Nei primi esercizi si richiede di dimostrare (consultando eventualmente testi usati altrove) semplici proprietà in $\mathbb{R}^N$ o spazi metrici, la cui dimostrazione è praticamente identica a quella dei relativi teoremi per funzioni reali di variabile reale, e che sono inoltre state introdotte nella parte finale del corso di Analisi Matematica 2 di introduzione agli spazi metrici e alla loro topologia.
La dimostrazione dei teoremi importanti è stata invece svolta in gran parte a a lezione (utilizzando il fatto che i risultati e le tecniche per le funzioni reali di una variabile reale sono ben consolidati). Come esercizio dimostrare oltre ai punti seguenti anche eventuali altre proprietà enunciate a lezione e non dimostrate in dettaglio.

(1) Dimostrare che se (X, d) è uno spazio metrico ogni palla aperta $B_\varepsilon(x_0)$ è un insieme aperto.

(2) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare le affermazioni seguenti
   i) Sia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una collezione arbitraria di insiemi aperti. Allora $O = \cup_{\alpha\in A} O_\alpha$ è aperto.
   ii) Sia $O_1, \dots O_n$ una collezione finita di insiemi aperti. Allora $O' = \cap_{i=1}^n O_i$ è aperto.
   iii) Sia $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una collezione di insiemi chiusi. Allora $C = \cap_{\alpha\in A} C_\alpha$ è chiuso.
   iv) Sia $C_1, \dots C_n$ una collezione finita di insiemi chiusi. Allora $C' = \cup_{i=1}^n C_i$ è chiuso.

(3) Sia X uno spazio vettoriale dove è definito il prodotto scalare (x, y) tra due elementi $x, y \in X$ con la conseguente norma indotta $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.
   Analizzando la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,
   $|\,(x, y)\,| \leq \|x\|\,\|y\|$
   e della disuguaglianza triangolare per la norma
   $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
   che ne è conseguenza, dire quando valgono le uguaglianze
   $|\,(x, y)\,| = \|x\|\,\|y\|$,
   $(x, y) = \|x\|\,\|y\|$,
   $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$

(4) Dimostrare che se x, y sono vettori di $\mathbb{R}^N$ (o di uno spazio normato)
   $$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \left\{\begin{array}{c} \|x - y\| \\ \|x + y\| \end{array}\right. \leq \|x\| + \|y\|.$$
   Dedurne che la funzione norma $x \in \mathbb{R}^N \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ è continua (e lipschitziana).

(5) Dimostrare il teorema di composizione per funzioni continue: se X, Y, Z sono spazi metrici, $f : A \subseteq X \to Y$, $g : B \subseteq Y \to Z$, $f(A) \subseteq B$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$, f è continua in x_0 e g è continua in y_0, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

(6) Dimostrare che una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi metrici è continua in (ogni punto di) X se e solo se per ogni aperto A di Y (chiuso C di Y) la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

(7) Enunciare e dimostrare il teorema (sui limiti e) sulla continuità della somma e del prodotto di funzioni continue $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Verificare che la dimostrazione nel caso del prodotto vale anche (utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) nel caso del prodotto scalare di funzioni a valori vettoriali: se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ sono continue allora la funzione $h(x) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}$ è continua.

(8) (Continuità di distanza, norma, prodotto interno) Siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ successioni in uno spazio metrico X e supponiamo che $x_n \to x$, $y_n \to y$ ($n \to \infty$). Dimostrare che
  a) La successione di numeri reali $d(x_n, y_n)$ converge in $\mathbb{R}$ al numero reale $d(x, y)$.
  b) Se in particolare (X, $(.,.)$) è uno spazio con prodotto interno allora $(x_n,\, y_n)$ converge a $(x,\, y)$.
  c) Se $(X, \|\,.\,\|)$ è uno spazio normato allora $\|x_n\|$ converge a $\|x\|$.

(9) Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici e siano $x_0 \in X$ e $f : X \to Y$ una funzione. Dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se da ogni successione x_n in X convergente a x_0 si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} tale che $f(x_{k_n})$ converge a $f(x_0)$.

