(1) (**Campi radiali o centrali**) Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, siano $r = r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_N^2}$ la norma del vettore $\mathbf{x}$, e $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r}$ il *versore radiale* in $\mathbf{x}$.

Se $U : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, definiamo la funzione $\tilde{U} : \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ mediante la formula $\tilde{U}(\mathbf{x}) = U(r)$, dove $r = \|\mathbf{x}\|$.

Verificare che vale la formula $\nabla\tilde{U}(\mathbf{x}) = U'(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Se $\mathbf{F}(x) = g(\|x\|)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, con $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, si dice che $\mathbf{F}$ è un campo radiale o centrale.

Un tale campo è in generale definito in un insieme non semplicemente connesso, ad esempio se $N = 2$ e la funzione g non è definibile in 0 è definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; è il caso del campo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, cioè $\mathbf{F}(x, y) = \frac{K}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$, campo gravitazionale o elettrostatico generato da una massa o carica nell' origine in $\mathbb{R}^2$.

Mostrare che un campo radiale è conservativo e, se si scrive $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ nella forma $\mathbf{F}(x) = u(r)\hat{\mathbf{r}}$ (cioè si definisce $u(r)$ in termini di $g(r)$ come $u(r) = rg(r)$), esso ha per primitiva la funzione $\tilde{U}(\mathbf{x}) = U(r)$, dove U è una primitiva di u.

In particolare trovare una primitiva del campo (gravitazionale o elettrostatico) $\mathbf{F}(x, y) = \frac{K}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$.

[$\tilde{U}(\mathbf{x}) = U(r) = -\frac{K}{r}$]

(2) Data la forma differenziale $\omega(x, y) = \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\, x\, dx + \frac{\log(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\, y\, dy$ determinare l' insieme di definizione, dire se è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva.

[Campo radiale; $U(x, y) = \frac{1}{2}\log^2(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{8}\log^2(x^2+y^2)$]

(3) Sia $g(x, y)$ una funzione continua su $\mathbb{R}^2$. Data la forma differenziale
$\omega(x, y) = \frac{2x}{y\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\, dx + (\frac{g(x,y)}{y^2\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} + \cos(y))\, dy$
trovare l' insieme di definizione D, una funzione g tale che la forma sia esatta in (ogni componente connessa di) D, e una primitiva per la forma ottenuta.

[$g(x, y) = -3x^2 - y^2$; in ognuna delle componenti connesse di D le primitive sono le funzioni $U(x, y) = \frac{3}{y}(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} + \sin(y) + c$]

(4) Calcolare l' integrale doppio $\int\int_D x\, dxdy$, dove
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2\,,\, e^x \leq y \leq e^{x^2}\}$

[$\frac{1}{2}e^4 - e^2 - \frac{1}{2}e$]

(5) Calcolare l' integrale $\int\int_D \cos(y)e^x dxdy$,
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \,;\, 0 \leq x \leq \sin(y)\}$

[$e - 2$]

(6) Calcolare l' integrale doppio $\int\int_D \frac{x}{\sqrt{y}}\, dxdy$ dove
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 3 \leq y \leq 4x\}$

[$\frac{8}{5}(3^{\frac{5}{2}} - 1) - \frac{2}{3}(12^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$]

(7) Calcolare l' integrale doppio $\int\int_D (3x^2 - 4x^3)\, dxdy$ dove
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^4 \leq y \leq x^3\}$

[0]

(8) Calcolare l' integrale doppio $\int\int_D \arctan(x)\, dxdy$, dove
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1 \,,\, \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq 1\}$

[$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi^2}{32}$]

(9) Calcolare l' integrale doppio $\int\int_D \arcsin(x)\, dxdy$ dove
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \,,\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\}$

[$\frac{\pi^2}{72}$]

(10) Invertire l' ordine di integrazione nell' integrale iterato
$\int_1^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\, dy$
per una funzione continua, cioè esprimere il dominio semplice $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2 \,,\, 0 \leq y \leq x^2\}$ come dominio semplice del tipo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq y \leq b \,,\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ e conseguentemente scrivere l' integrale come $\int_a^b dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx$).
Applicare il risultato al calcolo dell' integrale doppio
$\int\int_\Omega \frac{y}{x^2} e^{\frac{-y}{x}}\, dxdy$, dove $\Omega = [\, 1 \leq x \leq 2 \,,\, 0 \leq y \leq x^2 \,]$

[$\Omega = [\, 0 \leq y \leq 4 \,,\, \max\{1, \sqrt{y}\} \leq x \leq 2 \,]$; $4e^{-2} + 1 - 3e^{-1}$]

(11) Siano E_1, E_2 insiemi in $\mathbb{R}^2$, limitati, misurabili, con misura positiva, e tali che $|\,E_1 \cap E_2\,| = 0$, dove $|\,B\,|$ indica la misura (bidimensionale di Peano-Jordan) dell' insieme B (ad esempio i due insiemi E_1, E_2 sono disgiunti).

Dimostrare che il baricentro di $E = E_1 \cup E_2$ (rispetto a una qualunque densità costante fissata) appartiene al segmento avente per estremi il baricentro di E_1 e il baricentro di E_2.

(12) Sia A un dominio (cioè un aperto connesso) del piano che (rispetto a una densità costante) ha il baricentro nell' origine $(0,0)$ degli assi cartesiani, e che ha per bordo il sostegno di un circuito γ (percorso una volta in senso antiorario).

Calcolare l' integrale curvilineo $\int_\gamma (y^2\,dx + 2x^2\,dy)$

[0 ; Usare il Teorema di Green ...]

(13) Calcolare in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l' integrale curvilineo
$\int_\gamma \left[\left(y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dx + \left(\alpha x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)dy\right]$
dove γ un circuito regolare percorso in senso antiorario che racchiude una regione D con area $(D) = 1$.
Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma è esatta in $D = \mathbb{R}^2$.
Per tali valori trovare una primitiva di ω.

[Usare il Teorema di Green ... Esatta se $\alpha = 1$, $U(x,y) = xy + \sqrt{1+x^2+y^2} + c$]