(1) Data l' equazione $G(x,y) = xy + \log(xy) - 2x + 1 = 0$, mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (1,1)$ un' unica funzione $y = y(x)$, definita in un intorno I di 1 in $\mathbb{R}$, , con $y(1) = 1$, e tale che $x = 1$ è un punto critico di $y(x)$.
Determinare la natura di tale punto critico.

[$y''(0) = \frac{1}{2}$. Il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo (stretto) per la funzione $y = y(x)$.]

(2) Data l' equazione $G(x,y) = \sin(y)\cos(x) + y - e^x + x^2 + 1 = 0$
Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,0)$ un' unica funzione $y = y(x)$, definita in un intorno I di 0 in $\mathbb{R}$, con $y(0) = 0$.
Calcolare derivate prima e seconda di $y(x)$ nel punto $x = 0$.
Calcolare il $\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - \frac{1}{2}x}{\sin(x)\log(1+x)}$

[$y'(0) = \frac{1}{2}$. $y''(0) = -\frac{1}{2}$. $\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - \frac{1}{2}x}{\sin(x)\log(1+x)} = -\frac{1}{4}$]

(3) Data l' equazione
$G(x,y) = \int_0^y e^{t^2}\,dt - e^x + xy^2 + x + 1 + 2\int_0^x \arctan(t)\,e^t\,dt = 0$
Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,0)$ un' unica funzione $y = y(x)$, definita in un intorno I di 0 in $\mathbb{R}$, con $y(0) = 0$ e tale che $x = 0$ è un punto critico di $y(x)$.
Determinare la natura di tale punto critico.

[$y''(0) = -1$. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo (stretto) per la funzione $y = y(x)$.]

(4) Data l' equazione $G(x,y,z) = y^3 - x^2 - z^2 + e^{xz} = 0$
a) Mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0,0,1)$ un' unica funzione $z = z(x,y)$, definita in un intorno I di $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$, con $z(0,0) = 1$.
Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione $z(x,y)$ nel punto $(0,0)$.
b) Dire se il Teorema di Dini è applicabile per esplicitare localmente $y = y(x,z)$ in un intorno del punto $Q = (0,0,1)$.
c) Dire se si può esplicitare localmente $y = y(x,z)$ in un intorno del punto $Q = (0,0,1)$.

[a) $z_x(0,0) = \frac{1}{2}$, $z_y(0,0) = 0$, $z_{xx}(0,0) = -\frac{1}{4}$, $z_{xy}(0,0) = z_{yx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 0$,
b) No.
c) Sì, $y = \sqrt[3]{x^2 + z^2 - e^{xz}}$]

(5) Data l' equazione
$G(x, y, z) = x\,y\,z\, +\, e^{x+y+z} + \sin[\frac{\pi}{2}(x - y - z)] - e^{3z} = 0$
mostrare che tale equazione definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (1, 1, 1)$ un' unica funzione $z = z(x, y)$, definita in un intorno I di $(1, 1)$ in $\mathbb{R}^2$, con $z(1, 1) = 1$. Calcolare le derivate parziali $z_x(1, 1)$, $z_y(1, 1)$ e scrivere l' equazione del piano tangente al grafico di $z = z(x, y)$ nel punto $P = (1, 1, 1)$

[$z_x(1, 1) = \frac{1+e^3}{2e^3-1}$, $z_y(0, 0) = \frac{1+e^3}{2e^3-1}$.
Il piano tangente ha equazione
$(1 + e^3)x + (1 + e^3)y + (1 - 2e^3)z - 3 = 0$.]

(6) Dato il sistema $\begin{cases} G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 & = 0 \\ G_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x & = 0 \end{cases}$
mostrare che tale sistema definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0, 1, 1)$ due funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$, definite in un intorno I di 0 in $\mathbb{R}$, con $y(0) = z(0) = 1$.
Calcolare le derivate $y'(0)$, $z'(0)$.

Detta γ la curva cartesiana in $\mathbb{R}^3$ definita dal sistema (associata al grafico di questa funzione $(y(x), z(x)) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$), scrivere le equazioni parametriche della tangente alla curva nel punto P.

[$y'(0) = \frac{1}{2}$, $z'(0) = -\frac{1}{2}$;
$x = t\,,\; y = 1 + \frac{1}{2}\,t\,,\; z = 1 - \frac{1}{2}\,t$]

(7) Dato il sistema
$\begin{cases} G_1(x, y, u, v) = (x + y)^2 + u^2 y + 2v - 6 & = 0 \\ G_2(x, y, u, v) = (x - y)^2 + u^2 v - 2xy - 3 & = 0 \end{cases}$
mostrare che tale sistema definisce implicitamente in un intorno del punto $P = (0, 1, 1, 2)$ due funzioni $u = (x, y)$, $v = v(x, y)$, definite in un intorno I di $(0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$, con $u(0, 1) = 1$, $v(0, 1) = 2$. Calcolare la matrice jacobiana dell' applicazione $(u(x, y), v(x, y)) : I \to \mathbb{R}^2$ nel punto $(0, 1)$.

[$u_x(0, 1) = \frac{5}{3}$, $v_x(0, 1) = -\frac{8}{3}$, $u_y(0, 1) = -\frac{1}{6}$, $v_y(0, 1) = -\frac{4}{3}$.]

(8) (**Carattere locale del teorema della funzione inversa in dimensione maggiore di** 1)
Sia $\mathbf{g}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Calcolare la matrice jacobiana di $\mathbf{g}$ in un punto generico del piano e mostrare che in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sono verificate le ipotesi del teorema della funzione inversa; dedurne che la restrizione di $\mathbf{g}$ a un intorno aperto di ogni punto del piano è un diffeomorfismo su

un aperto del piano, quindi che $\mathbf{g}$ è localmente invertibile con inversa locale di classe C^1 ed è un' applicazione aperta.

