intervallo. Sommando su tutti questi piccoli intervalli si ottiene $\int_{\gamma_1} \omega$.

Analogamente per l'altro lato verticale costituito dai segmenti da $h(0, \frac{j-1}{m})$ a $h(0, \frac{j}{m})$, che però vengono percorsi in senso opposto, e sommando si ottiene $-\int_{\gamma_0} \omega$. \square

Corollario 3.4. *Se E è un aperto di \mathbb{R}^N semplicemente connesso ogni forma ω di classe C^1 chiusa in E è esatta in E .*

Dimostrazione. Se γ è un circuito in E esso è omotopo in E a un punto $P \in E$, cioè a una curva costante, quindi $\int_{\gamma} \omega = \int_P \omega = 0$. Per la condizione necessaria e sufficiente di esattezza ω è esatta in E . \square

Metodi di calcolo di primitive

Data la forma differenziale $\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ di classe C^1 e chiusa in un aperto semplicemente connesso $A \subset \mathbb{R}^2$, una primitiva della forma si può trovare ad esempio con il **metodo degli integrali indefiniti**.

Illustriamolo con un **esempio**.

Cerchiamo le primitive della forma (chiusa nell'aperto semplicemente connesso $D = \mathbb{R}^2$ e quindi ivi esatta)

$$\omega(x, y) = (y + \cos(x)) dx + (x + \sin(y)) dy .$$

Si cerca dapprima una funzione $U_1(x, y)$ tale che $\frac{\partial U_1}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = y + \cos(x)$ integrando rispetto a x la funzione $P(x, y)$. Il risultato dipenderà non da una costante arbitraria, ma da una *funzione arbitraria di y* (che derivata rispetto a x darà zero) :

$$U_1(x, y) = \int (y + \cos(x)) dx = xy + \sin(x) + \alpha(y)$$

con $\alpha(y)$ funzione arbitraria di y .

Cerco poi una funzione $U_2(x, y)$ tale che $\frac{\partial U_2}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = x + \sin(y)$ integrando rispetto a y la funzione $Q(x, y)$. Il risultato dipenderà non da una costante arbitraria, ma da una *funzione arbitraria di x* (che derivata rispetto a y darà zero) :

$$U_2(x, y) = \int (x + \sin(y)) dy = xy - \cos(y) + \beta(x)$$

con $\beta(x)$ funzione arbitraria di x .

Infine cerco di trovare funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ che rendano uguali i due risultati (in pratica prendo i pezzi comuni a U_1 e U_2 una volta sola e aggiungo i restanti termini che dipendono solo da una variabile).

Nel nostro caso se $\alpha(y) = -\cos(y)$ e $\beta(x) = \sin(x)$ ottengo che $U_1 = U_2 = U(x, y) = xy + \sin(x) - \cos(y)$ è una primitiva.

Tutte le primitive hanno la forma

$U(x, y) = xy + \sin(x) - \cos(y) + c$ con c costante arbitraria.

Infatti dal Teorema sulle funzioni con derivate parziali nulle in un connesso ho che su un aperto connesso due primitive di una stessa funzione differiscono tra loro per una costante.

Lo stesso metodo si applica anche a forme in \mathbb{R}^3 o in generale \mathbb{R}^N .

Nota. Un' alternativa al metodo precedente consiste nell' integrare in dx come prima per trovare

$U(x, y) = xy + \sin(x) + \beta(y)$, funzione che ha per derivata rispetto a x la funzione $P(x, y)$; supporre poi $\beta(y)$ derivabile, e imporre poi che la derivata rispetto a y dia $Q(x, y) = x + \sin(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + \sin(x) + \beta(y)) = x + \beta'(y) = x + \sin(y).$$

Da questo si deduce che deve essere $\beta'(y) = \sin(y)$ e quindi $\beta(y) = -\cos(y) + c$

4. INTEGRALI MULTIPLI. CAMBI DI VARIABILE

4.1. Integrali doppi (e multipli) di Riemann.

Ricordiamo la definizione di integrale di Riemann di una funzione su un intervallo $I = [a, b]$. Indicheremo con $|I|$ la lunghezza di I , definita da $|I| = (b - a)$. Una partizione \mathcal{D}_1 di I è un sottoinsieme finito $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ e divide l'intervallo I in n intervalli $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ di lunghezza $|A_i| = x_i - x_{i-1}$.

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata :

$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall (x) \in I$ e siano

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) , M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) .$$

Definiamo la **somma integrale inferiore** di f sulla partizione \mathcal{D}_1

$$s_*(f; \mathcal{D}_1) = \sum_{i=1}^n m_i |A_i| = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

e la **somma integrale superiore** di f sulla partizione \mathcal{D}_1

$$s_*(f; \mathcal{D}_1) = \sum_{i=1}^n M_i |A_i| = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Se si aggiungono punti le somme inferiori crescono, mentre le somme superiori decrescono, e come conseguenza ogni somma inferiore non supera alcuna somma superiore.

L' **integrale inferiore** di f su I è definito come

$$\int_{I*} f = \sup \{s_*(f; \mathcal{D}_1) : \mathcal{D}_1 \text{ partizione di } I\} ,$$

l' **integrale superiore** di f su I è definito come

$$\int_I^* f = \inf \{S^*(f; \mathcal{D}_1) : \mathcal{D}_1 \text{ partizione di } I\} .$$

La funzione limitata f è integrabile (secondo Riemann) su R se

$$\int_{I*} f = \int_I^* f$$

In tal caso scriveremo $f \in \mathcal{R}(I)$, dove $\mathcal{R}(I) = \mathcal{R}([a, b])$ è la collezione delle **funzioni (limitate) integrabili secondo Riemann** su $[a, b]$ e il valore comune è l' **integrale di f su $[a, b]$** e si indica con

$$\int_I f = \int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Nel caso che vogliamo trattare degli integrali doppi le definizioni sono del tutto analoghe, ma il punto di partenza è un intervallo bidimensionale, cioè un rettangolo, e la lunghezza è sostituita dalla misura bidimensionale, cioè l' area.

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$ un intervallo o rettangolo chiuso nel piano. Indicheremo con $|R|$ l' area di R , definita da $|R| = (b - a)(d - c)$. Una partizione \mathcal{D} di R è il prodotto cartesiano $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ di due partizioni $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ e $\mathcal{D}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d\}$ di $[c, d]$.

Essa divide il rettangolo in $n m$ rettangoli $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ di area $|R_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

Sia $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata :

$\exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$ e siano

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y) , M_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y) .$$

Definiamo la **somma integrale inferiore** di f sulla partizione \mathcal{D}

$$s_*(f; \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} |R_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

e la **somma integrale superiore** di f sulla partizione \mathcal{D}

$$S^*(f; \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} |R_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Se si aggiungono punti le somme inferiori crescono, mentre le somme superiori decrescono, e come conseguenza ogni somma inferiore non supera alcuna somma superiore:

$$s_*(f; \mathcal{D}) \leq s_*(f; \mathcal{D} \cup \mathcal{E}) \leq S^*(f; \mathcal{D} \cup \mathcal{E}) \leq S^*(f; \mathcal{E}).$$

L' **integrale inferiore** di f su R è definito come

$$\int_{R^*} f = \sup \{s_*(f; \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ partizione di } R\},$$

l' **integrale superiore** di f su R è definito come

$$\int_R^* f = \inf \{S^*(f; \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ partizione di } R\}.$$

La funzione limitata f è integrabile (secondo Riemann) su R se

$$\int_{R^*} f = \int_R^* f$$

In tal caso scriveremo $f \in \mathcal{R}(R)$, dove $\mathcal{R}(R)$ è la collezione delle **funzioni (limitate) integrabili secondo Riemann** su R e il valore comune è l' **integrale (doppio) di f su R** e si indica con

$$\int_R f = \iint_R f = \iint_R f(x, y) dx dy$$

(si omette il doppio simbolo di integrale quando è chiaro dal contesto che si tratta di integrale doppio).

Esattamente come nel caso degli integrali in dimensione 1 si dimostrano i seguenti risultati.

Teorema 4.1.

- (1) (C.N.e S. di integrabilità) f è integrabile su R se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists$ partizione $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varepsilon : S^*(f; \mathcal{D}) - s_*(f; \mathcal{D}) < \varepsilon$
- (2) Se f è continua sul rettangolo chiuso R (è ivi uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor, quindi) f è integrabile su R .
- (3) Siano $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Allora $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(R)$ e $\int_R (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_R f + c_2 \int_R g$;
- (4) Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ allora $fg \in \mathcal{R}(R)$
- (5) Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $f \leq g$ allora $\int f \leq \int g$;
- (6) Se $f \in \mathcal{R}(R)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(R)$ e $|\int_R f| \leq \int_R |f|$, $|\int_R f| \leq |R| \sup_R |f|$;
- (7) (Teorema della media integrale) $\inf_R f \leq \frac{\int_R f}{|R|} \leq \sup_R f$, e se f è continua (essendo R connesso e compatto, per il Teorema dei valori intermedi) esiste $(x_0, y_0) \in R : f(x_0, y_0) = \frac{\int_R f}{|R|}$

Vale inoltre il

Teorema 4.2. (Formule di riduzione su rettangoli)

Sia $f = f(x, y) \in \mathcal{R}(R)$

i) Supponiamo inoltre che per ogni $y \in [c, d]$ la funzione

$x \in [a, b] \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ sia integrabile in $[a, b]$.

Allora la funzione $y \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ è integrabile in $[c, d]$ e

$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d [\int_a^b f(x, y) dx] dy$.
 ii) Supponiamo inoltre che per ogni $x \in [a, b]$ la funzione
 $y \in [c, d] \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ sia integrabile in $[c, d]$.
 Allora la funzione $x \in [a, b] \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ è integrabile in $[a, b]$ e
 $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx$.

Dimostrazione. Basta dimostrare la i), la ii) è identica scambiando il ruolo delle variabili. Indichiamo con il simbolo $||$ l'area bidimensionale, ma anche la lunghezza unidimensionale a seconda del contesto. Posto $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, tale funzione è ben posta, perché per ipotesi $x \in [a, b] \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b] \forall y \in [c, d]$.

Vogliamo dimostrare che se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ dove \mathcal{D}_1 è una partizione di $[a, b]$ e \mathcal{D}_2 è una partizione di $[c, d]$, si ha la relazione

$$s_*(f; \mathcal{D}) \leq s_*(g; \mathcal{D}_2) \leq \int_c^d g(y) dy \leq S^*(g; \mathcal{D}_2) \leq S^*(f; \mathcal{D})$$

dove le somme inferiore e superiore per g sono quelle della definizione di integrale unidimensionale.

Una volta dimostrate queste disuguaglianze, l'integrabilità di f dirà che se $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ tale che $S^*(f; \mathcal{D}) - s_*(f; \mathcal{D}) < \varepsilon$ e quindi $S^*(g; \mathcal{D}_2) - s_*(g; \mathcal{D}_2) < \varepsilon$, cioè l'integrabilità di $g(y)$ su $[c, d]$.

Inoltre essendo $s_*(f; \mathcal{D}) \leq \int_c^d g(y) dy \leq S^*(f; \mathcal{D})$ e $\iint_R f = \sup\{s_*(f; \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ partizione di } R\} = \inf\{S^*(f; \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ partizione di } R\}$ ne segue che $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d g(y) dy$.

La disuguaglianza centrale segue dalla definizione di integrale unidimensionale e basta dimostrare la disuguaglianza a destra e quella a sinistra. Dimostriamo ad esempio che

$$S^*(g; \mathcal{D}_2) \leq S^*(f; \mathcal{D})$$

la dimostrazione della relazione $s_*(f; \mathcal{D}) \leq s_*(g; \mathcal{D}_2)$ essendo analoga.

Se $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d\}$ siano $A_i = [x_{i-1}, x_i]$, $B_j = [y_{j-1}, y_j]$ gli intervalli di decomposizione di $[a, b]$ e $[c, d]$ rispettivamente. Si ha allora che

$$\begin{aligned}
 S^*(g; \mathcal{D}_2) &= \sum_{j=1}^m |B_j| \sup_{y \in B_j} g(y) = \\
 &= \sum_{j=1}^m |B_j| \sup_{y \in B_j} \int_a^b f(x, y) dx = \sum_{j=1}^m |B_j| \sup_{y \in B_j} (\sum_{i=1}^n \int_{A_i} f(x, y) dx) \leq \\
 &= \sum_{j=1}^m |B_j| \sup_{y \in B_j} (\sum_{i=1}^n |A_i| \sup_{x \in A_i} f(x, y) dx) \leq \\
 &= (\text{essendo } \sup \sum g_k \leq \sum \sup g_k \dots) \\
 &= \sum_{j=1}^m |B_j| (\sum_{i=1}^n |A_i| \sup_{y \in B_j} \sup_{x \in A_i} f(x, y)) = \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |A_i \times B_j| \sup_{(x, y) \in A_i \times B_j} f(x, y) \\
 &= S^*(f; \mathcal{D}) \quad \square
 \end{aligned}$$

Corollario 4.1. Se $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora (essa è integrabile e) valgono le formule

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Dimostrazione. In questo caso f è continua, dunque integrabile sul rettangolo, e le funzioni $x \in [a, b] \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ e $y \in [c, d] \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ sono continue, dunque integrabili in una dimensione. \square

Definizione 4.1. Un insieme limitato N ha **misura (bidimensionale) nulla (secondo Peano-Jordan)** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di N con rettangoli la cui somma delle aree è più piccola di ε : $\forall \varepsilon > 0$ esiste una collezione *finita* di rettangoli Q_1, \dots, Q_m tale che $N \subseteq \cup_{i=1}^m Q_i$, $\sum_{i=1}^m |Q_i| < \varepsilon$.

Si osserva facilmente che nella definizione si possono prendere i rettangoli chiusi, o aperti. Infatti se N è ricoperto dai rettangoli R_i con $\sum_{i=1}^m |R_i| < \varepsilon$ e R'_i è il rettangolo aperto con lo stesso centro e lato doppio, si ha che N è ricoperto dai rettangoli chiusi \overline{R}_i e dai rettangoli aperti R'_i , con $\sum_{i=1}^m |\overline{R}_i| < \varepsilon$, $\sum_{i=1}^m |R'_i| < 4\varepsilon$.

Inoltre si possono sostituire i rettangoli con quadrati, la definizione non cambia.

Ad esempio punti, segmenti, spezzate poligonali nel piano hanno misura nulla. Inoltre vale il

Proposizione 4.1. Se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è (limitata e) integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ allora il grafico $\text{graf}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = g(x)\}$ ha misura nulla.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Essendo g integrabile esiste una suddivisione $\mathcal{D} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b\}$ di $[a, b]$ tale che posto $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$, si ha che $S^*(f; \mathcal{D}) - s_*(f; \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$.

Posto $Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$ si ha che $\text{graf}(g) \subseteq \cup_{i=1}^m Q_i$ e $\sum_{i=1}^m |Q_i| = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. \square

Lemma 4.1. Sia N un insieme di misura nulla

- (1) Se $M \subseteq N$ allora M ha misura nulla.
- (2) L' unione (e l' intersezione) di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.
- (3) $N \subseteq \partial N$ (cioè $\text{int}(N) = \emptyset$) e ∂N ha misura nulla.

Dimostrazione. 1) e 2) seguono facilmente dalla definizione.

Per quanto riguarda 3), se N avesse punti interni conterrebbe un rettangolo R_0 di area positiva $a > 0$, e per ogni ricoprimento di N con rettangoli, la somma delle aree di quelli che intersecano R_0 sarebbe non inferiore ad a . Quindi $N \subseteq \partial N$ e $\overline{N} = \partial N$. Se $\varepsilon > 0$ esiste ricoprimento di N con rettangoli chiusi R_1, \dots, R_m tale che $\sum_k |R_k| < \varepsilon$,

e $\overline{N} = \partial N \subseteq \cup_{i=1}^m \overline{R_i} = \cup_{i=1}^m R_i$: tale famiglia ricopre anche $\overline{N} = \partial N$. \square

Per integrali di funzioni di una variabile sappiamo che una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$, continua tranne che in un numero finito di punti, è integrabile. I punti hanno misura unidimensionale nulla. In due dimensioni vale il

Teorema 4.3. *Sia $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, continua in $R \setminus N$, dove N è un insieme di misura bidimensionale nulla. Allora f è integrabile secondo Riemann in R .*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Dato che N , e quindi $\overline{N} = \partial N$ ha misura nulla, esistono rettangoli aperti R'_1, \dots, R'_m con $\sum_{i=1}^m |R'_i| < \varepsilon$ e tali che il compatto \overline{N} è contenuto nell'aperto $O = \cup_{i=1}^m R'_i$ e quindi $N \cap \partial O = \emptyset$. Nel compatto $R \setminus O$ la funzione f è uniformemente continua ed esiste quindi $\delta > 0$ tale che se $\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} < \delta$ allora $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$.

Completando i rettangoli R'_i con altri rettangoli R''_j di diametro $< \delta$ in modo da ricoprire $R = [a, b] \times [c, d]$ si ottiene una partizione \mathcal{D} in rettangoli R_k tale che posto $m_k = \inf_{R_k} f$, $M_k = \sup_{R_k} f$, si ha $S^*(f; \mathcal{D}) - s_*(f; \mathcal{D}) = \sum_k (M_k - m_k) |R_k| = \sum_i (M_i - m_i) |R'_i| + \sum_j (M_j - m_j) |R''_j| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon |R|$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e il criterio necessario e sufficiente di integrabilità f è integrabile. \square

Ricordiamo che il supporto di una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$, è la chiusura dell'insieme dove f non è nulla.

Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata e a supporto compatto, l'integrabilità di f e l'integrale di f (su \mathbb{R}^2) sono definiti come l'integrabilità e l'integrale di f su un rettangolo R che contiene il supporto di f .

L'**integrale (su \mathbb{R}^2) di f limitata a supporto compatto** integrabile è quindi definito da

$$\int f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_R f(x, y) dx dy.$$

Si vede facilmente che la definizione non dipende dal rettangolo scelto.

In particolare una funzione continua a supporto compatto $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, e valgono le **formule di riduzione per funzioni continue a supporto compatto**:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

se $\text{supp}(f) \subseteq [a, b] \times [c, d]$.

Definizione 4.2. Sia S un insieme limitato del piano, e $f : S' \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su S e limitata su S .

Si definisce l' **integrabilità e l' integrale di f su S** come l' integrabilità e l' integrale della funzione limitata a supporto compatto definita in \mathbb{R}^2 da

$$f_S(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in S \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S \end{cases}$$

Quindi f è integrabile su S se f_S è integrabile su un rettangolo R contenente S (la definizione non dipende dal rettangolo scelto), e in tal caso

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_R f_S(x, y) dx dy .$$

Indicheremo con $\mathcal{R}(S)$ la collezione delle funzioni limitate integrabili secondo Riemann in S .

La funzione caratteristica di un insieme S è definita da

$$\chi_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in S \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S \end{cases}$$

Se f è definita su tutto \mathbb{R}^2 , allora

$$f_S(x, y) = f(x, y) \chi_S(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$

la funzione f_S coincide su \mathbb{R}^2 con la funzione $f \chi_S$.

Useremo a volte impropriamente la stessa notazione, $f \chi_S$, al posto di f_S (a rigore se f è definita su $S' \supseteq S$ e $S' \neq \mathbb{R}^2$, la funzione $f \chi_S$ è definita solo su S' , ma si intende che è nulla su $\mathbb{R}^2 \setminus S$).

Definizione 4.3. Un insieme limitato S è **misurabile (secondo Peano-Jordan)** se la funzione 1 è integrabile su S , cioè se $\chi_S(x, y)$, funzione caratteristica di S , è integrabile (su \mathbb{R}^2 , cioè su qualunque rettangolo R che contiene S).

In tal caso la **misura (2-dimensionale di Peano-Jordan) di S** è definita da

$$m_2(S) = \int_S 1 dx dy = \int \chi_S(x, y) dx dy.$$

Teorema 4.4. (1) *Un insieme limitato A è misurabile se e solo se la frontiera ∂A ha misura nulla.*

(2) *Un insieme limitato N ha misura nulla se e solo se è misurabile e $m_2(N) = 0$*

Dimostrazione. (1) Se la frontiera di A ha misura nulla, la funzione caratteristica χ_A , considerata su un rettangolo chiuso che contiene A , è discontinua su un insieme di misura nulla, esattamente sulla frontiera di A , quindi è integrabile per il precedente criterio sufficiente di integrabilità su rettangoli.

Se la frontiera di A non ha misura nulla, esiste $a > 0$ tale che per ogni collezione di rettangoli che ricoprono ∂A , la somma delle aree è maggiore di a .

Per ogni rettangolo aperto R'_k che interseca ∂A si ha che $M'_k = \sup_{R'_k} \chi(A) = 1$, $m'_k = \inf_{R'_k} \chi(A) = 0$.

Ricoprendo ∂A con una collezione $\{R'_k\}_{k=1}^m$ di rettangoli aperti si ha allora che $\sum_k (M_k - m_k) |R'_k| \geq a$.

Se R è un rettangolo chiuso che contiene A ed è data la partizione \mathcal{D} di R , possiamo raffinarla aggiungendo l'intersezione di R con i rettangoli $\overline{R'_k}$ e ottenendo una partizione \mathcal{D}' , per la quale $S^*(\chi(A); \mathcal{D}) - s_*(\chi(A); \mathcal{D}) \geq S^*(\chi(A); \mathcal{D}') - s_*(\chi(A); \mathcal{D}')$.

Si ha allora che la differenza $S^*(\chi(A); \mathcal{D}) - s_*(\chi(A); \mathcal{D}) \geq \sum_k (M_k - m_k) |R'_k| = \sum_k |R'_k| \geq a$.

Per il criterio necessario e sufficiente di integrabilità χ_A non è integrabile su un rettangolo chiuso R che contiene A , cioè A non è misurabile secondo Peano-Jordan.

- (2) Se N ha misura nulla sappiamo che $\text{int}(N) = \emptyset$ e ∂N ha misura nulla. Ne segue per quanto appena visto che N è misurabile. Inoltre $m_2(N) = \int_N 1 dx dy = \int_R \chi_N(x, y) dx dy$ (dove R è un rettangolo che contiene N) = 0: se ci fosse una somma inferiore positiva ci sarebbe un rettangolo R_k con interno non vuoto dove $\inf_{R_k} \chi_N > 0$, cioè (essendo $\inf_{R_k} \chi_N > 0$ se e solo se $\inf_{R_k} \chi_N = 1$ e $R_k \subseteq N$) si avrebbe $\text{int}(N) \neq \emptyset$.

Viceversa se N è misurabile e $m_2(N) = \int \chi_N = 0$, allora per la 1) la frontiera di N ha misura nulla, e inoltre si ha che $\text{int}(N) = \emptyset$ (altrimenti ragionando come prima una somma inferiore di χ_N su un rettangolo $R \supseteq N$ sarebbe positiva e l'integrale non sarebbe nullo).

