(1) Calcolare la massa e il baricentro (supponendo densità di volume costante pari a 1) del tetraedro
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x + y + z \leq 1\}$

[$\frac{1}{6}$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$]

(2) Calcolare l' integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = x\, y^2\, z$ sui domini
$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\ x \geq 0\,;\ z \geq 0\}$,
$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\,;\ x \geq 0\,;\ z \geq 0\}$

[$\frac{2}{105}$; $\frac{72}{105}$ ad esempio in coordinate sferiche / ellittiche ...]

(3) Calcolare il baricentro (a densità costante) della semisfera
$[\,x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,;\ z \geq 0\,]$

[$(0, 0, \frac{3}{8}R)$]

(4) Calcolare l' integrale triplo $\int\int\int_V e^y\, dxdydz$
dove $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\ x \geq 0\,;\ z \geq 0\}$.

[$\frac{\pi}{e}$ (conviene usare le coordinate sferiche con la colatitudine $\varphi \in [0, \pi]$ rispetto all' asse y ...)]

(5) Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,; x^2 + y^2 \geq z^2\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\,;\ z \geq 0\}$. Calcolare
l' integrale triplo $\int\int\int_V x\, y\, z\, dxdydz$

[In coordinate sferiche ... $\frac{3}{192}$]

(6) Siano r, R tali che $0 < r < R$ e sia T il toro, generato dalla rotazione di angolo 2π attorno all' asse z del cerchio $B = B_r((R, 0))$ di centro $(R, 0)$ e raggio r nel piano xz, di equazione $(x - R)^2 + z^2 \leq r^2$.
Calcolare il volume di T e l' integrale triplo $\int\int\int_T \sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$

[$2\pi^2 R r^2$; $2\pi^2 R^2 r^2 + \frac{\pi^2}{2} r^4$.]

(7) Calcolare il volume e le coordinate del baricentro (a densità costante) del cono di altezza h e cerchio di base di raggio R:
$K = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h\,;\ x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2)\}$
a) In coordinate cilindriche (rispetto all' asse z)
b) con le coordinate che esprimono i punti del cono come punti dei segmenti tra $P_0 = (0, 0, 0)$ e i punti del cerchio $[\,x^2 + y^2 \leq R^2\,,\ z = h\,]$ (cioè $x = t\,\rho\,\cos(\vartheta)$, $y = t\,\rho\,\sin(\vartheta)$, $z = t\,h$ ...)

[$\frac{\pi}{3} R^2 h$; $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.]

(8) Sia $x = f(z)$, $a \le z \le b$ una funzione continua e positiva, e sia $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : a \le z \le b\,;\, 0 \le x \le f(z)\}$ il sottografico della funzione.
Trovare una formula per il volume del solido S_D ottenuto per rotazione di angolo 2π rispetto all' asse z di D .

Scrivere in coordinate cartesiane il solido S_D se $f(z) = \sqrt{z}e^{\frac{z^2+1}{2}}$, $0 \le z \le 1$ e calcolarne il volume.

[In coordinate cilindriche $S_D = [0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\, a \le z \le b\,,\, 0 \le \rho \le f(z)\ ]$, vol $(S_D) = \pi \int_a^b f^2(z)\, dz$,
$S_D = [\, x^2 + y^2 \le z e^{z^2+1}\,,\, 0 \le z \le 1]$, vol $(S_D) = \frac{\pi}{2}(e^2 - e)$]

(9) Calcolare l' integrale triplo $\int\int\int_V \frac{y^2}{y^2+z^2}\, dxdydz$
dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 \le 4\,;\, y^2 + z^2 \le x^2\,;\, x \ge 0\}$.

[$\frac{7}{6}\pi(2 - \sqrt{2})$ (conviene usare le coordinate sferiche con la colatitudine $\varphi \in [0, \pi]$ rispetto all' asse x ...)]

(10) Calcolare il volume del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2\,;\, z \ge x^2 + y^2\}$.

[$2\pi[\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{4}]$ (benché il solido sia una parte di una sfera piena (intersecata con una parte di spazio limitata da un paraboloide) conviene usare le coordinate cilindriche ...)]

(11) Calcolare il volume di V e l' integrale triplo $\int\int\int_V \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dxdydz$
dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\,;\, y^2 + z^2 \le 1\}$.

[$\frac{16}{3}$ (ad esempio per strati perpendicolari all' asse y) ; $\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}$ (ad esempio in coordinate cilindriche rispetto all' asse z ...)]

(12) **Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^N$, $N > 3$**
Le coordinate sferiche introdotte nello spazio $\mathbb{R}^3$ si possono generalizzare se $N > 3$.

In $\mathbb{R}^4$ le coordinate sferiche si possono scrivere (a meno di permutazioni di variabili) come

$$\begin{cases} x_1 &= \rho \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_1) \cos(\vartheta) \\ x_2 &= \rho \sin(\varphi_2) \sin(\varphi_1) \sin(\vartheta) \\ x_3 &= \rho \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1) \\ x_4 &= \rho \cos(\varphi_2) \end{cases}$$

dove le condizioni a priori per le variabili $\rho, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta$ sono $0 < \rho < +\infty$, $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi$, $0 < \vartheta < 2\pi$.

Mostrare che il determinante jacobiano vale
$|\frac{\partial(x_1,\ldots,x_4)}{\partial(\rho,\varphi_1,\varphi_2,\vartheta)}| = \rho^3\,\sin^2(\varphi_2)\sin(\varphi_1)$

In generale in $\mathbb{R}^N$ le coordinate sferiche si possono scrivere (a meno di permutazione di variabili) come

$$\begin{cases} x_1 & = \rho\sin(\varphi_{N-2})\sin(\varphi_{N-3})\ldots\sin(\varphi_1)\cos(\vartheta) \\ x_2 & = \rho\sin(\varphi_{N-2})\sin(\varphi_{N-3})\ldots\sin(\varphi_1)\sin(\vartheta) \\ x_3 & = \rho\sin(\varphi_{N-2})\sin(\varphi_{N-3})\ldots\cos(\varphi_1) \\ & \ldots \\ x_{N-2} & = \rho\sin(\varphi_{N-2})\sin(\varphi_{N-3})\cos(\varphi_{N-4}) \\ x_{N-1} & = \rho\sin(\varphi_{N-2})\cos(\varphi_{N-3}) \\ x_N & = \rho\cos(\varphi_{N-2}) \end{cases}$$

dove le condizioni a priori sono
$0 < \rho < +\infty$, $0 < \varphi_1, \ldots \varphi_{N-2} < \pi$, $0 < \vartheta < 2\pi$.
In questo caso il modulo del determinante jacobiano vale

$$|\frac{\partial(x_1,\ldots,x_N)}{\partial(\rho,\varphi_1,\varphi_{N-2},\vartheta)}| = \rho^{N-1}\,\sin^{N-2}(\varphi_{N-2})\,\sin^{N-3}(\varphi_{N-3})\ldots\sin(\varphi_1)$$