(10) Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $\emptyset \neq E, F \subseteq X$. Definiamo la funzione $d_E : X \to [0, +\infty)$, distanza da E, come $d_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$, e la distanza tra E e F come $d(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y)$.
a) Dimostrare che $d_E(x) = 0$ se e solo se $x \in \overline{E}$
b) Dimostrare che la funzione d_E è uniformemente continua (lipschitziana) mostrando che $|\, d_E(x) - d_E(y)\, | \leq d(x, y)$ per ogni coppia di punti $x, y \in X$.
c) Se C_1, C_2 sono chiusi e disgiunti, dimostrare che la funzione $g(x) = \frac{d_{C_1}(x)}{d_{C_1}(x) + d_{C_2}(x)}$ è ben definita, continua, a valori in $[0, 1]$, ed è tale che $g(x) = 0$ se e solo se $x \in C_1$, $g(x) = 1$ se e solo se $x \in C_2$.
d) Dimostrare che se $K \subseteq X$ è compatto disgiunto da $C \subseteq X$ chiuso, allora $d(K, C) > 0$; mostrare con un esempio che tale proprietà non vale se K è chiuso ma non compatto.

(11) Determinare l' insieme di definizione A, l' insieme B dove esistono le derivate parziali e le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, ($f_z(x,y,z)$) delle seguenti funzioni.
a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$
b) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$
c) $f(x,y,z) = \sin(xy)\cos(z)$
d) $f(x,y) = \frac{y}{1-x}$
e) $f(x,y) = e^{x^3y^2}$
f) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$
g) $f(x,y) = x^2y\sin(xy)$
h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
i) $f(x,y) = \log(y - x^2)$
j) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
k) $f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-2)$
l) $f(x,y) = \arctan(\sqrt{1+x^2y^4})$
m) $f(x,y) = x^y$
n) $f(x,y,z) = z^{xy}$
o) $f(x,y,z) = (xy)^z$
p) $f(x,y) = (xy)^{(xy)}$

[a) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 3x^2 - y$, $f_y(x,y) = 2y - x$

b) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y)$, $f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$

c) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = y\cos(xy)\cos(z)$, $f_y(x,y) = x\cos(xy)\cos(z)$, $f_z(x,y) = -\sin(xy)\sin(z)$

d) $A = B = [x \neq 1]$ (abbreviazione che useremo anche in seguito invece della notazione completa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$), $f_x(x,y) = \frac{y}{(1-x)^2}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{1-x}$

e) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 3x^2y^2e^{x^3y^2}$, $f_y(x,y) = 2x^3ye^{x^3y^2}$

f) $A = B = [y \neq 0]$ (abbreviazione che useremo anche in seguito invece della notazione completa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$), $f_x(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $f_y(x,y) = \frac{-3x^2}{y^4}$

g) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy)$, $f_y(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3y\cos(xy)$

h) $A = \mathbb{R}^2$, $B = [x^2+y^2 \neq 0] = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $A = B = [y > x^2]$, $f_x(x,y) = \frac{-2x}{y-x^2}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$

j) $A = [x^2+y^2 \leq 4] = \overline{B_2((0,0))}$, $B = [x^2+y^2 < 4] = B_2((0,0))$, $f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

k) $A = [1 \leq x^2+y^2 \leq 3] = \overline{B_{\sqrt{3}((0,0))}} \setminus B_1((0,0))$, $B = [1 < x^2+y^2 < 3] = B_{\sqrt{3}((0,0))} \setminus \overline{B_1((0,0))}$, $f_x(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(4-x^2-y^2)^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{1-(4-x^2-y^2)^2}}$

l) $A = B = \mathbb{R}^2$, $f_x(x,y) = \frac{1}{2+x^2y^4} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2y^4}} 2xy^4 = \frac{xy^4}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2y^4}}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{2+x^2y^4} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2y^4}} 4x^2y^3 = \frac{2x^2y^3}{(2+x^2y^4)\sqrt{1+x^2y^4}}$

m) $A = B = [x > 0]$, $f_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f_y(x,y) = x^y\log(x)$

n) $A = B = [z > 0]$, $f_z(x,y,z) = xyz^{xy-1}$, $f_x(x,y,z) = yz^{xy}\log(z)$, $f_y(x,y,z) = xz^{xy}\log(z)$

o) $A = B = [xy > 0]$ (unione di primo e terzo quadrante senza gli assi), $f_x(x,y,z) = yz(xy)^{z-1}$, $f_y(x,y,z) = xz(xy)^{z-1}$, $f_z(x,y,z) = (xy)^z\log(xy)$

p) $A = B = [xy > 0]$ (unione di primo e terzo quadrante senza gli assi), $f(x,y) = (xy)^{(xy)} = e^{(xy)\log(xy)}$, $f_x(x,y) = (xy)^{(xy)}[y\log(xy)+y]$, $f_y(x,y) = (xy)^{(xy)}[x\log(xy)+x]$
...

]