Ne segue che $N \subseteq \partial N$ ha misura nulla. □

Corollario 4.2. *Sia S un insieme limitato e $f : S' \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se S è misurabile e f è continua su S allora f è integrabile su S .*

Dimostrazione. Se f_S è l'estensione banale di f a \mathbb{R}^N (ottenuta ponendo $f(x) = 0$ se $x \notin S$), e R è un rettangolo che contiene S , la funzione f_S è limitata e ha come insieme di discontinuità la frontiera di S , che ha misura nulla essendo S misurabile, dunque è integrabile. □

Teorema 4.5. *(Alcune proprietà degli insiemi misurabili; additività rispetto al dominio di integrazione)*

- (1) *Unioni e intersezioni finite di insiemi misurabili sono misurabili*
- (2) *Se A e B sono insiemi limitati misurabili allora $A \setminus B$ è misurabile*
- (3) *Se S è limitato, $f \in \mathcal{R}(S)$, e $S_1 \subseteq S$ è misurabile, allora $f \in \mathcal{R}(S_1)$*
- (4) *Se S_1, S_2 sono insiemi limitati, $S_1 \cap S_2$ (è misurabile e) ha misura nulla, e $f \in \mathcal{R}(S_1) \cap \mathcal{R}(S_2)$, allora $f \in \mathcal{R}(S_1 \cup S_2)$ e $\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f$. Viceversa*

- (5) Se $f \in \mathcal{R}(S_1 \cup S_2)$ e S_1, S_2 sono misurabili con $m_2(S_1 \cap S_2) = 0$, allora $f \in \mathcal{R}(S_1) \cap \mathcal{R}(S_2)$ e $\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f$

Dimostrazione. (1) Se A_1, \dots, A_m sono insiemi misurabili, ognuno di essi ha la frontiera di misura nulla; inoltre

$$\partial(\cap_{i=1}^m A_i) \subseteq (\cup_{i=1}^m \partial A_i), \quad \partial(\cup_{i=1}^m A_i) \subseteq (\cup_{i=1}^m \partial A_i)$$

e l' unione finita di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

- (2) Dato che $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ e $A \cap B$ è misurabile possiamo supporre che $B \subseteq A$. per ipotesi χ_A e χ_B sono integrabili, quindi lo è anche $\chi_A - \chi_B = \chi_{A \setminus B}$
- (3) Per ipotesi sono integrabili $f\chi_S$ e χ_{S_1} , quindi è integrabile il loro prodotto $f\chi_S\chi_{S_1} = f\chi_{S_1}$
- (4) $f\chi_{S_1 \cup S_2} = f\chi_{S_1} + f\chi_{S_2} - f\chi_{S_1 \cap S_2}$ dove le tre funzioni a secondo membro sono integrabili e $\int_{S_1 \cap S_2} f = 0$ poichè $S_1 \cap S_2$ ha misura nulla ($|\int_{S_1 \cap S_2} f| \leq \sup |f| |S_1 \cap S_2|$).
- (5) L' integrabilità di $f\chi_{S_i}$, $i = 1, 2$, segue da 3) e allora 4) dà la formula di addizione rispetto al domino di integrazione. \square

Un caso particolare di insiemi misurabili è il caso degli **insiemi semplici rispetto a un asse**.

Un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è detto semplice (o normale) rispetto all' asse y se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e due funzioni continue $g_1, g_2 \in C([a, b])$ con $g_1(x) \leq g_2(x) \forall x \in [a, b]$ tali che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

(scriveremo in breve $[a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)]$).

La frontiera dell' insieme può essere divisa in tal caso in (al più) quattro pezzi: due segmenti verticali

$$S_a = [x = a; g_1(a) \leq y \leq g_2(a)],$$

$$S_b = [x = b; g_1(b) \leq y \leq g_2(b)]$$

(che eventualmente si riducono a un punto se $g_1(a) = g_2(a)$ o $g_1(b) = g_2(b)$) e tali segmenti hanno misura nulla,

nel grafico della funzione continua $y = g_1(x)$, $x \in [a, b]$,

e nel grafico della funzione continua $y = g_2(x)$, $x \in [a, b]$,

e tali grafici hanno misura nulla.

Ne segue che un tale insieme è misurabile.

Usando le formule di riduzione su un rettangolo $R \supseteq \Omega$ (ad esempio il rettangolo $R = [a, b] \times [m, M]$, dove $m = \min_{[a, b]} g_1$, $M = \max_{[a, b]} g_2$) e osservando che se $x \in [a, b]$ è fissato la funzione $f\chi_\Omega(x, y)$ vale $f(x, y)$ se $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, mentre è nulla se $y < g_1(x)$ oppure $y > g_2(x)$, si ottengono le **formule di riduzione per domini semplici rispetto all' asse y** :

$$\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

che scriveremo a volte anche nella forma $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$.

Cambiando il ruolo di x e y si ottengono i domini Ω semplici (o normali) rispetto all'asse x , definiti da $[c \leq y \leq d; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)]$, con g_1 e g_2 funzioni continue su $[c, d]$.

In questo caso i segmenti orizzontali (eventuali) sostituiscono i segmenti verticali, e valgono le **formule di riduzione per domini semplici rispetto all'asse x** :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

che scriveremo a volte anche nella forma $\int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$.

Un dominio può essere semplice rispetto ad entrambi gli assi (in tal caso i segmenti verticali rispettivamente orizzontali della frontiera in generale si riducono a un punto). Ad esempio l'interno del cerchio di raggio 1 e centro l'origine, cioè $D = [x^2 + y^2 \leq 1]$ si può scrivere come $[-1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}]$ ma anche come $[-1 \leq y \leq 1; -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}]$.

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

Vogliamo ora dimostrare un risultato che mette in relazione un integrale doppio su un dominio limitato da una curva regolare a tratti e un integrale curvilineo sulla curva che forma la frontiera del dominio.

È un caso particolare di vari teoremi (Teorema della divergenza, Teorema di Stokes) che saranno studiati in seguito in ogni dimensione e con maggiore generalità, per questo daremo una dimostrazione che vale solo in casi particolari, anche se comuni.

Chiameremo **circuito nel piano** una curva regolare a tratti in \mathbb{R}^2 , semplice, chiusa, percorsa una volta in senso antiorario.

Teorema 4.6. (Formula di Green nel piano)

Sia R un aperto connesso in \mathbb{R}^2 , avente per bordo il sostegno di un circuito γ . Siano poi $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\bar{R})$, $\bar{R} = R \cup \gamma$.

Vale allora la seguente uguaglianza

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dimostrazione. Dimosteremo il teorema nel caso in cui R sia un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi, e più precisamente dimosteremo che

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = \iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

se R è un dominio semplice rispetto all'asse y , mentre

$$\int_{\gamma} Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

se R è un dominio semplice rispetto all'asse x .

Sommando membro a membro si ottiene la formula di Green.

Dimostriamo in particolare la prima uguaglianza, la dimostrazione della seconda è del tutto analoga (farla per esercizio).

Consideriamo dunque un dominio semplice rispetto all'asse y :
 $R = [a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)]$, dove $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

La frontiera dell'insieme può essere divisa in tal caso in (al più) quattro pezzi: due segmenti verticali (eventualmente si riducono a un punto se $g_1(a) = g_2(a)$ o $g_1(b) = g_2(b)$) $S_a = [x = a; g_1(a) \leq y \leq g_2(a)]$ e $S_b = [x = b; g_1(b) \leq y \leq g_2(b)]$, dove essendo x costante è $dx = 0$, e quindi $\int_{S_a} P dx = \int_{S_b} P dx = 0$,

nel grafico della funzione continua $y = g_1(x)$, $x \in [a, b]$, che ha equazioni parametriche $x = t$, $y = g_1(t)$, e dove $dx = dt$, e nella curva opposta al grafico della funzione continua $y = g_2(x)$, $x \in [a, b]$, che ha equazioni parametriche $x = t$, $y = g_2(t)$, e dove $dx = dt$.

Ne segue che $\int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))] dt =$ (la variabile t è muta) $= - \int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x)) dx =$
 $- \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (\frac{\partial P}{\partial y})(x, y) dy =$ (per le formule di riduzione su domini semplici rispetto all'asse y) $= - \iint_R (\frac{\partial P}{\partial y})(x, y) dx dy \quad \square$

Il Teorema può essere applicato per calcolare un integrale curvilineo tramite un integrale doppio, o viceversa.

In particolare, scegliendo funzioni P, Q tali che $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$, si ottiene nell'integrale doppio l'area di R .

Alcune possibili scelte sono $P = 0$, $Q(x, y) = x$, $Q = 0$, $P(x, y) = -y$, oppure $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$, e la corrispondente

Formula di Green per l'area della regione R racchiusa dal sostegno del circuito γ :

$$\text{Area}(R) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} [x dy - y dx]$$

Se γ è una curva regolare a tratti nel piano, di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, tranne che in un numero finito di punti è definito il vettore tangente $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}(x'(t), y'(t))$.

Ruotando di $-\frac{\pi}{2}$ tale vettore si ottiene il **vettore normale esterno** $\mathbf{N}_e(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}(y'(t), -x'(t))$.

Il nome deriva dal fatto che se γ è la frontiera di un dominio R e la curva è percorsa in senso antiorario, tale vettore punta verso l'esterno del dominio R .

Si noti che un integrale curvilineo di seconda specie su una curva regolare a tratti, in cui (tranne che in un numero finito di punti) è definito il vettore tangente, si può scrivere, se $\mathbf{F} = (P, Q)$ e γ ha equazione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, come integrale curvilineo di prima specie:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds$$

Infatti $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$.

Inoltre $\int (P, Q) \cdot \mathbf{T} ds = \int (Q, -P) \cdot \mathbf{N} ds$. Possiamo quindi scrivere la formula di Green in modo diverso, cioè $\int (Q, -P) \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy$, ovvero se chiamiamo $\mathbf{G} = (G_1, G_2) = (Q, -P)$, come

$$\int \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R (\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y}) dx dy.$$

Dato il campo vettoriale di classe C^1 $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$, si chiama **divergenza** del campo la funzione scalare continua

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x, y) = \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y),$$

e possiamo enunciare quanto ottenuto come

Teorema 4.7. (Teorema della divergenza nel piano)

Sia R un aperto connesso in \mathbb{R}^2 , avente per bordo il sostegno di un circuito γ . Sia poi $\mathbf{G} \in C^1(\overline{R}, \mathbb{R}^2)$, $\overline{R} = R \cup \gamma$.

Vale allora la seguente uguaglianza

$$\int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}_e ds = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{G}) dx dy$$

Osservazione 4.1. Nella dimostrazione della formula di Green abbiamo ottenuto separatamente due relazioni, che insieme, sommando membro a membro, danno il teorema della divergenza, e tradotte, se $\mathbf{N}_e = (N_x, N_y)$, si possono scrivere per una singola funzione *scalare* $f \in C^1(\overline{R})$ come

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\gamma} f N_x ds$$

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\gamma} f N_y ds$$

Queste relazioni si possono considerare un **teorema fondamentale del calcolo in \mathbb{R}^2** .

Se si scrivono tali formule per il prodotto $f = gh$ di due funzioni $g, h \in C^1(\overline{R})$ si ottengono le **formule di integrazione per parti in \mathbb{R}^2** :

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial x} h dx dy = \int_{\gamma} g h N_x ds - \iint_R g \frac{\partial h}{\partial x} dx dy$$

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial y} h dx dy = \int_{\gamma} g h N_y ds - \iint_R g \frac{\partial h}{\partial y} dx dy$$

Nel caso di regioni limitate da due curve vale la seguente generalizzazione della formula di Green.

Teorema 4.8. Siano R_1, R_2 aperti connessi in \mathbb{R}^2 , aventi per bordo i sostegni di due circuiti γ_1, γ_2 , con $\overline{R_1} \subset R_2$, e siano $P, Q \in C^1(\overline{R_2} \setminus R_1)$.

Si ha allora che

$$\iint_{R_1 \setminus R_2} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx dy = \int_{\gamma_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] - \int_{\gamma_1} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$$

dove i circuiti si intendono percorsi in senso antiorario.

Dimostrazione. (Per fissare le idee della dimostrazione esplicitiamo come esempio il caso di γ_1 circonferenza di centro l'origine e raggio 1, γ_2 circonferenza di centro l'origine e raggio 2).

Fissati due punti P_1 $((1, 0))$ e Q_1 $((-1, 0))$, su γ_1 e due punti P_2 $((2, 0))$ e Q_2 $((-2, 0))$, su γ_2 , consideriamo i circuiti Γ_1, Γ_2 (percorsi in senso antiorario) così composti.

Γ_1 è la concatenazione del segmento da P_1 a P_2 , della parte di γ_2 che va da P_2 a Q_2 , del segmento da Q_2 a Q_1 , dell' opposta della parte di γ_1 che va da P_1 a Q_1 .

Γ_2 è la concatenazione della parte di γ_2 che va da Q_2 a P_2 , del segmento da P_2 a P_1 , dell' opposta della parte di γ_1 che va da Q_1 a P_1 e del segmento da Q_1 a Q_2 .

Osserviamo che percorrendo Γ_1 e Γ_2 globalmente vengono percorse le curve γ_2 e $-\gamma_1$, oltre a segmenti aggiuntivi, che però vengono percorsi in senso opposto nei due circuiti e quindi i rispettivi contributi si cancellano.

Per la formula di Green rispetto ai due circuiti Γ_1, Γ_2 e agli aperti A_1, A_2 che essi delimitano, essendo i segmenti aggiuntivi di misura nulla rispetto agli integrali doppi, si ha che

$$\begin{aligned} \iint_{R_1 \setminus R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{A_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{A_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\Gamma_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] + \int_{\Gamma_1} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \\ &= \int_{\gamma_2} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] - \int_{\gamma_1} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad \square \end{aligned}$$

Analogamente si prova il

Teorema 4.9. *Siano R_0, R_1, \dots, R_m aperti connessi in \mathbb{R}^2 , aventi per bordo i sostegni di circuiti $\gamma_0, \dots, \gamma_m$, con $\overline{R_i} \subset R_0$, $i = 1, \dots, m$, e siano $P, Q \in C^1(\overline{R_0} \setminus \cup_{i=1}^m R_i)$. Si ha allora che*

$$\begin{aligned} \iint_{R_0 \setminus \cup_{i=1}^m R_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \\ \int_{\gamma_0} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] - \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \end{aligned}$$

dove i circuiti si intendono percorsi in senso antiorario.

Integrali doppi impropri

Definizione 4.4. Un insieme (eventualmente non limitato) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è **misurabile (secondo Peano-Jordan)** se per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ l' intersezione $\Omega \cap R$ è misurabile. In tal caso la **misura** (bidimensionale, finita o infinita) di Ω è definita come

$$m_2(\Omega) = |\Omega| = \sup\{|\Omega \cap R| : R \text{ rettangolo}\}$$

Se l' insieme Ω è limitato la definizione coincide con la precedente (perché esiste un rettangolo R tale che $\Omega \subset R$ e l' intersezione di insiemi misurabili è misurabile), e valgono le proprietà già note per gli insiemi limitati.

Sia $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di rettangoli che invade il piano, cioè tale che $R_n \subset R_{n+1}$, $\cup_n R_n = \mathbb{R}^2$, ad esempio $R_n = [-n, n] \times [-n, n]$. Se $K \subset \mathbb{R}^2$ è un compatto, esso è contenuto in R_n definitivamente, cioè esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq R_n$ per ogni $n \geq m$. Infatti essendo K compatto $\subset \cup_{n \in \mathbb{N}} R_n = \mathbb{R}^2$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset \cup_{n=1}^m R_n = R_m$.

Si ottiene allora facilmente il seguente

Proposizione 4.2. *Se Ω è misurabile e R_n è una successione di rettangoli che invadono il piano, la sua misura è data*

$$m_2(\Omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\Omega \cap R_n|.$$

Dimostrazione. La successione crescente $|\Omega \cap R_n|$ ha un limite

$$L = \sup_n |\Omega \cap R_n| \leq |\Omega| = \sup\{|\Omega \cap R| : R \text{ rettangolo}\} = m_2(\Omega).$$

finito o infinito. Se $\sup\{|\Omega \cap R| : R \text{ rettangolo}\} = m_2(\Omega)$ è finito e $\varepsilon > 0$, esiste un rettangolo $R = R_\varepsilon$ tale che $m_2(\Omega) - \varepsilon < |\Omega \cap R|$, ed essendo definitivamente $R \subset R_n$ si ha che $m_2(\Omega) - \varepsilon < |\Omega \cap R| \leq L$.

In modo analogo si vede che se $\sup\{|\Omega \cap R| : R \text{ rettangolo}\} = m_2(\Omega) = +\infty$ anche $L = +\infty$. \square

Per gli integrali doppi impropri, limitiamoci al caso di funzioni continue (eventualmente non limitate e su insiemi misurabili eventualmente non limitati).

Definizione 4.5. Sia Ω un insieme misurabile (eventualmente non limitato) e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione continua non negativa (eventualmente non limitata).

Posto $\mathcal{K} = \{K \text{ compatto misurabile } \subset \Omega\}$, definiamo

$$\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \sup_{K \in \mathcal{K}} \iint_K f(x, y) \, dx dy$$

Diremo che f è integrabile su Ω se l' integrale precedente è finito.

Valgono allora i teoremi di confronto noti per gli integrali impropri di funzioni non negative di una variabile.

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua diremo che è **assolutamente integrabile** su Ω se la funzione $|f|$ è integrabile su Ω .

In tal caso, definite la parte positiva $f^+(x, y) = \max\{f(x, y); 0\}$ e la parte negativa $f^-(x, y) = -\min\{f(x, y); 0\}$, si ha che $f^\pm \leq |f|$ sono integrabili, e l' integrale su Ω di f è definito come

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} f^+(x, y) \, dx dy - \iint_{\Omega} f^-(x, y) \, dx dy$$

Si noti che limitiamo la definizione di integrabilità alle funzioni assolutamente integrabili. Valgono per gli integrali impropri le proprietà basilari degli integrali (ma attenzione, il prodotto di due funzioni assolutamente integrabili può non essere integrabile).

Sia Ω un aperto e sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di compatti misurabili che invade Ω , cioè tale che $K_n \subset \Omega$, $K_n \subset K_{n+1}$, $\cup_n K_n = \Omega$. Ad esempio si può considerare $K_n = \{(x, y) \in \Omega : \|(x, y)\| \leq n; \text{dist}((x, y); \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$.

Come per la misurabilità si verifica che se $K \subset \Omega$ è un compatto, esso è contenuto in K_n definitivamente, e vale la

Proposizione 4.3. (*Metodo di integrazione impropria assoluta*) Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di compatti misurabili che invadono l' aperto Ω , cioè tale che $K_n \subset \Omega$, $K_n \subset K_{n+1}$, $\cup_n K_n = \Omega$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua non negativa, o assolutamente integrabile, si ha che

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{K_n} f(x, y) \, dx dy .$$

In particolare il limite non dipende dalla successione di compatti misurabili che invadono Ω scelta.

Ad esempio si può vedere usando le coordinate polari che la funzione $\frac{1}{\|(x,y)\|^\alpha} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ è integrabile su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B_1((0,0))$ se e solo se $\alpha > 2$, mentre è integrabile su $\Omega = B_1((0,0))$ se e solo se $\alpha < 2$.

INTEGRALI MULTIPLI

Tutto quello che precede si generalizza al caso di integrali tripli in \mathbb{R}^3 e in generale per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ al caso di integrali multipli.

L' unica differenza è la misura, che ora è la misura N -dimensionale.

Se $R = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^N, b^N]$ è un N -intervallo o N -rettangolo (scriviamo in alto gli indici delle componenti di un vettore), la sua misura N -dimensionale è

$|R| = m_N(R) = \text{mis}(R) = (b^1 - a^1) \dots (b^N - a^N)$, prodotto delle lunghezze dei lati di R .

Il punto di partenza è sempre la definizione delle somme superiori e inferiori di una funzione limitata f definita su un N -intervallo R .

Una decomposizione \mathcal{D} di R si ottiene come prodotto di N decomposizioni $\mathcal{D}_1 = \{x_0^1 = a^1 < x_1^1 < \dots, x_{m_1}^1 = b^1\}$, \dots , $\mathcal{D}_N = \{x_0^N = a^N < x_1^N < \dots, x_{m_N}^N = b^N\}$ e decompone R in $m_1 \dots m_N$ N -rettangoli $R_{i_1 \dots i_N} = [a_{i_1-1}, a_{i_1}] \times \dots \times [a_{i_N-1}, a_{i_N}]$, $i_1 \in \{1, \dots, m_1\}$, \dots , $i_N \in \{1, \dots, m_N\}$.

Se $m_{i_1 \dots i_N} = \inf_{R_{i_1 \dots i_N}} f$, $M_{i_1 \dots i_N} = \sup_{R_{i_1 \dots i_N}} f$, si definiscono la **somma integrale inferiore** di f sulla partizione \mathcal{D}

$$s_*(f; \mathcal{D}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_N=1}^{m_N} m_{i_1 \dots i_N} |R_{i_1 \dots i_N}|$$

e la **somma integrale superiore** di f sulla partizione \mathcal{D}

$$S^*(f; \mathcal{D}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_N=1}^{m_N} M_{i_1 \dots i_N} |R_{i_1 \dots i_N}|.$$

La definizione di *integrabilità e l' integrale*

$$\int_R f(x) dx = \iint \dots \int_R f(x) dx = \int_R f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

di una funzione limitata su un N -rettangolo R sono analoghe, e una *condizione sufficiente di integrabilità* è data dal fatto che l' insieme S dei punti di discontinuità di f ha **misura nulla (N -dimensionale, secondo Peano-Jordan)**: $\forall \varepsilon > 0$ esiste una collezione finita di N -rettangoli (equivalentemente N -cubi, si può chiedere che siano chiusi, o che siano aperti, la definizione di insieme di misura nulla non cambia) R_1, \dots, R_m tali che $S \subset \cup_{k=1}^m R_k$, e la somma dei volumi di questi rettangoli non supera ε .

Nota. Più in generale un insieme T è detto avere *misura nulla (secondo Lebesgue)* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una collezione numerabile di N -rettangoli (equivalentemente N -cubi) R_1, \dots, R_m, \dots tali che $\partial S \subset \cup_k R_k$, e la somma della serie dei volumi di questi rettangoli non supera ε . Con questa nozione si può dimostrare che una funzione è integrabile (secondo Riemann) su un rettangolo se e solo se l' insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla (secondo Lebesgue) (Teorema di Vitali-Lebesgue).

Valgono poi le **formule di riduzione su N -rettangoli**: se R è un N -rettangolo chiuso e f è continua su R allora (f è integrabile e) l' integrale di f si può calcolare come integrale iterato: se $R = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^N, b^N]$ vale la formula

$$\int_R f(x) dx = \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \cdots \int_{a^N}^{b^N} f(x^1, \dots, x^N) dx^N$$

e lo stesso valore si ottiene calcolando gli integrali con un ordine diverso delle variabili.

