(1) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = (e^y + \sin(x))\,dx\, + (xe^y + \cos(y))\,dy$
dire se è chiusa nel suo insieme di definizione $D$, dire se è esatta in $D$, e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[ $U(x,y) = x\,e^y - \cos(x) + \sin(y) + c$ ]

(2) Data la forma differenziale
$\omega(x,y) = \frac{e^x}{1+e^x+y^2}\,dx\, + \,\frac{2y}{1+e^x+y^2}\,dy$
dire se è chiusa nel suo insieme di definizione $D$, dire se è esatta in $D$, e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

[ $U(x,y) = \log(1 + e^x + y^2) + c$ ]

(3) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x\,[\,1+y\log^2(x)\,]}\,dx + \frac{\log(x)}{2\sqrt{y}\,[\,1+y\log^2(x)\,]}\,dy$
dire se è chiusa nel suo insieme di definizione $D$, dire se è esatta in $D$, e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$ è il segmento da $(1,1)$ a $(\sqrt{e},4)$.

[ $U(x,y) = \arctan(\sqrt{y}\,\log(x)) + c$ , $\int_\gamma \omega = \frac{\pi}{4}$ ]

(4) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = [\,\frac{2xy^4}{1+x^2y^4} + e^x\,]\,dx + [\,\frac{4x^2y^3}{1+x^2y^4} + \frac{1}{1+y^2}\,]\,dy$.
dire se è chiusa nel suo insieme di definizione $D$, dire se è esatta in $D$, e in caso affermativo calcolarne una primitiva.
Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$ è la curva di equazioni parametriche $x = \frac{4}{\pi}\arctan(t)$, $y = \frac{e^t-1}{e-1}$, $0 \le t \le 1$.

[ $U(x,y) = \log(1 + x^2y^4) + e^x + \arctan(y) + c$ , $\int_\gamma \omega = \log(2) + e + \frac{\pi}{4} - 1$ ]

(5) Trovare una funzione $g(x,y)$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che la forma differenziale
$\omega(x,y,z) = 2x^3\,z\,dx + (2yz + \cos(y))dy + \,g(x,y)dz$ sia chiusa in $\mathbb{R}^3$.
Calcolarne poi la primitiva che vale $2 + \frac{\pi^2}{4}$ nel punto $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$.

[ $g(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + y^2$ , $U(x,y,z) = \frac{1}{2}x^4 z + y^2 z + \sin(y) + \frac{1}{2}$. ]

(6) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y}\,dx + \frac{a}{x^2+y}\,dy$
a) Trovare l' insieme di definizione $D$ e calcolare per ogni $a \in \mathbb{R}$ l' integrale di $\omega$ sul segmento che va da $(0-2)$ a $(1,-2)$.
b) Dire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma è esatta (in ogni componente connessa di $D$) e se esistono calcolare una primitiva per ognuno di essi.

[ $D = \mathbb{R}^2 \setminus [y = -x^2]$ ; L' integrale vale $\frac{1}{2}\log 2$ (e non dipende da $a$, perché ?) , esatta se $a = \frac{1}{2}$, e quindi $\omega = \frac{x}{x^2+y}\,dx + \frac{1}{2(x^2+y)}\,dy$, una cui primitiva è $U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y)$ ]

(7) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+4y^2)^2}}\,dx + \frac{ay}{\sqrt{1-(x^2+4y^2)^2}}\,dy$
a) Trovare l' insieme di definizione $D$, verificare che l' ellisse $\gamma$ di equazione cartesiana $4x^2 + 16y^2 = 1$ è contenuta in $D$ e calcolare per ogni $a \in \mathbb{R}$ l' integrale di $\omega$ su $\gamma$.
b) Dire se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma è esatta (in ogni componente connessa di $D$) e se esistono calcolare una primitiva per ognuno di essi.

[ $D = [x^2 + 4y^2 < 1]$, l' integrale è nullo per ogni scelta di $a \in \mathbb{R}$. Chiusa ed esatta se $a = 8$.
$U(x,y) = \arcsin(x^2 + 4y^2) + c.$ ]

(8) Data la forma differenziale $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$
a) Trovare l' insieme di definizione $D$ e dire se è chiusa in $D$.
b) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$ è la circonferenza unitaria di equazione $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario
c) Dire se è esatta nei seguenti insiemi: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2, y > -3, (x,y) \neq (0,0)\}$
d) Calcolare $\int_{\gamma_1} \omega$ dove $\gamma_1$ è l' ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ percorsa in senso orario
e) Calcolare $\int_{\gamma_2} \omega$ dove $\gamma_2$ è il quadrato di semilato 1 e centro $(2,2)$ percorso in senso orario.

