(1) Sia $k \geq 1$ un intero. Studiare in funzione di $k \geq 1$ intero positivo l' esistenza delle derivate parziali e direzionali, la continuità e la differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^k+y^5}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[Continua se e solo se $k \geq 3$, differenziabile se e solo se $k \geq 4$, con $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 1$.]

(2) Studiare in funzione di $k \geq 1$ intero positivo la continuità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^2(x+y^2)}{x^k+y^k} & \text{se } x^k + y^k \neq 0 \\ 0 & \text{se } x^k + y^k \neq 0 \end{cases}$$

[Continua e differenziabile solo se $k = 2$, , con $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$.]

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione per la quale esiste una costante $C > 0$ tale che $|f(x,y)| \leq C\,(x^2 + y^2)$.
Dimostrare che in tal caso $f(0,0) = 0$, esistono le derivate parziali in $(0,0)$ e sono nulle, e la funzione è differenziabile in $(0,0)$.
Per quali $\gamma > 0$ otteniamo le stesse conclusioni se supponiamo che $|f(x,y)| \leq C\,(x^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}} = \|(x,y)\|^\gamma$?

(4) Data la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
calcolare le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ in ogni punto e verificare che è di classe C^1.
Calcolare le derivate parziali seconde $f_{x\,y}(0,0)$, $f_{y\,x}(0,0)$.
Dire se la funzione è due volte differenziabile in $(0,0)$.

[
$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$f_{xy}(0,0) = -1$, mentre $f_{yx}(0,0) = 1$. Per il teorema di Schwarz la funzione non è due volte differenziabile in $(0,0)$.]

(5) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + y^3 - \frac{15}{2}y^2 - 48x + 18\,y$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[I punti critici sono $P_1 = (4,3)$, $P_2 = (-4,3)$, $P_3 = (4,2)$, $P_4 = (-4,2)$. Il punto P_1 è un punto di minimo locale stretto, il punto P_4 è un punto di massimo locale stretto, i punti P_2 e P_3 sono punti di sella.]

(6) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$ trovare il valore di λ tale che il punto $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ sia un punto critico di f. Per tale valore trovare eventuali altri punti critici di f, e per ogni punto critico specificare se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[$\lambda = 2$. Per tale valore i punti critici sono $P_1 = (0,0)$, punto di sella, e $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$, punto di minimo relativo (stretto).]

(7) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[Unico punto critico, di minimo, è il punto $(4,2)$.]

(8) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = x^4 + x^3 + y^2 + z^2$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[I punti critici sono $P_1 = (-\frac{3}{4}, 0, 0)$ e $P_2 = (0,0,0)$. P_1 è punto di minimo relativo (stretto), P_2 di sella.]

(9) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2 z$ trovare i punti critici di f, specificando se si tratta di punto di minimo, massimo o sella.

[Punti critici $P_0 = (0,0,0)$ e $P_{1,2} = (\pm 1, \pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$, tutti di sella.]

(10) Data la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = -2x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 5y - z^2 + 2z$ individuare i punti critici di f, specificando se si tratta di punti di minimo, massimo o sella.

[L' unico punto critico è il punto $(1,1,1)$, ed è un punto di massimo relativo (stretto).]

(11) Data la funzione di due variabili $f(x,y) = xy$ trovare i punti critici di f e specificare se si tratta di punto di minimo, massimo o sella. Trovare poi il massimo e il minimo assoluti di f sull' insieme $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

[L' unico punto critico in tutto $\mathbb{R}^2$ è $P = (0,0)$, che è un punto di sella.
Per il Teorema di Weierstrass, essendo $\overline{B}$ compatto e f continua, esistono punti di massimo e minimo assoluto di f in $\overline{B}$, e sono sulla frontiera, immagine della funzione $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Studiando la funzione composta $f \circ \alpha(t) =$

$\cos(t)\sin(t)$ in $[0, 2\pi]$ ... i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, sono punti di massimo assoluto per f su B con valore $\frac{1}{2}$, mentre il minimo è $-\frac{1}{2}$, assunto nei punti $(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.]

(12) **Funzioni omogenee**
Un **cono** in $\mathbb{R}^N$ è un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che se $x \in A$ allora $t\,x \in A$ per ogni $t > 0$, un cono aperto è un aperto A di $\mathbb{R}^N$ che sia un cono.