Lo stesso teorema vale anche per funzioni limitate integrabili (non necessariamente continue), ma bisogna aggiungere ipotesi di integrabilità parziale (ricordiamo che se $N = 2$ affinché valga la formula

$$\int_R f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

è necessario supporre non solo l' integrabilità di f come funzione di due variabili, ma anche l' integrabilità della funzione $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ per ogni x_1 fissato, mentre l' integrabilità rispetto a x_1 della funzione $\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$ è parte della dimostrazione. Nel caso di una funzione continua tutto questo è facilmente verificato).

Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata e a supporto compatto e R è un rettangolo che contiene il supporto di f , l' integrabilità di f e l' integrale di f (su \mathbb{R}^N) sono definiti come l' integrabilità e l' integrale di f su un rettangolo R che contiene il supporto di f ; l' integrale (su \mathbb{R}^N) di f limitata a supporto compatto integrabile è quindi definito da $\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_R f(x) dx$.

La definizione non dipende dal rettangolo scelto.

In particolare una funzione continua a supporto compatto $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, e valgono le *formule di riduzione per funzioni continue a supporto compatto*:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_N$$

e lo stesso valore si ottiene calcolando gli integrali con un ordine diverso delle variabili.

Se S è un insieme limitato e $f : S' \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$, è una funzione definita in S e limitata su S , si definisce l' *integrabilità e l' integrale di f su S* come l' integrabilità e l' integrale della funzione limitata a supporto compatto definita in \mathbb{R}^N da

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Quindi f è integrabile su S se f_S è integrabile su un rettangolo R contenente S , e in tal caso $\int_S f(x) dx = \int_R f_S(x) dx$

Un insieme limitato S è detto insieme *misurabile (secondo Peano-Jordan)* se la funzione 1 è integrabile su S , cioè se la funzione caratteristica di S è integrabile, e la misura (N -dimensionale di Peano-Jordan) di S è in tal caso l' integrale $\int_S 1 dx = \int \chi_S(x) dx$. Ciò accade se e solo se la frontiera ∂S di S ha misura nulla (secondo Peano-Jordan).

A sua volta questo equivale al fatto che ∂S è misurabile e la sua misura è zero.

Se S è un insieme limitato misurabile e $f : S' \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata su S , allora f è integrabile su S (la funzione f_S ha un insieme di punti di discontinuità che ha misura nulla secondo P.J. essendo contenuto nella frontiera di S).

4.2. Partizioni dell' unità. Descriviamo ora la tecnica delle "partizioni dell' unità", utilizzata per localizzare oggetti definiti globalmente su insiemi di \mathbb{R}^N e viceversa per rimettere insieme quantità o proprietà locali.

Lemma 4.2. [Alcune funzioni di classe C^∞]

- i) La funzione $\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha = 0$ in $(-\infty, 0]$, $0 < \alpha < 1$ in $(0, +\infty)$.
- ii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste una funzione $\beta = \beta_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tale che $\beta(t) = 0$ se $t \leq a$ o $t \geq b$, $0 < \beta(t) < 1$ se $a < t < b$.
- iii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste una funzione $\gamma = \gamma_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tale che $\gamma(t) = 0$ se $t \leq a$, $\gamma(t) = 1$ se $t \geq b$, $0 < \gamma(t) < 1$, $\gamma'(t) > 0$ se $a < t < b$.
- iv) Se $x \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $\zeta = \zeta_{x,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, a valori in $[0, 1]$, positiva nella palla $B_\varepsilon(x)$ e nulla in $\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)$ (quindi $\text{supp } \zeta = \overline{B_\varepsilon(x)}$).
- v) Siano K un compatto e V un aperto di \mathbb{R}^N , con $K \subset V$. Esistono un aperto D tale che $K \subset D \subset \overline{D}$ compatto $\subset V$ e una funzione $\psi = \psi_{K,V}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ con supporto \overline{D} compatto contenuto in V , tale che $\psi(x) = 1$ per ogni $x \in K$ (e inoltre $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi > 0$ in D , $\psi = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus D$).

Dimostrazione. i) È chiaro che α è di classe C^∞ in $(-\infty, 0)$, con $\alpha^{(m)}(t) = 0$, e in $(0, +\infty)$, essendo ivi composta di funzioni di classe C^∞ . Inoltre se $t > 0$ è $\alpha'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$, $\alpha''(t) = (\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^3}) e^{-\frac{1}{t}}$, e per induzione si verifica facilmente che per ogni $m \in \mathbb{N}$ è $\alpha^{(m)}(t) = p_m(\frac{1}{t}) e^{-\frac{1}{t}}$, dove $p_m(s)$ è un polinomio in s . Essendo $\lim_{t \rightarrow 0^+} p(\frac{1}{t}) e^{-\frac{1}{t}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p(s)}{e^s} = 0$ per ogni polinomio, ogni derivata di α è nulla in 0 e continua in 0.

ii) Basta prendere $\beta(t) = \alpha((t-a)(b-t))$, dove α è la funzione considerata in i).

iii) Se β è la funzione in ii), si prende $\gamma(t) = \left[\int_a^b \beta(t) dt \right]^{-1} \left[\int_a^t \beta(s) ds \right]$.

iv) Se α è come in i), si prende $\zeta(y) = \alpha(1 - \frac{|y-x|^2}{\varepsilon^2})$, cioè $\zeta(y) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |y-x|^2}} & \text{se } |y-x| < \varepsilon \\ 0 & \text{se } |y-x| \geq \varepsilon \end{cases}$.

v) La collezione $\{B = B_\varepsilon(x) : x \in K, \varepsilon > 0, \overline{B} \subset V\}$ è un ricoprimento aperto del compatto K , e come tale ha un sottoricoprimento finito:

esistono punti $x_1, \dots, x_m \in K$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ tali che $\overline{B_{\varepsilon_j}(x_j)} \subset V$, $K \subset D = \cup_{j=1}^m B_{\varepsilon_j}(x_j)$, con $\overline{D} = \cup_{j=1}^m \overline{B_{\varepsilon_j}(x_j)}$, compatto $\subset V$.

Sia $s_j = \zeta_{x_j, \varepsilon_j}$ una funzione di classe C^∞ , positiva in $B_{\varepsilon_j}(x_j)$ e nulla fuori, come in iv), e sia $s(x) = \sum_{j=1}^m s_j(x)$. La funzione s è di classe C^∞ , positiva nell'aperto $D = \cup_{j=1}^m B_{\varepsilon_j}(x_j) \supset K$ e nulla fuori, quindi con supporto $\overline{D} = \cup_{j=1}^m \overline{B_{\varepsilon_j}(x_j)}$. Essendo continua e positiva nel compatto K , la funzione s ha minimo positivo $\delta > 0$ in K . Presa ora una funzione $\gamma = \gamma_{0, \delta}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, che vale 0 in $(-\infty, 0]$, vale 1 in $[\delta, +\infty)$ come in iii), basta porre $\psi(x) = \gamma(s(x))$ per avere una funzione con le proprietà desiderate. \square

Ricordiamo che il **supporto** $\text{supp } g$ di una funzione continua $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è l'insieme $\overline{\{x \in \mathbb{R}^N : g(x) \neq 0\}}$, chiusura dell'insieme dei punti dove g non è nulla.

Teorema 4.10. [Partizioni dell'unità C^∞ , caso compatto] Sia $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme compatto, e sia $\{U_1, \dots, U_m\}$ un ricoprimento aperto di K , cioè gli insiemi U_j sono aperti e $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$.

Esistono m funzioni $\varphi_1 \dots \varphi_m$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ a supporto compatto con le seguenti proprietà:

- i) $0 \leq \varphi_j \leq 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$
- ii) $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ per ogni $x \in K$
- iii) $\text{supp } \varphi_j$ (compatto) $\subset U_j$

Definizione 4.6. Ogni successione φ_j di funzioni di classe C^∞ con le proprietà espresse nel precedente teorema è detta **partizione dell'unità C^∞ per K , subordinata al ricoprimento $\{U_1, \dots, U_m\}$** .

Dimostrazione del Teorema. Poniamo $K_1 = K \setminus (U_2 \cup \dots \cup U_m)$. È un insieme chiuso e limitato, dunque compatto.

È chiaro che $K_1 \subset U_1$ e quindi per le proprietà viste in precedenza esiste un aperto D_1 tale che $K_1 \subset D_1 \subset \overline{D_1}$ compatto $\subset U_1$ e quindi $\{D_1, U_2, \dots, U_m\}$ è un ricoprimento aperto di K , cioè $K \subset D_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$.

Siano poi $K_2 = K \setminus (D_1 \cup U_3 \cup \dots \cup U_m)$, compatto contenuto in U_2 , e D_2 un aperto tale che $K_2 \subset D_2 \subset \overline{D_2}$ compatto $\subset U_2$ e quindi $K \subset D_1 \cup D_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_m$.

Per induzione, avendo definito K_1, \dots, K_j siano $K_{j+1} = K \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_j \cup U_{j+2} \cup \dots \cup U_m)$ e D_{j+1} un aperto tale che $K_{j+1} \subset D_{j+1} \subset \overline{D_{j+1}}$ compatto $\subset U_{j+1}$ e quindi $K \subset D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{j+1} \cup U_{j+2} \cup \dots \cup U_m$.

Abbiamo quindi costruito un ricoprimento aperto $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ di K , tale che per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$ si ha $\overline{D_j}$ compatto $\subset U_j$.

Siano come nel lemma precedente ψ_j , $j = 1, \dots, m$, funzioni di classe C^∞ che valgono 1 nel compatto $\overline{D_j}$ e nulle fuori dell'aperto U_j . Posto $U = \{x \in \mathbb{R}^N : \psi_1(x) + \dots + \psi_m(x) > 0\}$, si ha che U è aperto e $K \subset U$, poiché $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ è un ricoprimento aperto di K .

Se $\psi_0 = \psi_{K,U}$ è una funzione di classe C^∞ a valori in $[0, 1]$, che vale 1 in K e ha supporto contenuto in U , si ottiene la partizione dell'unità desiderata ponendo
$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{\psi_0 \psi_j}{\psi_1 + \dots + \psi_m} & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

□

Anche se avremo bisogno nell'immediato solo del teorema precedente enunciamo e dimostriamo il caso generale di partizioni dell'unità relative a un insieme qualsiasi.

Teorema 4.11. *[Partizioni dell'unità C^∞ , caso generale] Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e sia $\mathcal{O} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di A . Esiste una successione, finita o infinita, $\{\varphi_j\}_{j \in M \subseteq \mathbb{N}}$ (cioè $M = \mathbb{N}$ oppure $M = \{1, \dots, m\}$ per un intero positivo m) di funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:*

- i) $0 \leq \varphi_j \leq 1$
- ii) Per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto V_x di x tale che $\varphi_j \equiv 0$ in V_x per tutti gli indici $j \in M$ tranne al più un numero finito.
- iii) $\sum_{j \in M} \varphi_j(x) = 1$ per ogni $x \in A$ (si noti che in virtù della proprietà ii) la somma è una somma finita in ogni punto di A).
- iv) Per ogni $j \in M$ esiste $\alpha = \alpha(j) \in I$ tale che $\text{supp } \varphi_j \subset U_\alpha$.

Definizione 4.7. Ogni successione φ_j di funzioni di classe C^∞ con le proprietà espresse nel precedente teorema è detta **partizione dell'unità C^∞ per A , subordinata al ricoprimento \mathcal{O}** .

Dimostrazione del Teorema. Abbiamo già dimostrato il caso di A compatto: in questo caso esiste un sottoricoprimento finito $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$, si può prendere $M = \{1, \dots, m\}$ con $\text{supp } \varphi_i \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Per dimostrare il teorema nel caso generale basta considerare il caso in cui A è aperto. Infatti se A è qualsiasi, posto $B = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$, esso è un aperto contenente A , \mathcal{O} è un suo ricoprimento aperto e una partizione dell'unità per B subordinata al ricoprimento assegnato è anche una partizione dell'unità per A .

Sia dunque A un aperto di \mathbb{R}^N . Esiste una successione di compatti che invade A : posto per $j \in \mathbb{N}^+$ $A_j = \{x \in A : \|x\| \leq j, \text{ dist}(x, \partial A) \geq \frac{1}{j}\}$, si ha che $A_j \subset A$ per ogni j , $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$, ogni A_j è compatto e $A_j \subset \text{int}(A_{j+1})$.

Per $j \in \mathbb{N}^+$ sia $\mathcal{O}_j = \{U_\alpha \cap [\text{int}(A_{j+1}) \setminus A_{j-2}]\}_{\alpha \in I}$, dove si intende che $A_0 = A_{-1} = \emptyset$.

Esso è un ricoprimento aperto del compatto $B_j = A_j \setminus \text{int}(A_{j-1})$. Per il caso 1) esiste una partizione dell'unità finita $\Phi^j = \{\varphi_1^j, \dots, \varphi_{m(j)}^j\}$ per B_j , subordinata al ricoprimento aperto \mathcal{O}_j .

Considerando ora tutte le funzioni $\varphi_k^j(x) = 0$, $j \in \mathbb{N}^+$, $k \in \{1, \dots, m(j)\}$, per ogni $x \in A$ esiste un intorno dove $\varphi_k^j(x) = 0$ tranne al più che per

un numero finito di funzioni. Infatti se $x \in A_i$ si ha che $\varphi(x) = 0$ se $\varphi \in \Phi^j$ per j tale che $j \geq i + 2$.

La collezione Φ di tutte le funzioni $\varphi_k^j(x)$ è numerabile, ognuna di esse ha supporto compatto contenuto in A e la collezione si può disporre in una successione φ'_n .

Posto $\sigma(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(x)$ essa è una somma finita in un intorno di ogni punto di A , ed è positiva nell' aperto A .

Si ottiene la partizione dell' unità richiesta ponendo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\varphi'_n(x)}{\sigma(x)} & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad \square$$

4.3. Diffeomorfismi e cambi di variabile. Per lo sviluppo della teoria dell' integrazione secondo Lebesgue, nella quale tutti gli enunciati dei teoremi di cambio di variabile sono più naturali, è sufficiente conoscere come cambiano gli integrali delle funzioni continue a supporto compatto, e considereremo questo caso più in dettaglio. Considereremo comunque alcuni tra i possibili enunciati in situazioni più generali (sempre nell' ambito della teoria dell' integrazione secondo Riemann), ad esempio per l' integrale di funzioni continue e limitate su insiemi limitati misurabili, anche perché abbiamo usato queste formulazioni per il calcolo elementare di integrali su sottoinsiemi limitati di \mathbb{R}^N . Ognuno di questi enunciati si può poi estendere, sempre nell' ambito della teoria di Riemann, al caso cui abbiamo accennato brevemente degli integrali multipli impropri, cioè al caso in cui l' insieme di integrazione e/o la funzione integranda non siano limitati.

Per passare agevolmente da risultati per funzioni continue a supporto compatto (più facili da dimostrare) a risultati per funzioni continue su insiemi limitati misurabili, è utile approssimare queste ultime con le prime.

Per ogni aperto O di \mathbb{R}^N esiste una **successione di compatti che invadono** O , cioè di compatti K_m , $m \geq 1$, tali che $K_m \subset \text{int}(K_{m+1})$, $O = \cup_m K_m$ (basta porre $K_m = \{x \in O : \|x\| \leq m, \text{dist}(x, \partial O) \geq \frac{1}{m}\}$).

Ricordiamo inoltre (vedi Lemma 4.2) che se K è un compatto contenuto nell' aperto O esiste una funzione ϑ di classe C^∞ a supporto compatto che vale 1 in K con supporto in O . Vale il

Teorema 4.12. *Sia S un insieme limitato misurabile, e sia f continua e limitata su S . Se $\text{int}(S) \neq \emptyset$ e K_n è una qualunque successione di compatti che invadono $O = \text{int} S$, per $m \in \mathbb{N}^+$ sia ϑ_m una funzione di classe C^∞ a supporto compatto che vale 1 in K_m con supporto in $\text{int}(K_{m+1})$ (o in O , è lo stesso). Allora ogni $f\vartheta_m$ è continua a supporto compatto e*

$$\int_S f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_S (f\vartheta_m)(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (f\vartheta_m)(x) dx.$$

(se invece $\text{int}(S) = \emptyset$ allora $S = \partial S$ ha misura nulla e $\int_S f(x) dx = 0$ per ogni funzione limitata f).

Per brevità chiameremo **approssimazione dell' unità per S** ogni successione di coppie (K_m, ϑ_m) di compatti/ funzioni C^∞ come la precedente.

Dimostrazione. Se $K \subset O = \text{int } S$ è un compatto misurabile, allora $K \subset K_m$ definitivamente in m . Infatti $\text{int}(K_m)$ è un ricoprimento aperto di K , ha quindi un sottoricoprimento finito: esistono $m_1 < \dots < m_n$ tali che $K \subset \text{int}(K_{m_1}) \cup \dots \cup \text{int}(K_{m_n}) = \text{int}(K_{m_n})$, poiché i compatti sono contenuti ognuno nel successivo.

Ne segue che $f - f\vartheta_m = 0$ su K , definitivamente in m , e se $|f(x)| \leq M \forall x \in S$, si ha

$$|\int_S f(x) dx - \int_S (f\vartheta_m)(x) dx| = |\int_O [f(x) - (f\vartheta_m)(x)] dx| \leq \int_{O \setminus K} |f(x) - (f\vartheta_m)(x)| dx \leq M(1 - \vartheta_m) \text{mis}(O \setminus K) \leq M \text{mis}(O \setminus K).$$

Basta allora mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto misurabile $K \subset O$ tale che $\text{mis}(O \setminus K) \leq \varepsilon$.

Dato che S è misurabile, la frontiera di S ha misura nulla, quindi esistono rettangoli aperti R_1, \dots, R_n tali che $\partial S \subset \cup_{i=1}^n R_i$, $\sum_{i=1}^n \text{mis}(R_i) \leq \varepsilon$. L' insieme $K = S \setminus \cup_{i=1}^n R_i (= \bar{S} \setminus \cup_{i=1}^n R_i)$ è compatto, misurabile come differenza insiemistica di insiemi misurabili, ed è contenuto nell' aperto $O = \text{int } S$. Inoltre $\text{mis}(S \setminus K) \leq \text{mis}(\cup_{i=1}^n R_i) \leq \sum_{i=1}^n \text{mis}(R_i) \leq \varepsilon$. □

Nello studio dei cambi di variabile per gli integrali multipli faremo uso di un teorema fondamentale che dimostreremo nel successivo capitolo, il teorema della funzione inversa, di cui scriviamo ora l' enunciato.

Teorema 4.13. (*Teorema della funzione inversa*)

Siano O un aperto di \mathbb{R}^N , $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione di classe $C^1(O; \mathbb{R}^N)$, e sia $x_0 \in O$ tale che $\mathbf{F}'(x_0)$ è invertibile come applicazione lineare $:\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, equivalentemente $\det(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(x_0)) \neq 0$.

Allora F è localmente invertibile con inversa di classe C^1 : esistono intorno aperti A di x_0 , B di $y_0 = \mathbf{F}(x_0)$, tali che $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}|_A : A \rightarrow B$ è biunivoca, con inversa $\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}_A)^{-1}$ di classe $C^1(B; \mathbb{R}^N)$, e $D\mathbf{F}^{-1}(y) = [D\mathbf{F}(x)]^{-1}$, $x = \mathbf{F}^{-1}(y)$.

Osservazione. Si noti che l' invertibilità è locale, anche se $\det(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(x)) \neq 0$ per ogni $x \in O$ non è detto che F sia globalmente invertibile.

Nella successiva definizione invece si assume che un' applicazione sia globalmente invertibile per avere il nome di diffeomorfismo.

Definizione 4.8. Siano A, B aperti di \mathbb{R}^N . Un **diffeomorfismo di classe C^1** φ tra A e B è un' applicazione biunivoca $\varphi : A \rightarrow B$ di classe $C^1(A; \mathbb{R}^N)$ tale che l' inversa φ^{-1} è anche di classe $C^1(B; \mathbb{R}^N)$.

Se φ è un diffeomorfismo sia $J_\varphi(x)$, $x \in A$, la **matrice jacobiana** di φ , cioè la matrice di entrate $J_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$, matrice che rappresenta il differenziale di φ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^N . Analogamente indichiamo con $J_{\varphi^{-1}}(y)$, $y \in B$, la matrice jacobiana dell' inversa φ^{-1} .

Dato che $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$, per la formula che dà il differenziale delle funzioni composte si ha che $J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) J_\varphi(x) = I$ per ogni $x \in A$, dove $y = \varphi(x)$ e I è la matrice identità di ordine N con entrate $I_{ij} = \delta_{ij} =$

$$\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Come conseguenza si ha che $\det(J_\varphi(x)) \det(J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x))) = 1$ per ogni $x \in A$.

In particolare $\det(J_\varphi(x)) \neq 0$ se $x \in A$, $\det(J_{\varphi^{-1}}(y)) \neq 0$ se $y \in B$.

Osserviamo che il Teorema della funzione inversa si può enunciare brevemente dicendo che nelle ipotesi fatte \mathbf{F} è un diffeomorfismo locale attorno a x_0 , cioè esiste un intorno aperto A di x_0 tale che $\mathbf{F}|_A$ è un diffeomorfismo tra A e $B = \mathbf{F}(A)$.

Teorema 4.14 (Diffeomorfismi e misurabilità). *Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra due aperti A, B di \mathbb{R}^N .*

- (1) *Un insieme limitato M tale che $\overline{M} \subset A$ ha misura nulla secondo Peano-Jordan se e solo se l' insieme $N = \varphi(M)$ (che verifica $\overline{N} \subset B$) ha misura nulla.*
- (2) *Sia T un insieme limitato tale che $\overline{T} \subset A$, e quindi, posto $S = \varphi(T)$ si ha che $\overline{S} \subset B$. L' insieme T è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se lo è $S = \varphi(T)$.*

Dimostrazione. La proprietà 1) è vera in ipotesi molto più deboli, e dipende dal fatto che un diffeomorfismo è un' applicazione Lipschitziana in ogni intervallo compatto.

Se $\overline{M} \subset A$ e M ha misura nulla per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di M con cubi chiusi R_1, \dots, R_m di centro x_k e semilato l_k contenuti in A , definiti come $R_k = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i - x_i| \leq l_k, i = 1, \dots, N\}$, e di volume totale $\sum_k \text{vol}(R_k) = 2^N \sum_k l_k^N \leq \varepsilon$.

Per il teorema del valor medio per ogni $y \in R_k$, $k = 1, \dots, m$, e per ogni $i = 1, \dots, N$ si ha che se $K = \max_{k=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, N} \max_{z \in R_k} \|\nabla \varphi_i(z)\|$ si ha (ponendo con una notazione che introdurremo presto $\|x - y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x^i - y^i|$)

$$|\varphi_i(x_k) - \varphi_i(y)| \leq \sup_{z \in R_k} \|\nabla \varphi_i(z)\| |x_k - y| \leq K \|x - y\| \leq K N \|x_k - y\|_\infty \leq K N l_k, \text{ con } K \text{ finito.}$$

Quindi $\varphi(R)$ è contenuto nell' unione di un numero finito di cubi di semilato $K N l_k$ e volume totale $(KN)^N \sum_k (2l_k)^N \leq (KN)^N \varepsilon$.