[ La forma è chiusa in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\int_\gamma \omega = 2\pi$.
Si noti che il resto dell' esercizio non richiede altri calcoli, si basa sulla teoria.

$\omega$ non è esatta in $D$ né in $B$, perché una circuitazione su una curva contenuta in essi non è nulla ( e NON perché i domini non sono semplicemente connessi, forme chiuse in domini non semplicemente connessi possono essere o meno esatte).
La forma è invece esatta in $A$, che è semplicemente connesso.
$\int_{\gamma_1} \omega = -2\pi$ essendo $\omega$ chiusa e $\gamma_1$ omotopa in $D$ a $-\gamma$, curva opposta a $\gamma$.
Infine $\int_{\gamma_2} \omega = 0$ perché $\gamma_2 \subset A$ dove $\omega$ è esatta (equivalentemente $\gamma_2$ è omotopa a un punto in $D$) ]

(9) Siano date la forma differenziale $\omega(x,y) = (1+\frac{y2}{x})e^{-\frac{y^2}{x}}\,dx - 2ye^{\frac{-y^2}{x}}\,dy$ e la curva $\gamma$ di equazioni parametriche $x = t^2$ , $y = \frac{1}{t}$ , $1 \leq t \leq 2$.

a) Trovare l' insieme di definizione $D$ di $\omega$ e dire se $\omega$ è chiusa in (ogni componente connessa di) $D$.

b) Dire se è esatta in (ogni componente connessa di) $D$ e in caso affermativo calcolarne una primitiva.

c) Calcolare l' integrale curvilineo di prima specie $\int_\gamma \sqrt{4x^3 + xy^2}\,ds$ e l' integrale curvilineo di seconda specie $\int_\gamma \omega$.

[ $\omega$ è chiusa ed esatta nelle due componenti connesse $D_+ = [\,x > 0\,]$ e $D_- = [\,x < 0\,]$ con primitive $U(x,y) = x\,e^{\frac{-y^2}{x}} + c$.
$\int_\gamma \sqrt{4x^3 + xy^2}\,ds = \frac{4}{5}(2^5 - 1) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{253}{10}$
$\int_\gamma \omega = U(4, \frac{1}{2}) - U(1,1) = 4e^{-\frac{1}{16}} - e^{-1}$. ]

(10) Siano date la forma differenziale $\omega(x,y) = [\,\frac{y}{(y-x)^2}\,]\,dx + [\,\frac{-x}{(y-x)^2}\,]\,dy$
e per $0 < \alpha < 2$ le curve $\gamma_\alpha$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ con } x(t) = \frac{1}{1+t}\,,\ y(t) = \frac{\sqrt{2t+t^2}}{1+t}\,, \quad \alpha \leq t \leq 2$$

a) Trovare l' insieme di definizione $D$ di $\omega$, verificare che $\omega$ è chiusa in $D$.

Dire se è esatta in $D$, e in caso affermativo calcolarne le primitive $U(x,y)$ (in ogni componente connessa di $D$).

b) Dire se le curve $\gamma_\alpha$ sono curve regolari semplici e calcolare l' integrale curvilineo di prima specie $\int_{\gamma_\alpha} \frac{y}{x}\,ds$

c) Dire per quali $\alpha > 0$ ( con $\alpha < 2$ ) il sostegno di $\gamma_\alpha$ è contenuto in $D$

d) (dopo aver verificato che per $\alpha = 1$ il sostegno di $\gamma_1$ è contenuto in $D$) calcolare l' integrale curvilineo $\int_{\gamma_1} \omega$

[ a) Chiusa e quindi esatta nelle due componenti (semplicemente) connesse $D_1 = [\,y < x\,]$, $D_2 = [\,y > x\,]$ con $U(x,y) = \frac{y}{y-x} + c$ (come viene integrando la parte in $dy$), ma anche come $U(x,y) = \frac{x}{y-x} + c$ (come viene integrando la parte in $dy$). Le due scritture coincidono perché $\frac{y}{y-x} = \frac{y-x+x}{y-x} = 1 + \frac{x}{y-x}$.
b) $\int_{\gamma_\alpha} \frac{y}{x}\,ds = \log(\frac{3}{\alpha+1})$.
c) $\gamma_\alpha$ ha sostegno nella componente connessa $[y > x]$ di $D$ per $\alpha > \sqrt{2} - 1$.
d) Essendo $\omega$ esatta, $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ il punto iniziale e $P_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ il punto finale di $\gamma_1$, si ha che $\int_{\gamma_1} \omega = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}$ ]