Verifica guidata di alcune disuguaglianze notevoli (continuazione)

Usando le **disuguaglianze di Young** dimostrate in precedenza,
$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \le \lambda x + (1-\lambda)y \quad$ se $x, y \ge 0$, $0 < \lambda < 1$
$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad$ se $a, b \ge 0$ dove $\ p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ sono **esponenti coniugati** (verificano $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) ,

dimostrare le seguenti (importanti) disuguaglianze.

(1) **Disuguaglianza di Hölder finita**
Siano $n \ge 2$; $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$; $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ il coniugato di p. Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Se $A = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$ oppure $B = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = 0$ è ovvia; in caso contrario usando la disuguaglianza di Young 2 per $(\frac{|x_i|}{A})(\frac{|y_i|}{B})$ e sommando su i ...]

(2) **Disuguaglianza di Minkowski finita**
Siano $n \ge 2$; $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$; $p \ge 1$. Dimostrare che

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ è una norma su $\mathbb{R}^N$.

[Ovvia se $p = 1$ oppure se $x_i = y_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, altrimenti $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1}$, e applicando la disuguaglianza di Hölder con esponenti p, $p' = \frac{p}{p-1}$ alle due sommatorie ...]

(3) **Disuguaglianza di Hölder per le serie**
Siano $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ l' esponente coniugato di p. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali e supponiamo che
$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty$, $\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^{p'} < +\infty$.

Dimostrare che la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i\, y_i$ converge assolutamente e che vale la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i\, y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Come per la disuguaglianza finita sommando per infiniti termini, passando al limite sulle somme finite ...]

(4) **Disuguaglianza di Minkowski per le serie**
Sia $p \geq 1$, e siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty$, $\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p < +\infty$. Dimostrare che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p < +\infty$ e che vale la disuguaglianza

$$\left[\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ è una norma sullo **spazio** l^p , spazio delle successioni reali $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tali che $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty$.

[Come per la disuguaglianza finita sommando per infiniti termini, passando al limite sulle somme finite ...]

(5) **Disuguaglianza di Hölder per gli integrali**
Siano $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ l' esponente coniugato di p e siano f, g due funzioni continue nell' intervallo $[a, b]$. Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

[Come per la dis. finita, se $A = (\int_a^b |f(x)|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}$, $B = (\int_a^b |g(x)|^{p'}\, dx)^{\frac{1}{p'}} \neq 0$, applicando la disuguaglianza di Young a $\frac{f(x)}{A}\frac{g(x)}{B}$ e integrando invece che sommare ...]

(6) **Disuguaglianza di Minkowski per per gli integrali**
Sia $p \geq 1$, e siano f, g due funzioni continue nell' intervallo $[a, b]$. Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

e quindi $\|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$ è una norma su $C^0([a, b])$.

[Come per la disuguaglianza finita integrando invece che sommare ...]

(1) Data la funzione di due variabili
$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(\,e^x - 1)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$, calcolare le derivate parziali, studiare la differenziabilità e dire se la funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

[Le derivate parziali esistono ovunque e sono

$$f_x = \begin{cases} \frac{y(xe^x - e^x + 1)}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{y}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$]

(2) Studiare esistenza delle derivate parziali e direzionali, continuità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left((x-1)(y-2)\right) + \frac{2\,(x-1)^3 + 3(y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

[$f_x(1,2) = 2$, $f_y(1,2) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 2v_1^3 + 3v_2^3$, la funzione non è differenziabile nel punto $(1,2)$.]

(3) Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

studiarne la continuità e differenziabilità. Dire se la funzione è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$.

[Differenziabile ma non di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$.]

(4) Data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha\,(e^y - 1)}{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

studiare in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,
a) l' esistenza delle derivate parziali (calcolandole nei punti in cui esistano)
b) la continuità di f
c) la differenziabilità di f

[In (x,y) con $x \neq 0$ la funzione è di classe C^∞ in un intorno (quindi continua e differenziabile).
In $(0,y)$ con $y \neq 0$ è continua se $\alpha > 0$, non continua se $\alpha < 0$; non esiste la derivata $f_x(0,y)$ se $\alpha \leq 1$ (mentre $f_y(0,y) = 0$) quindi se $\alpha \leq 1$ la funzione non è differenziabile, mentre lo è se $\alpha > 1$.
In $(0,0)$ la funzione è continua se e solo se $\alpha > 1$, differenziabile se e solo se $\alpha > 2$.]

Usando opportunamente le disuguaglianze di Young:

(5) Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\frac{5}{4}}|y|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{3}{2}} + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua, ma non differenziabile in $(0,0)$, mentre la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\frac{9}{4}}|y|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{3}{2}}+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ è ovunque (continua e) differenziabile.

Più in generale

(6) Studiare in funzione del parametro $\alpha > 0$ l' esistenza delle derivate parziali e direzionali, la continuità e la differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{3}{2}}+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
[Continua se e solo se $\alpha > \frac{9}{8}$, differenziabile se e solo se $\alpha > 2$]

(7) Studiare in funzione del parametro $\alpha > 0$ l' esistenza delle derivate parziali e direzionali, la continuità e la differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\frac{3}{2}}}{|x|^{6}+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
[Continua se e solo se $\alpha > \frac{15}{4}$, differenziabile se e solo se $\alpha > \frac{19}{4}$

(8) Studiare esistenza delle derivate parziali e direzionali, continuità e differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left|x^2 y\right|^{\alpha}}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
a) nel caso di $\alpha = 1$
b) nel caso di $\alpha = 2$
c) * nel caso generale di $\alpha > 0$
[Se $\alpha = 1$ non è continua, quindi non è differenziabile.
Nel caso $\alpha = 2$, la funzione è differenziabile, come si può dedurre utilizzando opportunamente la disuguaglianza di Young con $p = p' = 2$.
Nel caso generale è continua se e solo se $\alpha > 1$, ed è differenziabile se e solo se $\alpha > \frac{5}{4}$.
]