Ne segue che essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario $N = \varphi(M)$ ha misura nulla. Evidentemente usando φ^{-1} si prova che viceversa se $N = \varphi(M)$ ha misura nulla allora M ha misura nulla.

La proprietà 2) è conseguenza della 1), perché un insieme limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla (secondo Peano-Jordan), e del fatto che essendo φ biunivoca e bicontinua, si ha che $\varphi(\partial C) = \partial\varphi(C)$ per ogni insieme $C \subset A$ con $\overline{C} \subset A$. □

Teorema 4.15 (Cambio di variabili). *Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo di classe C^1 tra due aperti A, B di \mathbb{R}^N .*

- (1) *Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua con supporto compatto contenuto in B allora vale la formula*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx$$

Qui e in seguito indichiamo per brevità con $f \circ \varphi |\det J_\varphi|$ la funzione (definita su tutto \mathbb{R}^N e non solo su A)

$$g(x) = \begin{cases} f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| & \text{se } x \in \varphi^{-1}(\text{supp}(f)) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus (\varphi^{-1}(\text{supp}(f))) \end{cases}$$

Essa è continua e il suo supporto $\varphi^{-1}(\text{supp}(f)) \subset A$ è compatto perché φ è non solo continua ma biunivoca e bicontinua.

- (2) *Siano S un insieme limitato misurabile tale che $\overline{S} \subset B$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata.*

Allora (essa è integrabile su S , è integrabile su $T = \varphi^{-1}(S)$ la funzione $f \circ \varphi |\det J_\varphi|$ perché continua e limitata sull'insieme limitato e misurabile T , e) vale la formula

$$\int_S f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(S)} f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx$$

Osservazione 4.2. In dimensione $N = 1$ nella formula di cambio di variabili non interviene il modulo. Il motivo è che in tale formula si intendono gli integrali estesi ad *intervalli orientati*: se $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ è la restrizione di un diffeomorfismo $(a', b') \rightarrow (c', d')$ la derivata di φ è sempre positiva o sempre negativa. Nel primo caso φ è strettamente crescente, $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, e la formula coincide con quella ora scritta. Nel secondo caso, cioè quando $\varphi' < 0$, φ è strettamente decrescente, $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, e la formula $\int_c^d f(y) dy = \int_b^a f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ si può scrivere $\int_c^d f(y) dy = \int_b^a f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) (-\varphi'(x)) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx$.

Osserviamo inoltre che se $\varphi : (a, b) \rightarrow (c, d)$ è un diffeomorfismo di classe C^1 e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 con supporto contenuto in (c, d) , la formula di cambio di variabili unidimensionale si può scrivere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x)) |\det \varphi(x)| dx$, sempre intendendo che l'integrando a secondo membro è 0 per $x \notin (a, b)$.

Dimostrazione. Caso 1) ($f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua con supporto compatto contenuto in B).

Dimostreremo il teorema in vari passi.

L'idea della dimostrazione si può così schematizzare.

A) Il teorema è vero in dimensione $N = 1$, se φ è un diffeomorfismo tra due intervalli aperti, ed è vero se φ è l'applicazione lineare che scambia tra di loro due versori della base canonica (due coordinate).

B) Se il teorema è vero per due diffeomorfismi allora è vero anche per la composizione dei due.

C) Se $N \geq 2$ localmente ogni diffeomorfismo si scrive, a meno di permutazioni di variabili, come composizione di un diffeomorfismo che lascia invariata l'ultima coordinata e di uno che lascia invariate le altre $N - 1$.

D) (per induzione sulla dimensione N) Il teorema è vero se il diffeomorfismo è di uno dei tipi precedenti, quindi per la loro composizione: localmente il teorema è vero.

E) Usando una partizione dell'unità, per scrivere f come somma $f = \sum_k f \varphi_k$ di funzioni con supporto in aperti U_k dove il teorema è vero, si dimostra che il teorema vale globalmente.

A) Il teorema è vero in dimensione $N = 1$, se φ è un diffeomorfismo tra due intervalli aperti (questo è stato già discusso in precedenza). Inoltre il teorema è vero se il diffeomorfismo è $\varphi = E_k^l : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, applicazione lineare che cambia la coordinate k -esima con la coordinata l -esima ($1 \leq k, l \leq N$), cioè se $E_k^l(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Infatti E_k^l è lineare, ha per differenziale e per inversa sé stessa, ha determinante -1 e $|\det E_k^l| = 1$. La formula di cambio di variabili segue allora dalla formula di riduzione per le funzioni continue su un intervallo N -dimensionale (e quindi per le funzioni continue a supporto compatto). Infatti se ad esempio per semplicità di notazioni $N = 2$ e $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ contiene il supporto di f , si ha che $E_1^2(R) = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$, e se $f(x) = f(x_1, x_2)$ è una funzione continua su R e $g(x_1, x_2) = f(E_1^2(x)) = f(x_2, x_1)$, si ha che

$$\int \int_R f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \int \int_{[a_2, b_2] \times [a_1, b_1]} g(x_1, x_2) dx = \int_{E_1^2(R)} f(E_1^2(x)) dx$$

B) Se il teorema è vero per un diffeomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ tra aperti A e B , ed è vero per un diffeomorfismo $\psi : B \rightarrow C$ tra aperti B e C , allora è vero per il diffeomorfismo $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$.

Infatti se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione a supporto compatto $K \subset C$ si ha che $\det J_{\psi \circ \varphi}(x) = \det J_\psi(\varphi(x)) \det J_\varphi(x)$ e $f \circ \psi$ ha supporto compatto $\psi^{-1}(K) \subset B$. Essendo vero il teorema per φ e per ψ , si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(\psi(y)) |\det J_\psi(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(\psi(\varphi(x))) |\det J_\psi(\varphi(x))| |\det J_\varphi(x)| = \int_{\mathbb{R}^N} f(\psi \circ \varphi(x)) |\det J_{\psi \circ \varphi}(x)| dx$$

C) Sia $\varphi : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo di classe C^1 e sia $a \in A$.

Mostriamo che esiste un intorno $U_a \subset A$ di a tale che a meno di permutazioni di variabili il diffeomorfismo $\varphi = \varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$ è la composizione di un diffeomorfismo che lascia invariata la coordinata x_N e di uno che lascia invariate le altre $N - 1$ coordinate x_1, \dots, x_{N-1} .

Dato che $\det \varphi'(a) \neq 0$ esistono indici $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tali che $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \neq 0$. Se $E_j^i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è l'applicazione lineare che cambia la coordinata k -esima con la coordinata l -esima, cioè

$$E_k^l(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_n),$$

essa è lineare, ha per differenziale e per inversa sé stessa, ha determinante -1 e $|\det E_k^l| = 1$.

Se $\tilde{A} = (E_j^i)^{-1}(A)$ la composizione $\tilde{\varphi} = E_i^N \circ \varphi \circ E_j^N$ è un'applicazione di classe $C^1(\tilde{A}; \mathbb{R}^N)$ a valori in $\tilde{B} = E_i^N(B)$, e se $\tilde{a} = (E_j^N)^{-1}(a)$ verifica $\frac{\partial \tilde{\varphi}_N}{\partial x_N}(\tilde{a}) \neq 0$.

Definiamo $\psi_1(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \tilde{\varphi}_N(x))$.

La sua matrice jacobiana ha come sottomatrice costituita dalle prime $N - 1$ righe e colonne la matrice identità di ordine $N - 1$, mentre l'ultima riga è costituita dalle derivate parziali $\frac{\partial \tilde{\varphi}_N}{\partial x_j}(x)$. Ne segue che il suo determinante in \tilde{a} è $\det(J_{\psi_1}(\tilde{a})) = \frac{\partial \tilde{\varphi}_N}{\partial x_N}(\tilde{a}) \neq 0$.

Per il teorema della funzione inversa esistono un intorno aperto $U_1 \subset \tilde{A}$ di \tilde{a} e un intorno aperto $U_2 \subset \tilde{B}$ di $\psi_1(\tilde{a}) = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{N-1}, \tilde{\varphi}_N(\tilde{a}))$ tali che ψ_1 è biunivoca tra U_1 e U_2 , ed è un diffeomorfismo tra U_1 e U_2 che lascia invariate le prime $N - 1$ variabili. Inoltre U_2 è costituito dai punti di \mathbb{R}^N che hanno la forma $(y_1, \dots, y_{N-1}, y_N) = (x_1, \dots, x_{N-1}, \tilde{\varphi}_N(x))$ al variare di $x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in U_1$.

Se $y_N = \tilde{\varphi}_N(x)$ si ha che $\psi_1^{-1}(y_1, \dots, y_{N-1}, y_N) = \psi_1^{-1}(x_1, \dots, x_{N-1}, \tilde{\varphi}_N(x)) = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$ e $\tilde{\varphi}_N(\psi_1^{-1}(y)) = \tilde{\varphi}_N(x) = y_N$.

Definiamo $\psi_2(y) = \tilde{\varphi}(\psi_1^{-1}(y))$, $y \in U_2$. È un diffeomorfismo tra U_2 e $V_1 = \tilde{\varphi}(U_1)$, e verifica $\psi_2(y) = (\tilde{\varphi}_1(y), \dots, \tilde{\varphi}_{N-1}(y), y_N)$, cioè lascia invariata l'ultima variabile. Inoltre $\tilde{\varphi} = \psi_2 \circ \psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ come segue da quanto appena detto.

Abbiamo quindi scritto $E_i^N \circ \varphi \circ E_j^N = \tilde{\varphi} = \psi_2 \circ \psi_1$, come composizione di un'applicazione che lascia invariate le prime $N - 1$ coordinate e di una che lascia invariata l'ultima coordinata, e quindi essendo $(E_k^l)^{-1} = E_k^l$ per $x \in U = (E_j^N)^{-1}(U_1)$ si ottiene

$$\varphi|_U = E_i^N \circ \psi_2 \circ \psi_1 \circ E_j^N :$$

a meno di permutazioni di coordinate (che per la A) non creano problemi nella verifica di quanto vogliamo dimostrare), ogni diffeomorfismo si scrive localmente come composizione di un diffeomorfismo che lascia invariata l'ultima coordinata e di uno che lascia invariate le altre.

D) Sappiamo che il teorema vale se $N = 1$. Sia $N \geq 2$ e facciamo l'ipotesi induttiva che il teorema valga in dimensione $N - 1$ (oppure supporre per comodità che $N = 2$ per seguire meglio il discorso, in

modo analogo si passa da $N - 1$ a N).

Sia $a \in A$ e sia $W = W_a$ l'intorno di a trovato nel punto C). Mostriamo che il teorema è vero se f è una funzione continua che ha supporto in $\varphi(W)$, equivalentemente (essendo φ biunivoca) se $f(\varphi(x)) = 0$ se $x \in \mathbb{R}^N \setminus W$.

In virtù della B), essendo $\varphi = \varphi|_W = E_i^N \circ \psi_2 \circ \psi_1 \circ E_j^N$, e dato che il teorema vale per gli scambi di coordinate, basta mostrare che esso vale per i diffeomorfismi che come ψ_1 lasciano invariate le prime $N - 1$ coordinate e che vale per i diffeomorfismi che come ψ_2 lasciano invariate la coordinata x_N .

Sia quindi $\gamma(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_{N-1}, g(x_1, \dots, x_N))$ un diffeomorfismo tra un aperto U e un aperto V di \mathbb{R}^N che lascia invariate le prime $N - 1$ coordinate. Dato che la sottomatrice della matrice jacobiana di γ che si ottiene cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna è la matrice identità di ordine $N - 1$ si ha che $\det J_\gamma(x) = \frac{\partial g}{\partial x_N} \neq 0$.

Per ogni $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ fissato (tale che esiste $t \in \mathbb{R}$ con $(x_1, \dots, x_{N-1}, t) \in U$) l'applicazione $x_N \mapsto g_{x'}(x_N) = g(x_1, \dots, x_N)$ ha derivata continua diversa da 0, ed è un diffeomorfismo tra gli aperti non vuoti di \mathbb{R} $U_{x'} = \{t \in \mathbb{R} : (x', t) \in U\}$ e $V_{x'} = g_{x'}(U_{x'})$. Inoltre, sempre con x' fissato, l'applicazione $y_N \mapsto f_{x'}(y_N) = f(x', y_N)$ ha supporto compatto in $V_{x'}$.

Si ha quindi, essendo vero il teorema per $N = 1$, che se $y = (x', y_N)$, con $x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y_N) dy_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', g(x', x_N)) \left| \frac{\partial g}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N = \int_{\mathbb{R}^N} f(\gamma(x)) |\det J_\gamma(x)| dx.$$

Sia ora invece $\alpha(x', x_N) = (\beta(x', x_N), x_N)$ un diffeomorfismo tra un aperto U e un aperto V di \mathbb{R}^N che lascia invariata la coordinata x_N . Poniamo, per ogni x_N fissato (tale che esiste $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ con $(x', x_N) \in U$) $\beta_{x_N}(x') = \beta(x', x_N)$.

L'ultima riga della matrice jacobiana di α è il versore $(0, \dots, 1)$, quindi $\det J_\alpha(x) = \det J_{\beta_{x_N}}(x') \neq 0$.

Ne segue, essendo inoltre β_{x_N} iniettivo per ogni x_N fissato, che β_{x_N} è un diffeomorfismo tra l'aperto $U'_{x_N} = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : (x', x_N) \in U\}$ e l'aperto $V'_{x_N} = \beta_{x_N}(U'_{x_N})$ in \mathbb{R}^{N-1} . Inoltre per ogni x_N fissato $y' \mapsto f(y', x_N)$ ha supporto compatto contenuto in V'_{x_N} .

Usando ancora le formule di riduzione si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(y', x_N) dy' = (\text{per ipotesi induttiva}) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(\beta_{x_N}(x'), x_N) |\det J_{\beta_{x_N}}(x')| dx' = \int_{\mathbb{R}^N} f(\alpha(x)) |\det J_\alpha(x)| dx$$

E) Abbiamo finora dimostrato che per ogni $x \in A$ esiste un intorno U_x di a tale che se $y = \varphi(x)$, $V_y = \varphi(U_x)$, il teorema vale per ogni funzione continua a supporto in V_y .

Se ora $K = \text{supp}(f)$, compatto contenuto in B la collezione degli intorni V_y di y , al variare di $y \in K$, è un ricoprimento aperto di K , e

ha un sottoricoprimento finito V_1, \dots, V_m , con $V_i = V_{y_i}$.

Essendo φ biunivoca e bicontinua, ad ogni y_i corrisponde un solo x_i tale che $\varphi(x_i) = y_i$, U_{x_1}, \dots, U_{x_m} è un ricoprimento finito di $K' = \varphi^{-1}(K)$, che è compatto, e la funzione $f(\varphi(x))$ ha supporto in K' ³.

Sia ψ_1, \dots, ψ_m una partizione dell'unità associata al ricoprimento V_1, \dots, V_m di K .

Ogni funzione $f\psi_k$ è continua e ha supporto in V_k (come $(f\psi_k)(\varphi(x))$ ha supporto in U_k), quindi per ognuna di queste il teorema vale.

$$\begin{aligned} \text{Ma allora vale anche per la somma finita } f &= \sum_{k=1}^m (f\psi_k): \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^m (f\psi_k)(y) dy = \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} (f\psi_k)(y) dy = \\ \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^N} (f\psi_k)(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^m (f\psi_k)(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx = \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx. \end{aligned}$$

2) Il caso 2) segue facilmente dal caso 1) e dal Teorema 4.12.

Infatti se (K_m, ϑ_m) è un' approssimazione dell'unità per S , allora $(\varphi^{-1}(K_m), \vartheta_m \circ \varphi)$ è un' approssimazione dell'unità per $\varphi^{-1}(S)$, quindi $\int_S f(y) dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \int (f\vartheta_m)(y) dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \int (f\vartheta_m)(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx = \int_{\varphi^{-1}(S)} f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx$ \square

³soprattutto in questo punto della dimostrazione si usa il fatto che φ sia globalmente iniettiva

5. TEOREMI DELLE FUNZIONI IMPLICITE E INVERSA

5.1. Teorema elementare delle funzioni implicite in \mathbb{R}^2 .

Teorema 5.1 (Teorema di Dini o delle funzioni implicite in \mathbb{R}^2).

- (1) Sia $F = F(x, y) : O$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in O e tale che esiste continua $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \in C^0(O)$.

Sia $(a, b) \in O$ tale che

- i) $F(a, b) = 0$
 ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Esistono allora un intorno aperto $U = (a - \delta, a + \delta)$ di a in \mathbb{R} e un intorno aperto $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ di b in \mathbb{R} con $\overline{U \times V} \subset O$, tali che $(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in U \times V$ e)
 per ogni $x \in U$ esiste ed è unico $y \in V$ tale che $\mathbf{F}(x, y) = 0$.

Rimane quindi definita una funzione $\varphi(x)$ che associa ad ogni $x \in U$ l'unico $y = \varphi(x) \in V$ tale che

$$(5.1) \quad \mathbf{F}(x, y) = 0$$

e si dice che la funzione $\varphi(x)$ è definita implicitamente dalla relazione $F(x, y) = 0$.

Si ha quindi che $\varphi(a) = b$, $F(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in U$, e viceversa

se $(x, y) \in U \times V$ e $F(x, y) = 0$ allora $y = \varphi(x)$.

Inoltre la funzione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

- (2) Se inoltre $F \in C^1(O)$, cioè se esiste continua anche la derivata parziale $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \in C^0(O)$, allora la funzione $\varphi(x)$ è derivabile con derivata continua in U , e vale la formula

$$(5.2) \quad \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Se poi $F \in C^k(O)$ per $k \geq 1$, allora $\varphi \in C^k(U)$.

In altre parole localmente attorno al punto (a, b) , l'insieme di livello $Z_0(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ coincide con il grafico di una funzione continua $y = \varphi(x) : U \subset \mathbb{R} \rightarrow V \subset \mathbb{R} : Z \cap (U \times V) = \text{graf}(\varphi)$, si può "esplicitare" nell'insieme di livello $Z_0(\mathbf{F})$ la variabile y come funzione continua $y(x)$ della variabile x .

Osservazioni

- È chiaro che lo stesso teorema vale scambiando il ruolo delle variabili: se $F(a, b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0$ localmente i punti dell'

insieme di livello $Z_0(F)$ coincidono con il grafico di una funzione continua $x = \psi(y)$.

Quindi se $\nabla F(a, b) \neq \mathbf{0}$ si può esplicitare localmente una variabile in funzione dell' altra.

- Inoltre lo stesso teorema vale per qualunque insieme di livello (non vuoto) $Z_c(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c\}$ con $c \in \mathbb{R}$: basta applicare il teorema alla funzione $F(x, y) - c$.
- Se $\nabla F(a, b) = \mathbf{0}$ può accadere che nessuna variabile sia esplicitabile come funzione dell' altra.

Ad es vicino a $(a, b) = (0, 0)$ la relazione $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ definisce un unico punto, mentre $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ una coppia di rette.

Tuttavia la condizione del teorema è sufficiente, non necessaria per esplicitare una variabile in funzione dell' altra. Ad esempio se $F(x, y) = x^3 - y^3$ si ha che $F(0, 0) = 0$, $\nabla F(0, 0) = \mathbf{0}$, ma il luogo degli zeri di F coincide con il grafico della funzione $y = x$.

Dimostrazione.

- (1) Supponiamo ad esempio che $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$ (del tutto analogo è il caso in cui $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) < 0$).

Essendo $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$, per il teorema di permanenza del segno applicato alla funzione continua $\frac{\partial F}{\partial y}$, esiste un quadrato $Q = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset O$ tale che $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in Q$.

Ciò significa che per ogni x fissato la funzione $y \mapsto F(x, y)$ è strettamente crescente in $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Ne segue, essendo $F(a, b) = 0$ e $y \mapsto F(a, y)$ strettamente crescente, che
$$\begin{cases} F(a, b - \varepsilon) < 0 \\ F(a, b + \varepsilon) > 0 \end{cases} .$$

Per il teorema di permanenza del segno applicato ora alle funzioni $x \mapsto F(x, b - \varepsilon)$, $x \mapsto F(x, b + \varepsilon)$, esisterà un numero positivo $\delta \leq \varepsilon$ tale che
$$\begin{cases} F(x, b - \varepsilon) < 0 \\ F(x, b + \varepsilon) > 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in U = (a - \delta, a + \delta).$$

In altre parole la funzione F è positiva sul lato superiore e negativa sul lato inferiore del rettangolo $R = U \times V$.

Dalla continuità e stretta monotonia di F sui segmenti verticali segue allora (per il teorema degli zeri delle funzioni continue) che per ogni $x \in (a - \delta, a + \delta)$ esiste ed è unico un punto $y = y(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ tale che $F(x, y) = 0$ e poniamo $\varphi(x) = y$.

Rimane così definita una funzione $\varphi : U \rightarrow V$ tale che $\varphi(a) = b$, $F(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in U$, e viceversa se $(x, y) \in U \times V$ e

$F(x, y) = 0$ allora $y = \varphi(x)$.

Tale funzione è continua in (a, b) perché possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere nel punto iniziale della dimostrazione, e ripetendo la costruzione in ogni punto del rettangolo $R = U \times V$ la funzione è ivi continua.

(2) Sia ora $F \in C^1(O)$.

Supponiamo di sapere già che la funzione $\varphi(x)$ è derivabile. In tal caso la formula (5.2) è conseguenza immediata della regola della catena. Infatti se $\alpha(x) = F(x, \varphi(x))$, per costruzione $\alpha(x) = 0 \forall x \in U = (a - \delta, a + \delta)$, e quindi $0 = \alpha'(x) = F_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + F_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$, da cui segue subito la formula per la derivata di $\varphi(x)$.

La derivabilità va però dimostrata e condurrà ancora alla (5.2).

Sia $h > 0$ tale che $x + h \in U$. Per costruzione si ha che $F(x + h, \varphi(x + h)) - F(x, \varphi(x)) = 0$, e usando il teorema di Lagrange nel rettangolo R si ottiene l'esistenza di $0 < t = t_h < 1$ tale che

$$0 = F(x + h, \varphi(x + h)) - F(x, \varphi(x)) = F_x(x + th, \varphi(x) + t(\varphi(x + h) - \varphi(x)))h + F_y(x + th, \varphi(x) + t(\varphi(x + h) - \varphi(x)))(\varphi(x + h) - \varphi(x)).$$

Essendo $F_y \neq 0$ sul rettangolo si ottiene allora che

$$\frac{(\varphi(x+h) - \varphi(x))}{h} = -\frac{F_x(x+th, \varphi(x)+t(\varphi(x+h) - \varphi(x)))}{F_y(x+th, \varphi(x)+t(\varphi(x+h) - \varphi(x)))}.$$

Se $h \rightarrow 0$ per la continuità di φ e delle derivate parziali di F si ottiene che $\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$.