Se A è un cono e $\alpha \in R$ una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è detta (positivamente) **omogenea di grado** α se

$f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$, per ogni $t > 0$.

Ad esempio $f(x) = \|x\|^p$ è una funzione omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$, ogni forma quadratica è omogenea di grado 2, $f(x, y) = \frac{x}{y}$ è omogenea di grado 0 sul cono $[y \neq 0]$.

Dimostrare seguendo la traccia il
Teorema di Eulero Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile sul cono aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Allora f è omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se e solo se vale l' identità di Eulero
$\nabla f(x) \cdot x = \alpha\, f(x)\ \forall\, x \in A$.

[Per $x' \in A$ consideriamo la funzione $g(t) = \frac{f(tx')}{t^\alpha}$.
Derivando $t \mapsto f(tx')$ con la regola della catena si ottiene $g'(t) = \frac{t^\alpha \nabla f(tx')\cdot x' - \alpha t^{\alpha-1} f(tx')}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}[\,\nabla f(tx') \cdot (tx') - \alpha f(tx')\,]$.

Se f è omogenea di grado α , è $g(t) = f(x) = c$ per ogni $t > 0$ e quindi $0 = g'(t)$ per ogni $t > 0$ e ponendo $t = 1$ ...

Se invece vale l' identità precedente per ogni $x \in A$, in particolare nei punti $x = tx'$ allora $g't) = 0$, $g(t) = c = g(1)$ per ogni $t > 0$ ...]

(13) Siano $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \dots \\ g_m(t) \end{pmatrix}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ due funzioni di una variabile derivabili a valori vettoriali, e consideriamo la funzione scalare $\alpha(t) = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$.

(a) Verificare che vale la formula per la derivata del prodotto scalare: $\alpha'(t) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$

[È una semplice verifica, basta calcolare per componenti $\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} {f_1}'(t) \\ \dots \\ {f_m}'(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} {g_1}'(t) \\ \dots \\ {g_m}'(t) \end{pmatrix}$ ...]

(b) Verificare che se $\mathbf{f}(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ è una funzione derivabile e $\|\mathbf{f}(t)\| =$ cost , allora $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = 0\ \forall\ t \in [a, b]$, cioè i vettori valore $\mathbf{f}(t)$ e derivato $\mathbf{f}'(t)$ sono tra loro ortogonali.

[Applicare la 1) al caso $\mathbf{g} = \mathbf{f}$, essendo $\alpha(t) = \|\mathbf{f}(t)\|^2 = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) =$ cost la derivata di $\alpha(t)$ è identicamente nulla $\dots$]

(14) Siano $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ due funzioni di una variabile derivabili a valori in $\mathbb{R}^3$, e indicando con $\times$ il prodotto vettoriale consideriamo la funzione a valori in $\mathbb{R}^3$ $\alpha(t) = \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t) \\ f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t) \\ f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t) \end{pmatrix}$. Verificare che vale la formula per la derivata del prodotto vettoriale

$$\alpha'(t) = (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t)$$

[È una noiosa ma semplice verifica, basta calcolare per componenti $\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} {f_1}'(t) \\ \dots \\ {f_m}'(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} {g_1}'(t) \\ \dots \\ {g_m}'(t) \end{pmatrix}$ $\dots$]

(15) Sia $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua di una variabile a valori vettoriali e $\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\, dt \\ \dots \\ \int_a^b f_m(t)\, dt \end{pmatrix}$.

(a) Se $z \in \mathbb{R}^N$ verificare che $\int_a^b \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t)\, dt = \mathbf{z} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt$

(b) Dimostrare che vale la disuguaglianza
$\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt$

[Sia $\mathbf{z} = \int_a^b \mathbf{f}(t)$ e consideriamo la funzione $\beta(t) = z \cdot \mathbf{f}(t)$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che $\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\|^2 = \mathbf{z} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t)\, dt \leq \int_a^b \|z\| \|\mathbf{f}(t)\|\, dt = \|z\| \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt = \| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\| \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt$.
Se $\int_a^b \mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$, dividendo per $\|z\| = \| \int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt\| > 0$ si ha la tesi, se invece $\int_a^b \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ la disuguaglianza è immediata.
]