Mostrare che nonostante questo l' applicazione $\mathbf{g}$ non è iniettiva in $\mathbb{R}^2$, non è quindi globalmente invertibile come applicazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(9) (**Operatore di Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in coordinate polari**)
Se $u = u(x, y)$ è una funzione di classe $C^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$, il *laplaciano di* u è definito da

$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y).$

Consideriamo il diffeomorfismo di classe C^2 definito dalla trasformazione in coordinate polari tra $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ e $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\,,\ x \geq 0\}$
(o analoga trasformazione tra $U' = (0, +\infty) \times (a, a + 2\pi)$ e $V' = \mathbb{R}^2 \setminus S$ dove S è una semiretta del piano) :

$x = \rho\cos(\vartheta)\ ,\ y = \rho\sin(\vartheta)\ ,$
$(\rho, \vartheta) \in U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)\ ,$
$(x, y) \in V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\,,\ x \geq 0\}.$

Sia $u = u(x, y) \in C^2(V)$, e siano
$\tilde{u}(\rho, \vartheta) = u(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))$
la stessa funzione espressa in coordinate polari, e
$\tilde{\Delta u}(\rho, \vartheta) = \Delta u(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))$
il laplaciano di u espresso in coordinate polari.

Mostrare che

$\tilde{\Delta u}(\rho, \vartheta) = \Delta u(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)) =$
$\tilde{u}_{\rho\rho}(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\rho}\tilde{u}_{\rho}(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\rho^2}\tilde{u}_{\vartheta\vartheta}$

[Usando la regola di derivazione delle funzioni composte mostrare che
$\tilde{u}_\rho(\rho, \vartheta) = u_x(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))\ \cos(\vartheta) + u_y(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))\ \sin(\vartheta)$
$\tilde{u}_\vartheta(\rho, \vartheta) = u_x(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))\ (-\rho\sin(\vartheta)) + u_y(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))\ (\rho\cos(\vartheta))$

che sottintendendo i punti in cui le funzioni sono calcolate si scrivono più brevemente come
$\tilde{u}_\rho = u_x\ \cos(\vartheta) + u_y\ \sin(\vartheta)$
$\tilde{u}_\vartheta(\rho, \vartheta) = -u_x\,\rho\sin(\vartheta) + u_y\,\rho\cos(\vartheta)$

Derivando ancora la prima rispetto a ρ, la seconda rispetto a ϑ mostrare che
$\tilde{u}_{\rho\rho}(\rho, \vartheta) = u_{xx}\ \cos^2(\vartheta) + 2u_{xy}\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + u_{yy}\ \sin^2(\vartheta)$
$\tilde{u}_{\vartheta\vartheta}(\rho, \vartheta) = u_{xx}\,\rho^2\sin^2(\vartheta) - 2u_{xy}\,\rho^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + u_{yy}\rho^2\cos^2(\vartheta)$
$\qquad -u_x\rho\cos(\vartheta) - u_y\rho\sin(\vartheta)$

e quindi $\tilde{u}_{\rho\rho}(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\rho}\tilde{u}_\rho(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\rho^2}\tilde{u}_{\vartheta\vartheta} = \ldots$

Alternativa più sistematica, utile per calcoli simili in coordinate cilindriche o sferiche in $\mathbb{R}^3$: si scrive la matrice jacobiana

$J_T(\rho,\vartheta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)}(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\vartheta \\ y_\rho & y_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\rho\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \rho\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
e si scrive la sua inversa, ma *sempre in funzione di* ρ, ϑ, cioè se $T = T(\rho,\vartheta) = (x(\rho,\vartheta), y(\rho,\vartheta))$, $T^{-1} = T^{-1}(x,y) = (\rho(x,y), \vartheta(x,y))$ si scrive $J_{T^{-1}}(x(\rho,\vartheta)\,,\, y(\rho,\vartheta)) = J_{T^{-1}}(T(\rho,\vartheta))$:
$\frac{\partial(\rho,\vartheta)}{\partial(x,y)}(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho_x & \rho_y \\ \vartheta_x & \vartheta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\rho^{-1}\sin(\vartheta) & \rho^{-1}\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
e poi si deriva invece con la regola della catena $u(x,y) = \tilde{u}(\rho(x,y), \vartheta(x,y))$ che scriveremo brevemente come u invece che $\tilde{u}$:
$u_x = u_\rho \rho_x + u_\vartheta \vartheta_x = u_\rho \cos(\vartheta) - u_\vartheta \rho^{-1}\sin(\vartheta)$
$u_y = u_\rho \rho_y + u_\vartheta \vartheta_y = u_\rho \sin(\vartheta) + u_\vartheta \rho^{-1}\cos(\vartheta)$
Derivando ancora si ottiene
$u_{xx} = u_{\rho\rho}\cos^2(\vartheta) + u_{\vartheta\vartheta}\rho^{-2}\sin^2(\vartheta) - 2u_{\rho\vartheta}\rho^{-1}\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + u_\rho\rho^{-1}\sin^2(\vartheta) + 2u_\vartheta\rho^{-2}\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$

Analogamente
$u_{yy} = u_{\rho\rho}\sin^2(\vartheta) + u_{\vartheta\vartheta}\rho^{-2}\cos^2(\vartheta) + 2u_{\rho\vartheta}\rho^{-1}\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + u_\rho\rho^{-1}\cos^2(\vartheta) - 2u_\vartheta\rho^{-2}\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$. Sommando si ottiene $\ldots$]