Se $F \in C^2(O)$, essendo $\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$ con numeratore e denominatore funzioni di classe C^1 , essa è a sua volta derivabile. Volendo scrivere esplicitamente tale derivata seconda e usando la regola della catena si ottiene (tutte le derivate parziali di F sono calcolate in $(x, \varphi(x))$)

$$\varphi''(x) = -\frac{[F_y][F_{xx} + F_{xy}\varphi'(x)] - [F_x][F_{yx} + F_{yy}\varphi'(x)]}{F_y^2}$$

e usando l'espressione nota per $\varphi'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ si ottiene

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

Supponendo per induzione che se $F \in C^n(O)$ allora $\varphi \in C^n(U)$, se $F \in C^{n+1}(O) \subset C^n(O)$ per ipotesi induttiva $\varphi \in C^n(U)$ e dalla stessa espressione $\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$ si osserva che la derivata $\varphi' \in C^n(U)$ come quoziente di composte di funzioni C^n , e quindi $\varphi \in C^{n+1}(U)$.

□

5.2. Teorema delle funzioni implicite, caso generale. Vogliamo dimostrare il Teorema delle funzioni implicite nel caso generale dei

sistemi, con una dimostrazione che ricalca il caso elementare in cui $n = m = 1$ visto in precedenza. A questo proposito è utile la seguente proposizione che dà un "Principio di minimo"⁴.

Proposizione 5.1. *Sia $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m) \in C^1(G; \mathbb{R}^m)$, dove G è un aperto di \mathbb{R}^m , e supponiamo che \mathbf{g} abbia differenziale non singolare: $\det D\mathbf{g}(x) \neq 0 \forall x \in G$.*

Se $K \subset G$ è compatto e $\min_{y \in K} \|\mathbf{g}(y)\| = \mathbf{g}(y_0)$, con y_0 interno a K , allora $\mathbf{g}(y_0) = 0$ (e tale minimo è 0).

Quindi se $\min_{y \in K} \|\mathbf{g}(y)\| > 0$ allora tale minimo è assunto (solo) sulla frontiera ∂K .

Dimostrazione. Se $\min_{y \in K} \|\mathbf{g}(y)\| = \mathbf{g}(y_0)$, con y_0 interno a K allora y_0 è un punto di minimo locale nell'aperto G della funzione $\|\mathbf{g}(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |g_i|^2$ di classe $C^1(G)$. Per il Teorema di Fermat y_0 è allora un punto critico di questa funzione e il suo gradiente è nullo:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\sum_{i=1}^m |g_i|^2)(y_0) = 2 \sum_{i=1}^m g_i(y_0) D_j g_i(y_0) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

che si può anche scrivere come ${}^t J_{\mathbf{g}}(y) \mathbf{g}(y) = 0$.

Essendo $J_{\mathbf{g}}(y)$ e quindi anche ${}^t J_{\mathbf{g}}(y)$ una matrice non singolare, si ha che $\mathbf{g}(y_0) = (g_1(y_0), \dots, g_m(y_0)) = (0, \dots, 0)$. \square

Corollario 5.1. *Se nelle ipotesi precedenti su \mathbf{g} e K si ha che $\|\mathbf{g}(z)\| > \min_{y \in K} \|\mathbf{g}(y)\|$ per ogni $z \in \partial K$ allora esiste y_0 interno a K tale che $\mathbf{g}(y_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass esiste il minimo assoluto di $\|\mathbf{g}(y)\|$ su K , e per le ipotesi sui valori di $\|\mathbf{g}\|$ non può essere assunto sul bordo di K , quindi esiste un punto interno di minimo assoluto e si applica il teorema. \square

Teorema 5.2 (Teorema di Dini o delle funzioni implicite). *Sia $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = (F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)) : O$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua in O e tale che esistono continue le derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y) \in C^0(O)$, $i, j = 1, \dots, m$.*

Siano $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ e $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in O$ tali che

$$\text{i) } \mathbf{F}(a, b) = \mathbf{c}, \text{ cioè } \begin{cases} F_1(a, b) & = c_1 \\ \dots & \dots \\ F_m(a, b) & = c_m \end{cases}$$

$$\text{ii) } \det D_y \mathbf{F}(a, b) = \det \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0$$

⁴nome dato qui per ricordare l'enunciato ma non usato assolutamente in letteratura, dove i principi di massimo e minimo riguardano equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali

Esistono allora un intorno aperto $U = B_\alpha(a)$ di a in \mathbb{R}^n , un intorno aperto $V = B_\beta(b)$ di b in \mathbb{R}^m con $\overline{U} \times \overline{V} \subset O$, tali che per ogni $x \in U$

esiste ed è unico $y \in V$ tale che $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{c}$, cioè

$$\begin{cases} F_1(x, y) &= c_1 \\ \dots & \dots \\ F_m(x, y) &= c_m \end{cases}$$

Rimane quindi definita una funzione $\varphi(x)$ che associa ad ogni $x \in U$ l'unico $y = \varphi(x) \in V$ tale che

$$(5.3) \quad \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{c}$$

e si ha quindi che $\varphi(a) = b$, $\mathbf{F}(x, \varphi(x)) = \mathbf{c} \forall x \in U$, e viceversa se $(x, y) \in U \times V$ e $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{c}$ allora $y = \varphi(x)$.

Inoltre la funzione $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua.

In altre parole l'insieme di livello $Z_c(\mathbf{F}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{c}\}$ coincide localmente con il grafico di una funzione continua $y = \varphi(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ a valori in V , e si possono esprimere nell'insieme di livello $Z_c(\mathbf{F})$ le variabili y_1, \dots, y_m come funzioni continue delle altre variabili: $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$.

Se inoltre $F \in C^1(O; \mathbb{R}^m)$, cioè se esistono continue anche le derivate $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, allora la funzione φ è di classe $C^1(U; \mathbb{R}^m)$, e la sua matrice jacobiana è

$$(5.4) \quad J_\varphi(x) = D_x \varphi(x) = -[D_y F(x, \varphi(x))]^{-1} [D_x F(x, \varphi(x))] = \\ - \left[\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x, \varphi(x)) \right]^{-1} \left[\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x, \varphi(x)) \right]$$

Se poi $F \in C^k(O; \mathbb{R}^m)$ per $k \geq 1$, allora $\varphi \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$.

Osservazione 5.1. Sarà chiaro dalla dimostrazione che le variabili che abbiamo chiamato $y = (y_1, \dots, y_m)$ non sono necessariamente le ultime (abbiamo indicato queste per comodità di notazione).

L'enunciato vale a meno di permutazioni delle variabili e si applica a $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_{n+m}) : O$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ di rango massimo m , cioè tale che esistono m variabili x_{i_1}, \dots, x_{i_m} tali che $\det \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}(a, b) \neq 0$. In questo caso queste variabili si possono esprimere in funzione delle altre n .

Dimostrazione. Riduzioni preliminari. Possiamo supporre che

$$(5.5) \quad \mathbf{c} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a, b) = I_m$$

dove I_m è la matrice identità $m \times m$, cioè $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Per la prima assunzione basta infatti sostituire la funzione $\mathbf{F}(x, y)$ con la funzione $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) - \mathbf{c}$, ed evidentemente una volta dimostrato il teorema per $\tilde{\mathbf{F}}$ esso sarà vero per \mathbf{F} .

Per la seconda, se $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = [D_y \mathbf{F}(a, b)]^{-1} \mathbf{F}(x, y)$, essa verifica

$$\frac{\partial(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x, y) = [D_y \mathbf{F}(a, b)]^{-1} [D_y \mathbf{F}(x, y)], \text{ in particolare}$$

$$\frac{\partial(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a, b) = [D_y \mathbf{F}(a, b)]^{-1} [D_y \mathbf{F}(a, b)] = I_m$$

Una volta dimostrato il teorema per $\tilde{\mathbf{F}}$ esso vale anche per \mathbf{F} perché essendo $[D_y \mathbf{F}(a, b)]$ e quindi $[D_y \mathbf{F}(a, b)]^{-1}$ non singolare, $[D_y \mathbf{F}(a, b)]^{-1} \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ se e solo se $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$. Inoltre, posto $Q = [D_y \mathbf{F}(a, b)]$, è $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = Q^{-1} \mathbf{F}(x, y)$, $[D_y \tilde{\mathbf{F}}(x, y)]^{-1} = [Q^{-1} D_y \mathbf{F}(x, y)]^{-1} = [D_y \mathbf{F}(x, y)]^{-1} Q$, $[D_x \tilde{\mathbf{F}}(x, y)] = Q^{-1} D_x \mathbf{F}(x, y)$. Avendo dimostrato il teorema per $\tilde{\mathbf{F}}$, la matrice jacobiana di $\varphi(x)$ è $D_x \varphi(x) = [D_y \tilde{\mathbf{F}}(x, \varphi(x))]^{-1} D_x \tilde{\mathbf{F}}(x, \varphi(x)) = [D_y \mathbf{F}(x, \varphi(x))]^{-1} Q Q^{-1} D_x \mathbf{F}(x, \varphi(x)) = [D_y \mathbf{F}(x, \varphi(x))]^{-1} D_x \mathbf{F}(x, \varphi(x))$ in accordo con la (5.4).

Supponiamo dunque che $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) = \delta_j^i$.

Per la continuità delle derivate rispetto alle variabili y_j , esiste $\gamma > 0$ tale che $\forall x \in \overline{B}_\gamma(a), y \in \overline{B}_\gamma(b) \quad \det(D_y F(x, y)) \neq 0$ e

$$(5.6) \quad \|D_y \mathbf{F}(x, y) - D_y \mathbf{F}(a, b)\| = \|D_y \mathbf{F}(x, y) - I_m\| \leq \frac{1}{2}$$

Se definiamo $\mathbf{G}(x, y) = y - \mathbf{F}(x, y)$ essa verifica $D_y \mathbf{G}(x, y) = I_m - D_y \mathbf{F}(x, y)$, e quindi $\|D_y \mathbf{G}(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$ se $x \in \overline{B}_\gamma(a), y \in \overline{B}_\gamma(b)$.

Se poniamo, per $x \in \overline{B}_\gamma(a)$ fissato, $\mathbf{G}_x(y) = \mathbf{G}(x, y) = y - \mathbf{F}(x, y)$, per il Corollario 2.3 (valor medio vettoriale) si ha che

$$(5.7) \quad \|\mathbf{G}_x(y_2) - \mathbf{G}_x(y_1)\| = \|y_2 - \mathbf{F}(x, y_2) - (y_1 - \mathbf{F}(x, y_1))\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

Da questa, usando la disuguaglianza $|\|A\| - \|B\|| \leq \|A - B\|$, valida in ogni spazio normato, si ha che

$$\|y_2 - y_1\| - \|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| \text{ e quindi}$$

$$\|y_2 - y_1\| \leq \|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| + \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| \text{ Da questa disuguaglianza}$$

$$(5.8) \quad \|y_2 - y_1\| \leq 2\|F(x, y_2) - F(x, y_1)\| \quad \forall x \in \overline{B}_\gamma(a), y_1, y_2 \in \overline{B}_\gamma(b)$$

Vogliamo ora dimostrare il seguente **Claim**:

$$(5.9) \quad \exists \beta, 0 < \beta \leq \gamma : \mathbf{F}(a, y) \neq \mathbf{F}(a, b) = 0 \quad \forall y \in B_\beta(b) \setminus \{b\}$$

dove $B_\beta(b)$ è la palla in \mathbb{R}^m di centro b e raggio β .

Infatti se così non fosse (ponendo successivamente $\beta = \frac{1}{n} \dots$) esisterebbe una successione $y_n \rightarrow b$ tale che $\mathbf{F}(a, y_n) = \mathbf{F}(a, b) = 0$.

Ma allora, essendo $D_y \mathbf{F}(a, b) = I_m$, si avrebbe

$$\frac{|\mathbf{F}(a, y_n) - \mathbf{F}(a, b) - D_y \mathbf{F}(a, b)(y_n - b)|}{|y_n - b|} = \frac{|y_n - b|}{|y_n - b|} = 1 \neq 0$$

contraddicendo la differenziabilità di \mathbf{F} rispetto a y .

Diminuendo eventualmente β possiamo anche supporre che $D_y \mathbf{F}(a, y)$ è invertibile per $y \in B_\beta(b)$.

Quindi $\mathbf{F}(a, y) \neq \mathbf{F}(a, b) = 0 \forall y \in B_\beta(b) \setminus \{b\}$, in particolare per ogni $y \in \partial B_\beta(b)$. Essendo $y \mapsto \|\mathbf{F}(a, y)\|$ continua essa ha quindi minimo positivo sul compatto $\partial B_\beta(b)$.

Poniamo $4d = \min_{\|y-b\|=\beta} \|\mathbf{F}(a, y)\|$. Essendo $\mathbf{F}(a, b) = 0$, $\|\mathbf{F}(a, y)\| \geq 4d$ se $y \in \partial B_\beta(b)$, per continuità esisterà $\alpha > 0$ tale che

$$(5.10) \quad \|\mathbf{F}(x, b)\| \leq d \quad \forall x \in B_\alpha(a)$$

$$(5.11) \quad \|\mathbf{F}(x, y)\| \geq 2d \quad \forall x \in B_\alpha(a), \forall y \in \partial B_\beta(b)$$

e inoltre $D_y \mathbf{F}(x, y)$ è invertibile per $x \in B_\alpha(a)$, $y \in B_\beta(b)$.

Queste disuguaglianze ci dicono che per ogni $x \in B_\alpha(a)$ fissato il minimo $m_x = \min_{y \in \bar{B}_\beta(b)} \|\mathbf{F}(x, y)\|$ è assunto all'interno della palla $B_\beta(b)$ e allora per il Corollario 5.1 si ha che esiste $y = y(x) = \varphi(x) \in B_\beta(b)$ tale che $\mathbf{F}(x, y) = 0$.

D'altra parte per la (5.8) tale punto è unico: se per qualche $x \in B_\alpha(a)$, $y_1, y_2 \in B_\beta(b)$ sono due punti tali che $F(x, y_i) = 0$ si ha che $\|y_2 - y_1\| \leq 2\|\mathbf{F}(x, y_2) - \mathbf{F}(x, y_1)\| = 0 - 0 = 0$, e quindi $y_1 = y_2$

La funzione $y = \varphi(x)$ così definita è continua in $B_\alpha(a)$.

Infatti per la (5.8) si ha che

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq 2\|F(x+h, \varphi(x+h)) - F(x+h, \varphi(x))\|.$$

D'altra parte $0 = F(x+h, \varphi(x+h)) - F(x, \varphi(x)) = F(x+h, \varphi(x+h)) - F(x+h, \varphi(x)) + F(x+h, \varphi(x)) - F(x, \varphi(x))$, quindi $F(x+h, \varphi(x+h)) - F(x+h, \varphi(x)) = -F(x+h, \varphi(x)) + F(x, \varphi(x))$ e allora

$$(5.12) \quad \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq 2\|F(x+h, \varphi(x)) - F(x, \varphi(x))\| \rightarrow 0$$

se $h \rightarrow 0$ per la continuità di F (rispetto alla prima variabile).

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema e la (5.4), supponendo che $F \in C^1(O; \mathbb{R}^m)$. Poniamo, per $x \in B_\alpha(a)$, $P = P_x = D_x \mathbf{F}(x, \varphi(x))$, $Q = Q_x = D_y \mathbf{F}(x, \varphi(x))$.

Se $h \in \mathbb{R}^N$, $k = k(h) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$ si ha per la continuità di φ che se $h \rightarrow 0$ allora $k = k(h) \rightarrow 0$.

Dalla differenziabilità di \mathbf{F} in (x, y) con $y = \varphi(x)$ si ricava $0 = \mathbf{F}(x+h, \varphi(x+h)) - \mathbf{F}(x, \varphi(x)) = Ph + Q(\varphi(x+h) - \varphi(x)) + (\|h\|^2 + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))$ con $\varepsilon(h, k(h)) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$.

Essendo Q invertibile si ricava

$$(5.13) \quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = -Q^{-1}Ph - Q^{-1}(\|h\|^2 + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))$$

e quindi

$$(5.14) \quad \frac{\|\varphi(x+h) - \varphi(x) - (-Q^{-1}P)h\|}{\|h\|} \leq \frac{(\|h\|^2 + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2)^{\frac{1}{2}}}{\|h\|} Q^{-1}(\varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x)))$$

Dato che $Q^{-1}(\varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$, per mostrare che il primo membro tende a 0 se $h \rightarrow 0$ (e quindi $-Q^{-1}P$ è la matrice jacobiana di φ), basta mostrare che $\frac{(\|h\|^2 + |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^2)^{\frac{1}{2}}}{\|h\|} \leq 1 + \frac{|\varphi(x+h) - \varphi(x)|}{\|h\|}$ è limitato in un intorno di 0.

Questo segue ancora dalla (5.13). Infatti se $\|h\|$ è piccola, essendo $Q^{-1}(\varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$ si ha che $\|Q^{-1}(\varepsilon(h, \varphi(x+h) - \varphi(x)))\| \leq \frac{1}{2}$ e allora per la (5.13) $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \leq \|Q^{-1}\| \|P\| \|h\| + \frac{1}{2}\|h\| + \frac{1}{2}\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|$ e ciò implica $\frac{\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|}{\|h\|} \leq 2\|Q^{-1}\| \|P\| \|h\| + 1$.

Inoltre si dimostra per induzione che se $F \in C^k(O; \mathbb{R}^m)$ per $k \geq 1$, allora $\varphi \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$. Infatti è vero se $k = 1$ perché φ è continua, e la matrice jacobiana ha allora la forma di una funzione continua, quindi φ è di classe C^1 . Allo stesso modo se l'implicazione è vera per $k-1 \geq 1$, e $F \in C^k(O; \mathbb{R}^m)$, dalla forma che ha la matrice jacobiana di φ (composta di funzioni di classe C^{k-1} se è vera l'ipotesi induttiva), si deduce che le derivate di φ sono di classe C^{k-1} , quindi $\varphi \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$.

Infine è chiaro che le variabili non devono essere necessariamente le ultime e vale l'osservazione che segue l'enunciato del teorema. \square

Osservazione 5.2. La dimostrazione proposta del Teorema delle Funzioni Implicite ha il pregio di essere elementare (anche se tecnica in alcuni punti) e di essere la diretta generalizzazione del semplice argomento basato sulla monotonia e continuità del Teorema di Dini elementare (caso di $n = m = 1$).

Tuttavia un principio su cui si basa (Proposizione 5.1 e suo corollario) utilizza il fatto che i chiusi e limitati sono compatti, falso in spazi normati di dimensione infinita. In vista di eventuali generalizzazioni al calcolo differenziale in spazi di Banach, proponiamo schematicamente un'altra dimostrazione, basata invece sul Teorema delle contrazioni, valido in ogni spazio metrico completo, che discutiamo ora.

Naturalmente se in futuro studierete tale teorema nel contesto degli spazi di Banach di dimensione infinita alcuni dettagli vanno cambiati, ad esempio la condizione sul determinante di una matrice quadrata associata a una trasformazione lineare di \mathbb{R}^m in sé stesso diventa l'invertibilità di tale operatore.

Definizione 5.1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $f : X \rightarrow X$ è una funzione, un **punto fisso o punto unito** di T , è un punto $x \in X$ tale che $T(x) = x$.

Una **contrazione** in X è una funzione lipschitziana $T : X \rightarrow X$ con costante di Lipschitz minore di 1. Quindi $T : X \rightarrow X$ è una contrazione se esiste $0 \leq c < 1$ tale che $d_X(T(x), T(y)) \leq c d_X(x, y)$ per ogni coppia di punti $x, y \in X$.

Teorema 5.3 (Teorema delle contrazioni o del punto fisso di Banach.). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \rightarrow X$ una contrazione. Esiste ed è unico un punto fisso di T .*

Dimostrazione. L'unicità è immediata perché se x, y sono punti fissi, cioè $T(x) = x, T(y) = y$, per definizione di contrazione è $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq c d(x, y)$ con $c < 1$, e ciò è possibile solo se $d(x, y) = 0$ che implica $x = y$.

L'esistenza del punto fisso sarà dimostrata con un procedimento costruttivo, che dà un metodo iterativo per la localizzazione di tale punto. Sia $x_0 \in X$ qualsiasi, e poniamo $x_1 = T(x_0)$ e induttivamente definiamo una successione $\{x_n\}$ ponendo $x_{n+1} = T(x_n)$ per $n \in \mathbb{N}$.

Si ha per $n \geq 1$: $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq c d(x_n, x_{n-1})$ e quindi per induzione $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0)$.

Se ora $m > n \geq n_0$ si ha, essendo $c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-1} \leq c^n \sum_{i=0}^{+\infty} c^i = \frac{c^n}{1-c}$ e $c^n < c^{n_0}$, che $d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-1}] d(x_1, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0) \leq \frac{c^{n_0}}{1-c} d(x_1, x_0)$.

Dato che $c^{n_0} \rightarrow 0$ per $n_0 \rightarrow \infty$, le precedenti disuguaglianze mostrano che x_n è una successione di Cauchy.

Per la completezza di X esiste $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Essendo lipschitziana, la funzione T è (uniformemente) continua, quindi $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$. \square

A volte si ha a che fare con una funzione $T : X \rightarrow X$ tale che per qualche $m \in \mathbb{N}^+$ la funzione $T^m = T \circ \dots \circ T : X \rightarrow X$ è una contrazione. Anche in questo caso esiste un unico punto fisso di T .

Corollario 5.2. (Teorema delle contrazioni generalizzato) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \rightarrow X$ una funzione tale che per un $m \in \mathbb{N}^+$ la funzione $T^m : X \rightarrow X$ è una contrazione. Esiste allora ed è unico un punto fisso di T .*

Dimostrazione. Per il Teorema precedente esiste ed è unico un punto fisso $x \in X$ di T^m : $T^m(x) = x$. Applicando T si ha che $T(T^m(x)) = T(x)$, che può essere scritta come $T^m(T(x)) = T(x)$. Quindi $T(x)$ è un altro punto fisso di T^m e per l'unicità del punto fisso di una contrazione è $T(x) = x$, cioè x è punto fisso anche per T .

Inoltre se $T(x) = x$, si dimostra per induzione che $T^m(x) = x$ per ogni $m \in \mathbb{N}^*$ (è vero per $m = 1$; se è vero per $m - 1$ è $T^m(x) = T(T^{m-1}(x)) = T(x) = x$). Ne segue che se x_1, x_2 sono punti fissi per T , lo sono anche per T^m , che è una contrazione, quindi coincidono. \square

Dimostrazione bis del Teorema 5.2, schema. Ci riconduciamo alle notazioni e alla dimostrazione precedente, indicando solo il punto in cui la Proposizione 5.1 è sostituita dal Teorema delle contrazioni, e precisamente il punto in cui nella dimostrazione precedente a ogni $x \in B_\alpha(a)$

si associa l' unico punto $y = \varphi(x) \in B_\beta(b)$ tale che $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$. Il resto della dimostrazione è lo stesso.

Come osservato una riduzione preliminare consente di ipotizzare che

$$(5.15) \quad \mathbf{c} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a, b) = I_m$$

L' osservazione su cui si basa la dimostrazione è che

l' equazione $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$, equivale all' equazione $\mathbf{G}(x, y) = y$, dove $\mathbf{G}(x, y) = y - \mathbf{F}(x, y)$ (funzione già usata nella dimostrazione precedente), cioè alla ricerca di un punto fisso per \mathbf{G} . Per usare il Teorema delle contrazioni bisogna considerare la funzione $y \mapsto \mathbf{G}(x, y)$, per x fissato come funzione definita su uno spazio metrico completo X a valori in X .

Ricordiamo la relazione da cui siamo partiti nella dimostrazione: esiste $\gamma > 0$ tale che $\forall x \in \overline{B}_\gamma(a), y \in \overline{B}_\gamma(b)$ ($\det(D_y \mathbf{F}(x, y)) \neq 0$ e) $\|D_y \mathbf{F}(x, y) - D_y \mathbf{F}(x, b)\| = \|D_y \mathbf{F}(x, y) - I_m\| \leq \frac{1}{2}$, quindi se per x fissato poniamo $\mathbf{G}_x(y) = \mathbf{G}(x, y) = y - \mathbf{F}(x, y)$ essa verifica

$$(5.16) \quad \|\mathbf{G}_x(y_2) - \mathbf{G}_x(y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|$$

(da questa si ottiene poi la relazione usata per l' unicità e continuità $\|y_2 - y_1\| \leq 2\|\mathbf{F}(x, y_2) - \mathbf{F}(x, y_1)\|$)

Poniamo per $0 < \beta \leq \gamma$, $x \in B_\alpha(a)$, $X = X_\beta = \overline{B}_\beta(b)$, $T = T_x = \mathbf{G}_x$.

È uno spazio metrico completo, essendo un sottoinsieme chiuso dello spazio completo \mathbb{R}^N . Se mostriamo che per qualche β la funzione \mathbf{G}_x manda X in sé stesso per ogni valore di $x \in B_\alpha(a)$, abbiamo grazie alla (5.16) che \mathbf{G}_x è una contrazione in X ed ha quindi un unico punto fisso $y := \varphi(x)$.

Rimane quindi da trovare α, β tali che se $x \in B_\alpha(a)$, $\|y - b\| \leq \beta$, allora $\mathbf{G}(x, y) = y - \mathbf{F}(x, y) \in \overline{B}_\beta(b)$, cioè $\|y - \mathbf{F}(x, y) - b\| \leq \beta$. Ora $\|y - \mathbf{F}(x, y) - b\| = \|y - \mathbf{F}(x, y) - (b - \mathbf{F}(x, b)) - \mathbf{F}(x, b)\| = \|\mathbf{G}_x(y) - \mathbf{G}_x(b) - \mathbf{F}(x, b)\| \leq \frac{1}{2}\|y - b\| + \|\mathbf{F}(x, b)\| \leq \frac{1}{2}\beta + \|\mathbf{F}(x, b)\|$ e basta allora scegliere $\alpha > 0$ tale che $\|\mathbf{F}(x, b)\| \leq \frac{1}{2}\beta$ (un tale $\alpha > 0$ esiste per continuità perché $\mathbf{F}(a, b) = \mathbf{0}$). \square

5.3. Teorema della funzione inversa. Introduzione al concetto di (sotto)varietà differenziabile in \mathbb{R}^N .

Teorema 5.4 (Teorema della funzione inversa). *Siano O un aperto di \mathbb{R}^N , $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione di classe $C^1(O; \mathbb{R}^N)$, e sia $x_0 \in O$ tale che $\mathbf{F}'(x_0)$ è invertibile come applicazione lineare : $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, equivalentemente $\det(J_{\mathbf{F}}(x_0)) \neq 0$.*

Esistono allora intorno aperti A di x_0 , B di $y_0 = \mathbf{F}(x_0)$ tali che $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}|_A : A \rightarrow B$ è biunivoca, con inversa $\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}_A)^{-1}$ di classe $C^1(B; \mathbb{R}^N)$, e $D\mathbf{F}^{-1}(y) = [D\mathbf{F}(x)]^{-1}$, $x = \mathbf{F}^{-1}(y)$.

Dimostrazione. Useremo il teorema delle funzioni implicite, con $m = n = N$ e il ruolo di x e y scambiati, per la funzione $\mathbf{G}(x, y) = \mathbf{F}(x) - y : O \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. È una funzione di classe $C^1(O \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ e verifica $\mathbf{G}(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{G}_x(x_0, y_0) = D\mathbf{F}(x_0) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ invertibile.

Per il Teorema delle funzioni implicite esistono intorno aperti $U = B_\alpha(y_0)$, $V = B_\beta(x_0)$ e un' unica funzione di classe C^1 $\varphi = \varphi(y) : U \rightarrow V$ tale che $\mathbf{G}(\varphi(y), y) = \mathbf{F}(\varphi(y)) - y = 0$ per ogni $y \in U$; inoltre se $(x, y) \in U \times V$ verifica $\mathbf{G}(x, y) = \mathbf{F}(x) - y = 0$ allora $x = \varphi(y) = \varphi(\mathbf{F}(x))$.

Posto $B = U = B_\alpha(y_0)$, $A = \varphi(U) \subseteq V = B_\beta(x_0)$ si ha allora che $\varphi : B \rightarrow A$ è biunivoca e $\mathbf{F}|_A : A \rightarrow B$ è la sua inversa di classe C^1 .

Infatti per quanto visto prima $\mathbf{F}(\varphi(y)) = y$ per ogni $y \in U = B$, ma anche $x = \varphi(\mathbf{F}(x))$ per ogni $x \in A$: se $x \in A = \varphi(B)$ è $x = \varphi(y)$ per un $y \in B$, cioè $y = \mathbf{F}(x)$ e quindi $x = \varphi(\mathbf{F}(x))$. Inoltre A è aperto perché $A = \varphi(B) = \mathbf{F}^{-1}(B) \cap V$ con \mathbf{F} continua.

Infine la formula per la matrice jacobiana segue o dal teorema delle funzioni implicite, essendo $D_y\mathbf{G}(x, y) = -I_N$, oppure dal fatto che $F_A \circ \varphi = I_B$, $\varphi \circ \mathbf{F}_A = I_A$ e dal differenziale delle funzioni composte. \square

Osservazione 5.3. Si osservi che il teorema è solo locale senza altre ipotesi aggiuntive: anche se $\mathbf{F}'(x)$ è invertibile per ogni $x \in O$ non è detto che \mathbf{F} sia globalmente invertibile. Un controesempio è la funzione $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, periodica in y quindi non invertibile, ma con determinante jacobiano mai nullo.

Una conclusione importante può essere però dedotta immediatamente dal teorema:

Corollario 5.3. *Se nelle ipotesi precedenti $\mathbf{F}'(x)$ è invertibile $\forall x \in O$ allora \mathbf{F} è un' applicazione aperta, cioè trasforma aperti in aperti.*

Osservazione 5.4. Abbiamo dimostrato il Teorema della funzione inversa come conseguenza del Teorema delle funzioni implicite, ma è possibile viceversa dedurre quest' ultimo dal primo (in tal caso il teorema con dimostrazione più impegnativa sarà il teorema della funzione inversa e molti testi adottano questo punto di vista). Il vantaggio dell' approccio che abbiamo usato è che la prima parte del teorema delle funzioni implicite vale in ipotesi di sola continuità rispetto alle variabili che abbiamo chiamato x_1, \dots, x_n , e questo si adatta a situazioni in cui funzioni differenziabili in spazi di Banach dipendono da parametri che variano con continuità in spazi solo metrici o topologici.

Comunque se si è dimostrato il teorema della funzione inversa la dimostrazione del teorema delle funzioni implicite (nel caso C^1) procede schematicamente così: sia $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) \in C^1(O; \mathbb{R}^m)$, O aperto di \mathbb{R}^{n+m} , e sia $(a, b) \in O$ tale che $\mathbf{F}(a, b) = 0$, $D_y\mathbf{F}(a, b)$ è invertibile, cioè $\det(D_y\mathbf{F})(a, b) \neq 0$.

Definiamo $\mathbf{H}(x, y) = (x, \mathbf{F}(x, y)) : O \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. Si ha allora che la matrice jacobiana di \mathbf{H} ha la matrice identità $n \times n$ come sottomatrice costituita dalle prime n righe e colonne, quindi $\det(D\mathbf{H}(a, b)) = \det(D_y\mathbf{F})(a, b) \neq 0$. Per il Teorema della funzione inversa esistono un intorno aperto di (a, b) , che può essere preso nella forma $B_1 \times B_2$ con B_1 intorno di a , B_2 intorno di b , e un intorno W di $\mathbf{H}(a, b) = (a, 0)$ che può essere preso nella forma $W = A_1 \times A_2$ con A_1 intorno di a e A_2 intorno di 0 , tali che $\mathbf{H}|_{B_1 \times B_2} : B_1 \times B_2 \rightarrow A_1 \times A_2$ è invertibile con inversa $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x, y) : A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ di classe C^1 . È chiaro che \mathbf{K} ha la forma $\mathbf{K}(x, y) = (x, k(x, y))$ per una funzione $k \in C^1(A_1 \times A_2; \mathbb{R}^m)$. Ponendo $\varphi(x) = k(x, 0)$ si ottiene la funzione $\varphi : A_1 \rightarrow B_2$ tale che $\mathbf{F}(x, \varphi(x)) = 0$ per ogni x .

Vogliamo ora introdurre (brevemente e in forma schematica, visto che il concetto sarà approfondito in seguito) il concetto di sottovarietà differenziabile in \mathbb{R}^N , perché le definizioni e le proprietà relative si basano strettamente sui teoremi delle funzioni implicite e della funzione inversa.

Il concetto di varietà differenziabile è sostanzialmente quello di insieme descritto dagli zeri di una funzione, con le ipotesi del Teorema delle funzioni implicite.

Definizione 5.2. Un sottoinsieme non vuoto M di \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, è una (sotto)varietà differenziabile in \mathbb{R}^N di classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, dimensione n e codimensione m , con $1 \leq n, m \leq N - 1$, $n + m = N$ se per ogni $z_0 \in M$ esiste un intorno O di z_0 in \mathbb{R}^N e una funzione $\mathbf{F} \in C^k(O; \mathbb{R}^m)$ tale che

- i) $M \cap O = \{z \in O : \mathbf{F}(z) = \mathbf{0}\}$
- ii) La matrice $J_{\mathbf{F}}(z)$ ha rango massimo m per ogni $z \in O$.

Osservazione 5.5. Si osservi che una definizione equivalente richiede che il rango di $J_{\mathbf{F}}(z_0)$ sia m : se $\text{rank}(J_{\mathbf{F}}(z_0)) = m$ esiste un intorno O' di z_0 tale che il rango di $J_{\mathbf{F}}(z)$ sia m per ogni $z \in O'$.

Inoltre nel caso di $n = N$, $m = 0$ definiamo sottovarietà di dimensione N di \mathbb{R}^N semplicemente un aperto di \mathbb{R}^N , mentre si può definire varietà di dimensione $n = 0$ un sottoinsieme discreto di \mathbb{R}^N (costituito da punti isolati, le cui componenti connesse sono punti).

Scriveremo per semplicità $z = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e come nel teorema delle funzioni implicite supporremo che il determinante di ordine m diverso da zero sia $\det(D_y\mathbf{F}(x, y))$. Naturalmente in generale non saranno le ultime m variabili quelle che determinano le colonne linearmente indipendenti della matrice jacobiana. Con queste notazioni, dal teorema delle funzioni implicite è chiaro che M è una varietà di dimensione n se e solo se localmente è espressa come grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^m . La

definizione precedente equivale ad un' altra caratterizzazione (più generale del caso di grafico di una funzione, che ne è un caso particolare), in termini di **parametrizzazione**, che è molto utile quando si vuole definire una misura e una teoria dell' integrazione su varietà.

Teorema 5.5. *Il sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^N$ è una sottovarietà di dimensione n e classe C^1 di \mathbb{R}^N se e solo se per ogni $z_0 \in M$ esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un intorno aperto O di z_0 in \mathbb{R}^N , e una funzione $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}, \dots, \Phi_{n+m}) : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 , iniettiva, tale che*

- i) $\Phi(U) = M \cap O$
- ii) *La matrice $J_\Phi(u)$ ha rango massimo n per ogni $u \in U$.*

Si dice in tal caso che $\Phi = \Phi(u) = \Phi(u_1, \dots, u_n)$ è una **parametrizzazione locale** di M , che viene quindi descritta come immagine di una deformazione continua di un aperto di \mathbb{R}^n , ciò che spiega il termine di varietà di dimensione n , oggetto di dimensione n in uno spazio a dimensione superiore N .

Dimostrazione (schema). Se M è una varietà, dal Teorema delle funzioni implicite sappiamo che localmente M è il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, e in questo caso esiste una parametrizzazione cartesiana: $\Phi(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, \varphi(u))$.

Se viceversa $M \cap O = \Phi(U)$ con la Φ come sopra, e per semplicità supponiamo che $\det\left(\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}(u_0)\right) \neq 0$, dove $u_0 \in U$ è tale che $\Phi(u_0) = z_0$, per il teorema delle funzione inversa, localmente $\Phi_1 = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ è invertibile, e possiamo quindi esprimere u_1, \dots, u_n in funzione di x_1, \dots, x_n . Ne segue che indicando con (x, y) le variabili di un punto di M , possiamo esprimere y_1, \dots, y_m in funzione di x_1, \dots, x_n : $y = \varphi(x)$. Posto $\mathbf{F}(x, y) = y - \varphi(x)$ si ottiene la funzione il cui luogo degli zeri è localmente la varietà. \square

Inoltre si può dare un' altra caratterizzazione di una varietà, in linea con l' Osservazione 5.4.

Definizione 5.3. Siano O, G aperti di \mathbb{R}^N . Un **diffeomorfismo di classe C^1** H tra O e G è un' applicazione biunivoca $H : O \rightarrow G$ di classe C^1 tale che l' inversa H^{-1} è anche di classe C^1 .

Teorema 5.6. *Il sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^N$ è una sottovarietà di dimensione n e classe C^1 di \mathbb{R}^N se e solo se per ogni $z_0 \in M$ esistono un intorno aperto O di z_0 in \mathbb{R}^N , un aperto G in \mathbb{R}^N e un diffeomorfismo $H : O \rightarrow G$ di classe C^1 tale che $H(M \cap O) = G \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) = \{(x, y) \in G : y_1 = \dots = y_m = 0\}$*

Dimostrazione (schema). Se M è una varietà si definisce localmente $H(x, y) = (x, F(x, y))$ come nell' Osservazione 5.4.

Viceversa se H è un tale diffeomorfismo, e ha la forma $H(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, con F_1 a valori in \mathbb{R}^n , F_2 a valori in \mathbb{R}^m , si prende

$F = F_2$ come funzione che definisce la varietà come insieme degli zeri di F . \square

Definizione 5.4. Il vettore $h \in \mathbb{R}^N$ è detto **vettore tangente** alla varietà M in un punto $z_0 \in M$ se esiste una curva di classe C^1 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^N$ a valori in M , cioè tale che $\alpha(t) \in M \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tale che $\alpha(0) = z_0$, $\alpha'(0) = h$.

L'insieme $T_M z_0$ dei vettori tangenti in $z_0 \in M$ è detto **spazio (vettoriale) tangente a M in z** .

Lo **spazio affine tangente a M in z** è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^N che hanno la forma $z_0 + h$, con h vettore tangente.

Un vettore $k \in \mathbb{R}^N$ è detto **normale** alla varietà M in un punto $z_0 \in M$ se $k \cdot h = 0$ per ogni vettore tangente h a M in z_0 .

L'insieme $N_M z_0$ dei vettori normali in $z_0 \in M$ è detto **spazio normale a M in z** .

Teorema 5.7. Sia M una sottovarietà di dimensione n e classe C^1 di \mathbb{R}^N .

i) Lo spazio tangente $T_M z_0$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^N di dimensione n , e se localmente M è descritto come luogo degli zeri di $F = (F_1, \dots, F_m) : O \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, coincide con $\text{Ker } DF(z_0) = \{h \in \mathbb{R}^N : \nabla F_i \cdot h = 0, i = 1, \dots, m\}$, nucleo del differenziale di F .

I vettori $\nabla F_1(z_0), \dots, \nabla F_m(z_0)$ generano lo spazio normale.

ii) Se localmente M è immagine della parametrizzazione iniettiva $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, i vettori derivate parziali $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u_0), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(u_0)$ generano lo spazio tangente a M in $z_0 = \Phi(u_0)$.

iii) Se localmente M è descritto come immagine inversa di $G \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\})$ attraverso un diffeomorfismo H lo spazio tangente a z_0 , se $y_0 = H(z_0) = (x_0, \mathbf{0})$, è dato dallo spazio $J_{H^{-1}}(y_0)(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) = [J_H(z_0)]^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\})$.

Dimostrazione (schema). i) Se $h = \alpha'(0) \in T_M z_0$, con $\alpha(t) \in M$ si ha che $\mathbf{F}(\alpha(t)) = 0$, quindi $DF(z_0)h = DF(z_0)\alpha'(0) = D(F \circ \alpha)(0) = 0$.

Supponiamo viceversa che $DF(z_0)h = 0$ (supponendo sempre che $z = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e che il determinante di ordine m diverso da zero sia $\det(D_y \mathbf{F}(x, y))$). Sia $H(x, y) = (x, F(x, y))$ il diffeomorfismo locale che definisce M come nella caratterizzazione data dal Teorema 5.6, e sia $H(z_0) = z'_0 = (x_0, \mathbf{0})$. Essendo $DF(z_0)h = 0$ si ha che $DH(z_0)h = \tilde{h} = (h_1, \dots, h_n, \mathbf{0})$, e quindi $DH^{-1}(z'_0)(\tilde{h}) = h$.

Posto $\alpha(t) = H^{-1}(z'_0 + t\tilde{h}) = H^{-1}((x_0, \mathbf{0}) + t(h_1, \dots, h_n, \mathbf{0}))$ si ottiene una curva, che giace in M perché $(x_0, \mathbf{0}) + t(h_1, \dots, h_n, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$, e che ha per vettore derivato in $t = 0$ il vettore $\alpha'(0) = DH^{-1}(z'_0)(\tilde{h}) = h$.

Ne segue che i vettori $\nabla F_1(z_0), \dots, \nabla F_m(z_0)$, che sono linearmente indipendenti e ortogonali al nucleo di DF , generano lo spazio normale.

ii) Ogni vettore derivato $\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$ è tangente a M in $z_0 = \Phi(u_0)$: infatti è il vettore derivato in $t = 0$ della curva $\alpha(t) = \Phi(u_0 + te_k)$ su M . Essendo n vettori linearmente indipendenti essi generano lo spazio tangente ...

iii) A ogni curva in M corrisponde biunivocamente una curva in $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$ e i vettori derivati di tale curve sono i vettori in $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$... \square

Definizione 5.5. Sia M una sottovarietà di dimensione n e classe C^1 di \mathbb{R}^N , e sia $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita su un intorno aperto W (in \mathbb{R}^N) di un punto $z_0 \in M$. Si dice che z_0 è un punto di massimo [minimo] locale vincolato su M per h se $h(z) \leq h(z_0)$ [$h(z) \geq h(z_0)$] per ogni $z \in W_1 \cap M$, dove $W_1 \subseteq W$ è un intorno di z_0 .

Teorema 5.8 (Moltiplicatori di Lagrange). *Se localmente M è descritto come luogo degli zeri di $F = (F_1, \dots, F_m) : O \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ e z_0 è un punto di massimo [minimo] locale vincolato su M per una funzione reale h di classe C^1 , allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla h(z_0) = \lambda_1 \nabla F_1(z_0) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(z_0)$.*

Dimostrazione (schema). Se $\alpha(t)$ è una curva in M che passa al tempo $t = 0$ per z_0 si ha che $t = 0$ è massimo [minimo] locale della funzione $h(\alpha(t))$, quindi la sua derivata è nulla: $\nabla h(z_0) \cdot \alpha'(0) = 0$.

In altre parole $\nabla h(z_0)$ è ortogonale ad ogni vettore tangente in z_0 , quindi è combinazione lineare dei vettori $\nabla F_k(z_0)$ che generano lo spazio normale. \square

6. QUALCHE ESEMPIO DI SPAZIO DI BANACH DI DIMENSIONE
INFINITA. APPLICAZIONI LINEARI CONTINUE. SPAZI DI FUNZIONI
CONTINUE. TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

6.1. Applicazioni lineari continue. Equivalenza delle norme in spazi di dimensione finita.

Definizione 6.1. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati. Diremo che l' applicazione lineare $T : X \rightarrow Y$ è un' **applicazione lineare limitata** da X in Y , o un **operatore lineare limitato** da X in Y , se esiste $L > 0$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq L \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Si noti che in questo contesto un' applicazione lineare limitata (da leggersi tutto insieme) non è limitata nel senso delle applicazioni generali tra spazi metrici (e purtroppo questa terminologia può indurre confusione). Ha invece la *proprietà di trasformare insiemi limitati in insiemi limitati*: se L è come nella definizione si osserva subito che l' immagine di una palla di centro x e raggio r è contenuta nella palla di centro $y = Tx$ e raggio Lr .

Teorema 6.1. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati e sia $T : X \rightarrow Y$ un' applicazione lineare. Le seguenti proprietà sono equivalenti.

- i) T è lipschitziana (quindi uniformemente continua)
- ii) T è continua in 0
- iii) T è limitata

Dimostrazione. i) \implies ii) è ovvio.

ii) \implies iii). Sia T continua in 0 e sia $\delta > 0$ (corrispondente a $\varepsilon = 1$) tale che se $\|x\|_X = \|x - 0\|_X \leq \delta$ allora $\|Tx\|_Y = \|Tx - T0\|_Y \leq 1$. Se $x \in X$, $x \neq 0$, si può scrivere $x = \frac{\|x\|_X}{\delta} (\delta \frac{x}{\|x\|_X})$, con $\|\delta \frac{x}{\|x\|_X}\|_X = \delta$. Per la linearità di T si ha allora che $\|Tx\|_Y = \frac{\|x\|_X}{\delta} \|T(\delta \frac{x}{\|x\|_X})\|_Y \leq \frac{\|x\|_X}{\delta} 1 = \frac{\|x\|_X}{\delta}$, e quindi iii) è vera con $L = \frac{1}{\delta}$.

iii) \implies i). Per la linearità di T si ha che $\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq L \|x - y\|_X$. □

Il ruolo svolto dalle applicazioni lineari nel caso di dimensione finita, è svolto nel caso generale di applicazioni lineari tra spazi di Banach da un sottoinsieme delle applicazioni lineari, costituito dalle **applicazioni lineari continue**.

Ad esempio la nozione di **differenziabilità** e di **differenziale** per una funzione tra due spazi di Banach X, Y , viene data come nel caso di \mathbb{R}^N , ma si richiede che il differenziale sia un' applicazione lineare **continua** tra X, Y .

Usando questa definizione, parte di tutto quello che abbiamo visto nei capitoli precedenti può essere esteso al caso più generale di applicazioni $F : O \subset X \rightarrow Y$, dove X, Y sono spazi di Banach e O è un aperto di X . Si ottengono così le più importanti proprietà del **Calcolo differenziale in spazi di Banach**.

In particolare l' enunciato e la dimostrazione dei Teoremi delle funzioni implicite e della funzione inversa continuano a valere (con piccole varianti, ad esempio la condizione che il determinante di un' applicazione lineare sia non nullo è sostituito dall' invertibilità dell' applicazione lineare *continua* corrispondente).

Definizione 6.2. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati. Lo **spazio delle applicazioni lineari limitate** (\iff **continue**) è indicato con il simbolo $L(X; Y)$ e si verifica facilmente che è uno spazio vettoriale. Se $T \in L(X; Y)$ la norma (operatoriale) di T è definita da

$$\|T\| = \|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|=1} \|T x\|_Y$$

Se $Y = \mathbb{R}$, lo **spazio duale (topologico)** di X è lo spazio di Banach $X^* = L(X, \mathbb{R})$ con la **norma duale** $\|T\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |T x|$. Gli elementi di X^* sono detti **funzionali lineari continui** su X .

Si noti che, essendo T lineare, se $x \neq 0$ allora $y = \frac{x}{\|x\|_X}$ ha norma 1 in X e $T(y) = \frac{\|T x\|_Y}{\|x\|_X}$. Segue allora facilmente (verificarlo) che

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \frac{\|T x\|_Y}{\|x\|_X}$$

e in particolare per ogni $x \in X$ si ha che $\|T x\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)} \|x\|_X$.

Si verifica facilmente che $\|T\|_{L(X,Y)}$ definisce una norma su $L(X, Y)$. Inoltre si dimostra che se Y è uno spazio di Banach allora lo spazio $L(X, Y)$ è uno spazio di Banach.

Nel caso di spazi a dimensione finita ogni applicazione lineare è limitata, come mostra il seguente teorema, e questo spiega perché la nozione di applicazione lineare limitata non appare nell' algebra lineare in \mathbb{R}^k .

Teorema 6.2. *Siano X, Y spazi normati, con X di dimensione finita, e sia $T : X \rightarrow Y$ una applicazione lineare. Allora T è continua. Se inoltre T è un isomorfismo allora (Y ha dimensione finita e) T è un omeomorfismo, cioè T e T^{-1} sono applicazioni lineari continue.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il teorema nel caso in cui $X = \mathbb{R}^N$, con la norma $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x^i|$ se $x = (x^1, \dots, x^N)$.

Se $(e_i)_{i=1, \dots, N}$ è la base canonica di \mathbb{R}^N , si ha che $\|T x\|_Y = \|T(\sum_i x^i e_i)\|_Y = \|\sum_i x^i T(e_i)\|_Y \leq \sum_i |x^i| \|T(e_i)\|_Y \leq \|x\|_\infty (\sum_i \|T(e_i)\|_Y) = M \|x\|_X$, con $M = \sum_i \|T(e_i)\|_Y$. Ne segue che T è limitata, equivalentemente continua.

Se inoltre T è un isomorfismo si ha che $Tx \neq 0$ se $x \neq 0$, quindi l' applicazione $x \in X \mapsto \varphi(x) = \|Tx\|_Y \in \mathbb{R}$, che è continua come composta di applicazioni continue, è positiva sulla sfera unitaria $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty = 1\}$. Essendo S chiuso e limitato in \mathbb{R}^N , esso è compatto in X ⁵, e per il Teorema di Weierstrass φ ha minimo positivo su S^{N-1} : esiste $m > 0$ tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ con $\|y\| = 1$ si ha $\|Ty\|_Y \geq m$, e allora se $x \neq 0$ si ha che $m \leq T(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|} \|Tx\|_Y$. Ne segue che $m \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, equivalentemente $m \|T^{-1}y\|_X \leq \|y\|_Y$ per ogni $y \in Y$, e T^{-1} è limitata dunque continua.

Nel caso generale se X è uno spazio a dimensione finita esistono $N \in \mathbb{N}$ e un isomorfismo $T_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow X$ (dato, se $\{u_1, \dots, u_N\}$ è una base di X da $T_1((x^1, \dots, x^N)) = \sum_i x^i u_i$). Per quanto visto nel caso particolare precedente T_1 , T_1^{-1} e $T \circ T_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow Y$ sono continui, scegliendo la norma $\|\cdot\|_\infty$ in \mathbb{R}^N , e allora è continuo pure $T = (T \circ T_1) \circ T_1^{-1}$. Se poi T è un isomorfismo allora Y ha dimensione finita e per quanto appena dimostrato l' applicazione lineare T^{-1} con dominio Y è necessariamente continua. \square

Definizione 6.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. La **topologia** dello spazio metrico, o **topologia indotta dalla distanza** d è la collezione $\mathcal{T}(d)$ dei sottoinsiemi aperti di X .

Se d_1, d_2 sono distanze su un insieme X si dice che la distanza d_2 è **(topologicamente) più fine** della distanza d_1 , o che d_1 è **(topologicamente) meno fine** della distanza d_2 , se $\mathcal{T}(d_1) \subseteq \mathcal{T}(d_2)$, cioè se ogni aperto rispetto a d_1 è anche aperto rispetto a d_2 . Se $\mathcal{T}(d_1) \subset \mathcal{T}(d_2)$, $\mathcal{T}(d_1) \neq \mathcal{T}(d_2)$, diremo che d_2 è **strettamente più fine** della distanza d_1 .

Due distanze d_1, d_2 su X sono dette **topologicamente equivalenti** se determinano la stessa topologia su X , cioè se $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$.

Segue facilmente dalla definizione che d_2 è più fine di d_1 se e solo se ogni palla aperta nella metrica d_1 contiene una palla aperta nella metrica d_2 , e quindi d_1, d_2 sono topologicamente equivalenti se e solo se ogni palla aperta nella metrica d_1 contiene una palla aperta nella metrica d_2 e ogni palla aperta nella metrica d_2 contiene una palla aperta nella metrica d_1 .

La topologia di X determina gli aperti, quindi i chiusi e gli intorni di un punto, come pure la continuità di funzioni definite su X , come segue dal Teorema . Le nozioni di aperto, chiuso, intorno, funzione continua, sono esempi di nozioni topologiche. Diremo informalmente che un concetto (o una proprietà) è *topologico* se è definito in termini di intorni, o insiemi aperti.

⁵abbiamo dimostrato che i chiusi e limitati sono compatti in \mathbb{R}^N con la norma euclidea, e sappiamo dalle disuguaglianze (1.6) che la norma $\|\cdot\|_\infty$ è ad essa equivalente

Passando da una metrica d a un'altra metrica d' ad essa topologicamente equivalente non cambiano dunque le proprietà topologiche dello spazio, anche se la distanza tra i punti cambia.

Una proprietà *metrica* è invece una proprietà che non è conservata nel passaggio a metriche equivalenti. Ad esempio la limitatezza di un insieme è una proprietà metrica.

Definizione 6.4. Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici. Un **omeomorfismo** tra X e Y è un'applicazione biunivoca $f : X \rightarrow Y$ tale che f e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sono funzioni continue. Si dice che gli spazi X e Y sono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$.

Una conseguenza immediata del Teorema 2.2 è la seguente

Proposizione 6.1.

- i) *Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici, e sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione biunivoca. f è un omeomorfismo se e solo se è un'applicazione continua e aperta [o continua e chiusa], cioè se e solo se è continua e per ogni aperto [chiuso] B di X l'immagine $f(B)$ è un aperto [chiuso] di Y .*
- ii) *Se d_1, d_2 sono metriche su un insieme X la metrica d_2 è più fine della metrica d_1 se e solo se l'applicazione identità definita da $I(x) = x$, $x \in X$, è continua se considerata come applicazione tra gli spazi metrici $X_2 = (X, d_2)$, $X_1 = (X, d_1)$.*
- iii) *Due metriche d_1, d_2 su un insieme X sono topologicamente equivalenti se e solo se l'applicazione identità definita da $I(x) = x$, $x \in X$, è un omeomorfismo se considerata come applicazione tra gli spazi metrici $X_1 = (X, d_1)$, $X_2 = (X, d_2)$.*

Dimostrazione. i) Posto $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ si ha che f è un omeomorfismo se e solo se g è continua, e per il Teorema 2.2 g è continua se e solo se per ogni aperto [chiuso] B di X l'insieme $g^{-1}(B) = (f^{-1})^{-1}(B) = f(B)$ è aperto [chiuso] in Y . ii) e iii) sono quindi facili conseguenze. \square

Una conseguenza della proposizione precedente e del Teorema 6.1 è la seguente. Se $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sono due norme su uno spazio vettoriale X diremo che la norma $\|\cdot\|_2$ è (topologicamente) più fine della norma $\|\cdot\|_1$ (topologicamente equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$) se tali sono le metriche indotte dalle norme.

Corollario 6.1. *Sia X uno spazio vettoriale e siano $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ due norme su X . La norma $\|\cdot\|_2$ è più fine della norma $\|\cdot\|_1$ se e solo se esiste una costante $C > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ per ogni $x \in X$. Tali norme sono topologicamente equivalenti se e solo se esistono due costanti c, C , con $0 < c \leq C$ tali che $c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$ per ogni $x \in X$.*

Le distanze indotte dalle norme $\|x\|_p$ su \mathbb{R}^N sono tutte equivalenti, come si verifica facilmente grazie alle disuguaglianze 1.6.

Il Teorema 6.2 permette di dimostrare che in realtà tutte le norme su \mathbb{R}^N sono topologicamente equivalenti.

Corollario 6.2. *Tutte le norme su uno spazio di dimensione finita sono topologicamente equivalenti.*

Dimostrazione. Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono due norme sullo spazio vettoriale X , la norma $\|\cdot\|_1$ è più fine della norma $\|\cdot\|_2$, cioè $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ per ogni $x \in X$, se e solo se l'identità $I(x) = x$, $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ è continua, e come visto ogni applicazione lineare definita su uno spazio di dimensione finita è continua. \square

Se X e Y sono omeomorfi si possono deformare con continuità l'uno nell'altro, e le topologie di X e Y si corrispondono biunivocamente.

Le distanze tra elementi corrispondenti sono però in generale differenti. Un caso particolare è invece quello di spazi isometrici, secondo la seguente

Definizione 6.5. Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici. Una applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta **isometria** se per ogni coppia (a, b) di punti di X si ha che $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$. Se esiste una isometria surriettiva $f : X \rightarrow Y$ si dice che gli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) sono **isometrici**.

Un'isometria $f : X \rightarrow Y$ è chiaramente iniettiva, perché se $a \neq b$ è $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b) > 0$, quindi $f(a) \neq f(b)$. Se esiste un'isometria surriettiva $f : X \rightarrow Y$ essa è dunque una corrispondenza biunivoca e dalla definizione si vede immediatamente che l'applicazione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è anch'essa un'isometria. Due spazi isometrici sono dunque indistinguibili in quanto spazi metrici: l'applicazione f fa corrispondere biunivocamente punti di X e punti di Y conservando le distanze tra elementi corrispondenti.

Particolarizzando ancora nel caso di spazi normati si ha la seguente

Definizione 6.6. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati. Una applicazione lineare continua $T : X \rightarrow Y$ che sia anche una isometria è detta **isometria lineare**.

Ciò equivale a richiedere che sia una trasformazione lineare che conserva la norma :

$$(6.1) \quad \|T(x)\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Se esiste una isometria lineare surriettiva $T : X \rightarrow Y$ si dice che gli spazi normati $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono **isometricamente isomorfi**.

Esercizio 6.1. Dimostrare che $T : X \rightarrow Y$ è una isometria lineare se e solo se è una trasformazione lineare che verifica la (6.1)

6.2. Spazi di funzioni limitate e continue. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice che una successione $\{f_n\}$ di funzioni $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ **converge puntualmente** a una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se per ogni $x \in X$ la successione $f_n(x)$ converge a $f(x)$:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Si dice invece che $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall x \in X, \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

equivalentemente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$, cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Definizioni analoghe, sostituendo il modulo con la norma, si danno se il codominio è \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}^+$, o anche uno spazio di Banach Y e quasi tutto quello che diremo vale anche in questo caso più generale. Inoltre in tutto quello che segue si possono considerare funzioni a valori complessi e e gli spazi vettoriali normati complessi che ne risultano.

È chiaro che se f_n converge uniformemente a f , allora f converge puntualmente a f . Il viceversa è falso, come vedremo subito. La differenza è che se f_n converge uniformemente a f , nella definizione precedente si può scegliere m a partire dal solo ε , e a partire dall'indice m la distanza di $f_n(x)$ da $f(x)$ sarà più piccola di ε per *tutti* i punti $x \in X$, mentre se f_n converge puntualmente a f in generale non si potrà determinare un m a partire dal solo ε .

Esempio 6.1. Siano $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ e definiamo, per $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$. Posto $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ si ha che f_n converge puntualmente alla funzione f . La convergenza non è però uniforme. Infatti $f(1) - f_n(1) = 1 - 1 = 0$, ma per ogni n fissato $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 1$, mentre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, e quindi $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la convergenza non è uniforme.

Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **limitata** se l'immagine $f(X)$ è un insieme limitato di \mathbb{R} . Quindi f è limitata se esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$.

Nella definizione di convergenza uniforme di una successione di funzioni non è necessario supporre che le funzioni siano limitate, e questo è comodo in molti casi. Ad esempio se $X = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = x - \frac{1}{n}$, $f(x) = x$, si ha che f_n converge uniformemente a f , ma né la f né le f_n sono limitate.

Nell'insieme delle funzioni limitate è però possibile introdurre una norma tale che la convergenza uniforme equivalga alla convergenza nella metrica indotta dalla norma.

Definizione 6.7. Indichiamo con il simbolo $B(X)$ l'insieme delle **funzioni limitate** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con il simbolo $C(X)$ l'insieme delle **funzioni continue** da X in \mathbb{R} , e con il simbolo $BC(X)$ l'insieme delle **funzioni continue e limitate** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Il seguente lemma è di verifica immediata.

Lemma 6.1. $B(X)$ e $C(X)$ sono spazi vettoriali con le operazioni indotte dalle operazioni in \mathbb{R} : se $f, g \in B(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, le funzioni $(f + g)$, αf sono definite per $x \in X$ da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Inoltre $BC(X)$ è un sottospazio vettoriale di entrambi. Se X è uno spazio metrico compatto $BC(X)$ coincide con $C(X)$ (per il Teorema di Weierstrass ogni funzione continua su un compatto è limitata). Posto

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

si ha che $\|f\|_\infty$ è una norma su $B(X)$ (e quindi su $BC(X)$ e, se X è compatto su $C(X)$).

Inoltre una successione $\{f_n\} \subseteq B(X)$ converge a $f \in B(X)$ se e solo se f_n converge uniformemente a f .

La norma $\|f\|_\infty$ è detta **norma uniforme**.

Se f_n è una successione di funzioni non limitate da X a Y convergente uniformemente a una funzione $f : X \rightarrow Y$, è chiaro che le differenze $f_n - f$ costituiscono una successione di funzioni che definitivamente in n sono limitate e convergono uniformemente alla funzione costante 0. Ciò permette di applicare molte proprietà degli spazi $B(X)$ ($C(X)$) al caso più generale di successioni di funzioni (continue) uniformemente convergenti.

Se $f, g \in B(X)$ è definito anche il loro prodotto $fg \in B(X)$, indotto dal prodotto in \mathbb{R} : $(fg)(x) := f(x)g(x)$, $x \in X$.

Teorema 6.3. Gli spazi $B(X)$ e $BC(X)$ sono spazi di Banach, cioè sono completi nella metrica indotta dalla norma uniforme.

Talvolta si dà a questo teorema il nome di **Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme**. Infatti esso afferma che se una successione di funzioni è uniformemente di Cauchy, cioè è di Cauchy nella metrica indotta dalla norma uniforme, allora esiste una funzione f alla quale la successione converge uniformemente.

Dimostrazione. Sia f_n una successione di Cauchy in $B(X)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Ciò implica che per ogni $x \in X$ fissato la successione $f_n(x)$ è di Cauchy in \mathbb{R} e quindi per la completezza di \mathbb{R} converge a un elemento $y =: f(x) \in Y$. È chiaro che la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ così definita è limitata. Inoltre essendo $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ per $n, m \geq N$, passando al limite per $m \rightarrow \infty$ e tenendo presente che la distanza è una funzione

continua, si ottiene se $n \geq N = N(\varepsilon)$ che $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ e quindi la convergenza di f_n a f è uniforme e la successione f_n converge a f in $B(X)$.

Essendo $B(X)$ completo, il sottospazio $BC(X)$ è completo se e solo se è chiuso in $B(X; Y)$ e per dimostrarlo dobbiamo far vedere che se f_n è una qualunque successione in $BC(X; Y)$, convergente in $B(X; Y)$ a una funzione f , allora $f \in BC(X; Y)$. In altre parole bisogna mostrare che f è continua se le f_n continue convergono uniformemente a f .

Sia $x_0 \in X$ qualsiasi e sia $\varepsilon > 0$. Si ha che se $N \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

Ora a partire da ε si può determinare N tale che se $n \geq N$ si ha $\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, e quindi in particolare se $n = N$ il primo e terzo termine al secondo membro della precedente disuguaglianza sono non superiori a $\frac{\varepsilon}{3}$. Essendo poi f_N continua in corrispondenza di ε esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ si ha $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e allora dalla precedente disuguaglianza si ottiene $|f(x) - f(x_0)| \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $x_0 \in X$ e di $\varepsilon > 0$ si ha che f è continua in X . \square

Valgono per la convergenza uniforme le usuali regole per il limite di somme e prodotti di successioni reali. Ad esempio vale la seguente

Proposizione 6.2. *Sia X uno spazio metrico compatto e siano f_n, g_n successioni in $C(X)$, convergenti in $C(X)$ (cioè uniformemente) a funzioni continue f, g rispettivamente. Allora le funzioni $f_n + g_n, f_n g_n, f + g, f g$ sono in $C(X)$, cioè sono continue, e le successioni $f_n + g_n, f_n g_n$ convergono uniformemente alle funzioni $f + g, f g$ rispettivamente.*

In uno spazio normato si possono sommare gli elementi di una successione e quindi ha senso la nozione di **serie**.

Definizione 6.8. Sia $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, e sia $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in Y . La **serie** di termine generico x_n è la successione $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove $s_n = \sum_{k=0}^n y_k$ è la **somma parziale n -esima**. Se la successione s_n delle somme parziali ha limite $s \in Y$, si dice che la serie è **convergente**, s è detto **somma** della serie e indicato con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$, simbolo che si usa anche per indicare la successione stessa delle somme parziali, che esista o meno il limite.

È noto che per le serie reali se converge la serie dei moduli allora converge la serie stessa. La stessa proprietà vale in ogni spazio di Banach per la serie delle norme.

Definizione 6.9. Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ in uno spazio normato Y è detta **totalmente convergente** se converge (in \mathbb{R}) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\|$ delle norme dei termini della serie.

Teorema 6.4.

a) Sia Y uno spazio di Banach, cioè uno spazio normato completo.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ è una serie in Y totalmente convergente, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\| < +\infty$, allora essa converge in Y , e

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\|$$

b) Viceversa sia Y uno spazio normato tale che ogni serie in Y totalmente convergente è convergente in Y . Allora Y è uno spazio di Banach, cioè è completo nella metrica indotta.

Dimostrazione. a) Per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m y_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|y_i\|$$

e poiché la serie reale delle norme converge si ha che $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^m \|y_i\| = 0$.

Ne segue che la successione s_n è di Cauchy nello spazio completo Y e quindi converge a un elemento $y = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ di Y .

Infine la disuguaglianza finale segue dalla disuguaglianza triangolare e da un passaggio al limite: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\left\| \sum_{i=0}^n y_i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|y_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|y_i\| = T$. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha per la continuità della norma che $\left\| \sum_{i=0}^{\infty} y_i \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=0}^n y_i \right\| \leq T$.

b) Sia $\{y_n\}_{n \geq 1}$ una successione di Cauchy in Y . Preso $\varepsilon = 1$ esiste $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j, l \geq k_1$ si ha $\|y_j - y_l\| \leq 1$. Preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esiste $k_2 \in \mathbb{N}$, e si può supporre che $k_2 > k_1$, tale che per ogni $j, l \geq k_2$ si ha $\|y_j - y_l\| \leq \frac{1}{2}$. Proseguendo, si trova una successione crescente $n \mapsto k_n$ tale che se $j, l \geq k_n$ si ha $\|y_j - y_l\| \leq \frac{1}{2^n}$. In particolare, essendo $k_{n+1} > k_n$ si ha che $\|y_{k_{n+1}} - y_{k_n}\| < \frac{1}{2^n}$, e quindi, posto $y_{k_0} = 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_{k_{n+1}} - y_{k_n}\|$ converge, perché maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

Essendo totalmente convergente è allora convergente per ipotesi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (y_{k_{n+1}} - y_{k_n})$, la cui somma parziale n -esima è pari a $y_{k_1} - y_{k_0} + y_{k_2} - y_{k_1} + \dots + y_{k_{n+1}} - y_{k_n} = y_{k_{n+1}}$. Quindi la sottosuccessione y_{k_n} della successione di Cauchy $\{y_n\}$ converge, e allora (essendo di Cauchy con una sottosuccessione convergente) converge tutta la successione. \square

Nel caso dello spazio di Banach $Y = BC(X)$, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, con le $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitate converge totalmente se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sup_{x \in X} |f_n(x)| \right] < +\infty$$

e per quanto visto in tal caso la convergenza della serie è uniforme, cioè la successione delle somme parziali $s_n(x)$ converge uniformemente alla somma $s(x)$ della serie.

Si osservi che in generale è molto difficile analizzare l'eventuale convergenza uniforme di una serie di funzioni reali. Infatti si tratta di verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

ma come è noto solo in rari casi si riesce a scrivere la forma esplicita delle somme parziali $s_n(x)$ e della somma $s(x)$ della serie (la convergenza segue perlopiù da criteri di convergenza).

La convergenza totale, che è quindi condizione sufficiente per la convergenza uniforme della serie, ha il vantaggio di far riferimento al termine generale f_n e non alla somma parziale s_n della serie.

Esempio 6.2. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(e^{n!x^4})}{n\sqrt{n}}$$

Tale serie converge totalmente, e quindi uniformemente in $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, poiché $\frac{\arctan(e^{n!x^4})}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2} \forall x \in \mathbb{R}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} < +\infty$

Si noti tuttavia che la condizione di convergenza totale è molto forte e pur essendo sufficiente non è necessaria per la convergenza uniforme.

Esempio 6.3. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+x^2}$$

Tale serie converge puntualmente a una funzione $s(x)$ in \mathbb{R} per il criterio di Leibniz, e lo stesso criterio dà una maggiorazione del resto: per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2}$.

Ne segue che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ e quindi $\|s_n - s\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.

D'altra parte la serie non solo non converge totalmente, ma pur convergendo puntualmente in \mathbb{R} non converge assolutamente per alcun $x \in \mathbb{R}$, essendo il modulo del termine generale asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$, termine generale della serie armonica, divergente.

In generale per una successione di funzioni che converge puntualmente la convergenza non è uniforme. Il prossimo importante risultato illustra un caso nel quale invece i due tipi di convergenza coincidono.

Teorema 6.5 (Teorema di Dini). *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ una successione di funzioni reali continue, convergente puntualmente a una funzione f . Supponiamo che*

- i) f è continua
- ii) per ogni $x \in X$ la successione reale $f_n(x)$ è monotona, cioè $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ oppure $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ per ogni n

Allora la convergenza di f_n a f è uniforme.

Dimostrazione. Essendo le f_n e f continue, si ha che $g_n = f_n - f$ e $h_n = f - f_n$ sono continue e tendono a 0 puntualmente; inoltre g_n è decrescente se lo è f_n , mentre h_n è decrescente se f_n è crescente. Basta quindi dimostrare il teorema nel caso in cui f_n è una successione di funzioni convergente puntualmente a 0, e tale che per ogni $x \in X$ si ha $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

Sia $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $O_k = f_k^{-1}((0, \varepsilon)) = \{x \in X : f_k(x) < \varepsilon\}$. Per la continuità delle f_k ogni O_k è aperto, e dato che $0 \leq f_k(x) \rightarrow 0$ ogni $x \in X$ appartiene a O_k da un certo k in poi. Quindi $X = \cup_{k \in \mathbb{N}} O_k$ e per la compattezza di X si può estrarre un sottoricoprimento finito: $X = \cup_{i=1}^M O_i$.

D'altra parte essendo $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ si ha che $O_n \subseteq O_{n+1}$ per ogni n , e allora $\cup_{i=1}^M O_i = O_M$ e $X = O_M$. Ciò significa che se $n \geq M$, con M dipendente solo da ε , si ha $f_n(x) \leq f_M(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in X$, e f_n converge uniformemente a f . \square

6.3. Teorema di Ascoli-Arzelà. Vogliamo ora dimostrare un notevole criterio per la compattezza di sottoinsiemi dello spazio delle funzioni continue.

Definizione 6.10. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(S)$ è detto **equilimitato** in $x \in S$ se l'insieme $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ è limitato in \mathbb{R} : esiste $M = M_x > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ (M non dipende da $f \in \mathcal{F}$).

\mathcal{F} è detto **equicontinuo** in $x \in S$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_{\varepsilon, x} > 0 : \forall y \in X : d_X(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}$$

(δ non dipende da $f \in \mathcal{F}$)

Teorema 6.6 (Teorema di Ascoli-Arzelà). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue da S in \mathbb{R} tali che:*

- i) la collezione $\{f_n\}$ è equilimitata in ogni punto $x \in S$
- ii) la collezione $\{f_n\}$ è equicontinua in ogni punto $x \in S$

Esistono allora una funzione continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ e una sottosuccessione $\{f_{k_n}\}$ della successione data tale che f_{k_n} converge puntualmente a f su S . Inoltre per ogni compatto $K \subseteq S$ la successione f_{k_n} converge uniformemente a f su K .

Dimostrazione. **Primo passo: procedimento diagonale di Cantor**

Essendo S separabile esiste un sottoinsieme $D = \{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq S$ numerabile e denso in S . In questo primo passo della dimostrazione costruiremo una sottosuccessione che converge in ogni punto di D .

La successione $f_n(x_1)$ è per ipotesi limitata, quindi precompatta, in \mathbb{R} . Esiste quindi una sottosuccessione $f_{k_1(n)}$ tale che $f_{k_1(n)}(x_1)$ converge in \mathbb{R} a un numero y_1 che chiameremo $y_1 =: f(x_1)$.

La successione $f_{k_1(n)}(x_2)$ è limitata in \mathbb{R} e quindi esiste una sua sottosuccessione $f_{k_2(n)}$ tale che $f_{k_2(n)}(x_2)$ converge in \mathbb{R} a un numero $y_2 =: f(x_2)$. Inoltre, essendo $f_{k_2(n)}$ sottosuccessione di $f_{k_1(n)}$, $f_{k_2(n)}$ è sottosuccessione anche della successione originaria f_n e $f_{k_2(n)}(x_1)$ converge a $f(x_1)$.

Proseguendo induttivamente si costruiscono sottosuccessioni $f_{k_i(n)}$ di f_n , dove $k_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente, $k_i(n) \geq k_j(n)$ se $i \geq j$, $f_{k_i(n)}$ è sottosuccessione di ogni $f_{k_j(n)}$ se $j \leq i$, e tali che $f_{k_i(n)}$ converge nei punti x_1, \dots, x_i a numeri $y_i =: f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Posto $\alpha(n) = k_n(n)$ si ha che $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è strettamente crescente, dunque $f_{\alpha(n)}$ è sottosuccessione della successione originaria, e $f_{\alpha(n)}(x_i)$ converge per ogni $i \geq 1$ a $f(x_i)$.

Infatti $f_{k_i(i)} = f_{\alpha(i)}$ e per $n \geq i$ $f_{\alpha(n)}$ è sottosuccessione di $f_{k_i(n)}$.

Secondo passo: convergenza su tutto S e continuità del limite

Per semplicità indichiamo con f_n la sottosuccessione costruita nel primo passo. Mostriamo ora che tale sottosuccessione converge di fatto in tutto l'insieme S a una funzione continua f .

Sia $x \in S$ e sia $\varepsilon > 0$. Per l'equicontinuità della successione esiste $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tale che se $y \in S$ e $d(y, x) < \delta$ allora $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni n . Essendo poi D denso in S esiste $y \in D$ tale che $d(y, x) < \delta$.

Dato che $f_n(y)$ converge, essa è una successione di Cauchy in \mathbb{R} : se $n, m \geq n_0$ si ha $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ma allora anche $f_n(x)$ è di Cauchy, perché $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Essendo \mathbb{R} completo esiste quindi per ogni $x \in S$ il limite $\lim f_n(x) = y$ che chiameremo $f(x) := y$. Rimane dunque definita una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ alla quale una sottosuccessione della successione originaria converge puntualmente.

Inoltre se $x \in S$ e $\varepsilon > 0$ per ogni $y \in S$ tale che $d(y, x) < \delta = \delta(\varepsilon, x)$ si ha che $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ per ogni n . Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene che $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $x \in S$ e di $\varepsilon > 0$ ciò mostra che la funzione limite f è continua in S .

Terzo passo: convergenza uniforme sui compatti

Sia $K \subseteq S$ compatto e sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $y \in K$ esiste $\delta_y > 0$ tale che se $z \in B_{\delta_y}(y)$, cioè se $d(z, y) < \delta_y$, si ha che $|f_n(z) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ e anche, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $|f(z) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Essendo $\{B_{\delta_y}(y)\}_{y \in K}$ un ricoprimento aperto del compatto K , esiste

un numero finito di punti $y_1, \dots, y_M \in K$ tali che $K \subseteq \cup_{i=1}^M \{B_{\delta_{y_i}}(y_i)\}$, cioè per ogni $z \in K$ esiste un indice $i(z) \in \{1, \dots, M\}$ tale che $d(z, y_i) < \delta_{y_i}$.

Inoltre per ogni $i \in \{1, \dots, M\}$ esiste un indice $N = N_i$ tale che se $n \geq N$ si ha $|f_n(y_i) - f(y_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Se $N = \max\{N_1, \dots, N_M\}$ per $n \geq N$ si ha quindi che $|f_n(y_i) - f(y_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $i \in \{1, \dots, M\}$.

Se ora $z \in K$ è qualsiasi esiste $i(z) \in \{1, \dots, M\}$ tale che $d(z, y_i) < \delta_{y_i}$ e per $n \geq N$ si ha che $|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_n(y_i)| + |f_n(y_i) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(z)| \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Ne segue che $\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ se $n \geq N$, e N è stato determinato a partire dal solo ε , dunque la convergenza di f_n a f è uniforme in K . \square

In particolare se $S \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto, lo spazio $C(S)$ è uno spazio di Banach e il teorema precedente dà una condizione sufficiente affinché una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C(S)$ sia precompatta in $C(S)$: se \mathcal{F} è equicontinua ed equilimitata allora ogni successione di funzioni in \mathcal{F} è equicontinua ed equilimitata e per il teorema precedente si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente, cioè nella metrica di $C(S)$, a una funzione in $C(S)$. Ne segue che \mathcal{F} è un insieme precompatto in $C(S)$. In realtà la condizione di equicontinuita ed equilimitatezza è anche necessaria per la precompattatezza. Vale cioè il

Corollario 6.3 (Teorema di Ascoli-Arzelà). *Sia S un compatto di \mathbb{R}^N . Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme $\mathcal{F} \subseteq C(S)$ sia precompatto nello spazio di Banach $C(S)$ è che*

- i) *la collezione \mathcal{F} sia equicontinua in ogni punto $x \in S$.*
- ii) *la collezione \mathcal{F} sia equilimitata in ogni punto $x \in S$.*

Dimostrazione. La sufficienza è stata vista. Supponiamo ora che \mathcal{F} sia precompatto in $C(S)$, dunque totalmente limitato. Si ha allora che per ogni $x \in S$ l'insieme $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ è precompatto in \mathbb{R} : da ogni successione $f_n \in \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente, in particolare convergente in ogni punto $x \in S$. Essendo precompatto in \mathbb{R} l'insieme $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ è allora limitato, cioè la collezione \mathcal{F} è equilimitata.

Per verificare l'equicontinuita supponiamo che $x \in S$ e $\varepsilon > 0$. Essendo \mathcal{F} totalmente limitato esiste un sottoinsieme finito $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F} \subseteq \cup_{j=1}^l B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_j)$, dove le palle sono rispetto alla metrica uniforme di $C(S)$: per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste un indice j tale che $\|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Essendo le f_j continue e in numero finito esiste $\delta > 0$ ($= \min\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$) tale che se $d(y, x) < \delta$ si ha che $|f_j(y) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $j = 1, \dots, l$.

Se ora $f \in \mathcal{F}$ è qualsiasi, esiste un indice j tale che $\|f - f_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, cioè $|f(z) - f_j(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $z \in S$.

Abbiamo quindi determinato δ a partire dal solo ε e se $d(y, x) < \delta$ si ha che $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. \square

Osservazione 6.1. Le proprietà essenziali che sono intervenute nella dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà sono la separabilità di S , la completezza di \mathbb{R} , e il fatto che sottoinsiemi limitati di \mathbb{R} sono precompatti in \mathbb{R} . Le stesse argomentazioni permettono quindi di dimostrare il teorema nel caso più generale in cui S è sostituito da uno spazio metrico separabile X , $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è sostituito da uno spazio di Banach $(Y, \|\cdot\|)$, e l'ipotesi di equilimitatezza è sostituita dalla seguente ipotesi: per ogni $x \in X$ l'insieme $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ è precompatto in Y . In particolare il teorema vale per successioni di funzioni vettoriali continue in $S \subseteq \mathbb{R}^N$ a valori in \mathbb{R}^M .

Spazi $C^{0,\alpha}$. Sia S un compatto di \mathbb{R}^N . Una funzione $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **hölderiana di esponente α** , $0 < \alpha \leq 1$, se esiste $M \geq 0$ tale che $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in S$. Se $\alpha = 1$ una funzione hölderiana di esponente 1 è una funzione Lipschitziana.

La collezione delle funzioni hölderiane di esponente α su S si denota con il simbolo $C^{0,\alpha}(S)$ ed è un sottospazio vettoriale dello spazio $C(S)$, come si verifica subito.

L'applicazione $N_\alpha : C^{0,\alpha}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $N_\alpha(u) = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$ verifica tutte le proprietà di una norma, tranne una: se $N_\alpha(u) = 0$ non è detto che $u \equiv 0$, come si vede prendendo u costante. Si dice quindi che N_α è una *seminorma* su $C^{0,\alpha}(S)$. Per avere una norma basta però aggiungere la norma uniforme e porre $\|u\|_{C^{0,\alpha}(S)} = \|u\|_\infty + N_\alpha(u)$. Si osservi che come insieme $C^{0,\alpha}(S)$ è un sottoinsieme di $C(S)$, ma come spazio normato con la norma ora introdotta è diverso dal sottospazio normato di $C(S)$ con la norma indotta da quella uniforme.

Una conseguenza del Teorema di Ascoli-Arzelà è la seguente

Proposizione 6.3. *Se un insieme $\mathcal{F} \subseteq C^{0,\alpha}(S)$ di funzioni hölderiane è limitato nella norma di $C^{0,\alpha}(S)$, allora lo stesso insieme, considerato come sottoinsieme dello spazio normato $C(S)$ (con la norma e la topologia di $C(S)$) è precompatto in $C(S)$: da ogni successione u_n tale che $\|u_n\|_{C^{0,\alpha}(S)} \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente a una funzione continua.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà per verificare l'affermazione precedente basta verificare che se \mathcal{F} è limitato in $C^{0,\alpha}(S)$, allora \mathcal{F} è equilimitato ed equicontinuo in ogni punto. L'equilimitatezza è immediata, dato che $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C^{0,\alpha}(S)}$. Per quanto riguarda l'equicontinuita sia $\varepsilon > 0$; se $x, y \in S$ e $|x - y| \leq (\frac{\varepsilon}{M})^{\frac{1}{\alpha}} := \delta(\varepsilon)$ allora $|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^\alpha \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ e da questo segue subito l'equicontinuita. \square

Spazi $C^m([a, b])$ Siano a, b numeri reali, con $a < b$. L'insieme $C^1[a, b]$ delle funzioni a valori reali continue su $[a, b]$ con derivata f' continua in $[a, b]$ è uno spazio vettoriale, sottospazio di $C^0[a, b]$.

Una norma su $C^1[a, b]$ (strettamente più fine della norma uniforme) è la seguente:

$$\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

In modo analogo l'insieme $C^m[a, b]$ delle funzioni a valori reali continue su $[a, b]$ con derivate $f', \dots, f^{(m)}$ fino all'ordine m continue in $[a, b]$ è uno spazio vettoriale, sottospazio di $C^0[a, b]$, e una norma su $C^m[a, b]$ è la seguente:

$$\|f\|_{m,\infty} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(m)}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \dots + \max_{x \in [a,b]} |f^{(m)}(x)|$$

Un'altra conseguenza del Teorema di Ascoli-Arzelà è la seguente

Proposizione 6.4. *Se un insieme $\mathcal{F} \subseteq C^1([a, b])$ di funzioni di classe C^1 nell'intervallo $[a, b]$ è limitato nella norma di $C^1([a, b])$, allora lo stesso insieme, considerato come sottoinsieme dello spazio normato $C^0([a, b])$ è precompatto in $C^0([a, b])$: da ogni successione u_n tale che $\|u_n\|_{C^1([a,b])} \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente a una funzione continua.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà per verificare l'affermazione precedente basta verificare che se \mathcal{F} è limitato in $C^1([a, b])$, allora \mathcal{F} è equilimitato ed equicontinuo in ogni punto.

Supponiamo dunque che esista $M > 0$ tale che $\|u\|_{C^1([a,b])} \leq M$ per ogni $u \in \mathcal{F}$. L'equilimitatezza della collezione \mathcal{F} è immediata, dato che $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C^1([a,b])}$.

Per quanto riguarda l'equicontinuita per il teorema del valor medio se $x, y \in [a, b]$ esiste $z \in [a, b]$ compreso nell'intervallo di estremi x e y tale che $u(x) - u(y) = u'(z)(x - y)$. Ne segue che se $\varepsilon > 0$ e $|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ allora $|u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$ per ogni $u \in \mathcal{F}$. \square

Analoghe proprietà valgono anche per funzioni di più variabili.

Osservazione 6.2. Osserviamo che mentre tutte le norme sono equivalenti in uno spazio di dimensione finita e quindi la compattezza in una norma equivale a quella in qualsiasi altra, nello spazio $C^1([a, b])$ che abbiamo ora considerato, la scelta della norma è essenziale per avere ad esempio proprietà di compattezza (si dimostra che la palla unitaria nella norma C^1 non è compatta nella norma C^1 , mentre per la proposizione precedente è compatta nella norma uniforme C^0).

In generale trovare una condizione di compattezza in spazi di Banach di dimensione infinita non è banale. Infatti si dimostra che in uno spazio normato di dimensione infinita la sfera unitaria S^1 dei vettori che hanno norma 1 non è mai compatta, né a fortiori lo è la palla unitaria chiusa \overline{B}_1 e quindi ogni insieme che ha un interno non vuoto.

Per "vederlo" in un caso particolare, e per vedere qualche altro controesempio di proprietà familiari in dimensione finita che non valgono in dimensione infinita, consideriamo alcuni spazi di successioni.

Spazi l^p L'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni reali è uno spazio vettoriale reale, con l'addizione e la moltiplicazione scalare definite per componenti (se $x = (x^i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y^i)_{i \in \mathbb{N}}$, si pone $x + y = z$ con $z^i = x^i + y^i \dots$). Consideriamo i seguenti sottoinsiemi:

- Se $1 \leq p < \infty$, lo spazio $\mathbf{l}^p = \mathbf{l}^p(\mathbb{N})$ è lo spazio delle successioni $x = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\|x\|_p^p = \sum_{i=0}^{+\infty} |x^i|^p < +\infty$.
- $\mathbf{l}^\infty = \mathbf{l}^\infty(\mathbb{N})$ è lo spazio delle successioni $x = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x^i| < +\infty$.

È facile verificare che \mathbf{l}^1 e \mathbf{l}^∞ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e che $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ sono norme su tali spazi vettoriali, che risultano quindi spazi normati.

Nel caso generale il fatto che $\|x\|_p = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |x^i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ definisce una norma deriva dalla seguente estensione al caso di somme infinite della **Disuguaglianza di Minkowski**

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio, passando al limite per $N \rightarrow \infty$ nella disuguaglianza per somme di N termini cioè quando si considerano le norme $\|\cdot\|_p$ in \mathbb{R}^N , o si può dedurre come nel caso finito come conseguenza dell'analogia estensione della

Disuguaglianza di Hölder: se $x \in l^p$, $y \in l^{p'}$ dove p e p' sono esponenti coniugati (cioè se $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ con l'intesa che 1 e $+\infty$ anche sono coniugati), allora $xy \in l^1$, e $\|xy\|_{l^1} = \sum_{i=0}^{+\infty} |x^i y^i| \leq \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^{p'}} = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |x^i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} |x^i|^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}}$.

Si dimostra che tali spazi sono completi come spazi metrici, quindi sono spazi di Banach.

Per quanto riguarda lo spazio \mathbf{l}^2 , la norma $\|x\|_2$ è indotta dal seguente prodotto scalare: $(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^i y^i$. Infatti essendo $|x^i y^i| \leq \frac{1}{2}(|x^i|^2 + |y^i|^2)$, se $x, y \in \mathbf{l}^2$ la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} x^i y^i$ converge assolutamente, quindi converge e (x, y) è ben definito; le proprietà del prodotto scalare sono poi facilmente verificabili. Ne segue che \mathbf{l}^2 è uno spazio di Hilbert.

Si noti che le norme ora introdotte sono definite su insiemi differenti di successioni reali. In particolare valgono le seguenti disuguaglianze per una successione $x = (x^n)$, se $1 < p < q < \infty$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1$$

e quindi si hanno le inclusioni insiemistiche (proprie) $\mathbf{l}^1 \subseteq \mathbf{l}^p \subseteq \mathbf{l}^q \subseteq \mathbf{l}^\infty$.

Ad esempio se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n = \frac{1}{n+1}$ allora $x \in l^p \forall p > 1$, ma $x \notin l^1$, se $x_n = \sqrt{\frac{1}{n+1}}$ allora $x \in l^p \forall p > 2$, ma $x \notin l^2$.

Qualche controesempio

- (1) Per mostrare che la sfera unitaria $S = \{x = (x^i) \in l^2 : \|x\| = 1\}$ non è compatta, basta considerare la successione dei versori $\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con $k \in \mathbb{N}^+$. Se $i \neq j$ la distanza $\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| = \sqrt{2}$, quindi non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente (tutto ciò non può accadere in \mathbb{R}^N , dove gli insiemi chiusi e limitati sono compatti).
- (2) Lo shift a destra $x = (x^1, x^2, \dots) \mapsto (0, x^1, x^2, \dots)$ è un esempio di applicazione lineare continua iniettiva ma non suriettiva da l^2 in sé, mentre lo shift a sinistra $x = (x^1, x^2, \dots) \mapsto (x^2, x^3, \dots)$ è un esempio di applicazione lineare continua suriettiva ma non iniettiva da l^2 in sé (tutto ciò non può accadere per un' applicazione lineare $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, che è iniettiva se e solo se è suriettiva).
- (3) In uno spazio normato di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, mentre in dimensione infinita ciò non avviene. Ad esempio se consideriamo lo spazio $X = C^1[0, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_{C^1}$, e $Y = C^1[0, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_{C^0}$ lo spazio vettoriale è lo stesso (nel secondo caso lo consideriamo sottospazio di $C^0[0, 1]$) ma le norme non sono equivalenti, e generano topologie diverse: la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \in C^1$ converge a 0 nella norma C^0 (cioè uniformemente), ma non nella norma C^1 : $\|f_n\|_{C^1} = \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = \|\frac{\sin(nx)}{n}\|_\infty + \|\cos(nx)\|_\infty$ non tende a zero.
- (4) Vediamo un altro esempio di norme non equivalenti su uno spazio di dimensione infinita. Consideriamo sullo spazio vettoriale $C^0[a, b]$ delle funzioni continue sull' intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ le norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x) dx|, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

La metrica indotta dalla norma $\|f\|_1$ è strettamente meno fine della norma del massimo $\|f\|_\infty$. Infatti vale la disuguaglianza $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = (b-a)\|f\|_\infty$. Ciò implica che se una successione f_n di funzioni continue converge a una funzione continua f nella norma $\|f\|_\infty$ (cioè uniformemente) allora essa converge a f anche nella norma $\|f\|_1$, e quindi l' identità è continua se considerata come applicazione dallo spazio $X_\infty = (C^0[a, b], \|f\|_\infty)$ allo spazio $X_1 = (C^0[a, b], \|f\|_1)$. L' applicazione inversa non è però continua. Se infatti $[a, b] = [0, 1]$ e $f_n(x) = x^n$ si ha che $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx =$

$\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, quindi per definizione la successione f_n converge alla funzione identicamente nulla $f(x) = 0$ nella metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_1$. La stessa successione verifica però $\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$ e non converge quindi alla funzione 0 nella metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$.

- (5) Se $T : X \rightarrow Y$ è un' applicazione lineare tra due spazi normati, e X ha dimensione finita allora è continua. In dimensione infinita ciò non è vero in generale. Ad esempio consideriamo la successione del punto 3) e l' operatore di derivazione $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^0[0, 1]$, dove la norma è quella di C^0 , cioè la norma uniforme, sia nel dominio che nel codominio.

Sia $Tf = f'$. È un' applicazione lineare $C^1[0, 1] \rightarrow C^0[0, 1]$ ma non è continua.

Infatti la successione $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformemente a 0, ma $Tf = f'_n = \cos(nx)$ non converge in $C^0[0, 1]$.