

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$ di generatori dello spazio vettoriale V .

- a) La dimensione dello spazio V è uguale a n .
- b) Se l'insieme $\{u_1, \dots, u_h\}$ di vettori di V è linearmente indipendente allora $h \leq n$.
- c) Se $0w_1 + 0w_2 = \mathbf{0}$ allora $\{w_1, w_2\}$ è linearmente indipendente.
- d) Sempre che $a_1w_1 + \dots + a_nw_n = b_1w_1 + \dots + b_nw_n$ si verifica che $a_i = b_i \forall i = 1, \dots, n$.

Q2) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, la sua traccia è la somma degli elementi sulla diagonale principale ($\text{tr} A = \sum a_{ii}$).

- a) Per ogni matrice A e B si verifica che $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- b) Per ogni matrice A , si ha che $\text{tr} A = \text{tr}(P^{-1}AP)$, per una qualsiasi matrice invertibile P .
- c) Per ogni matrice invertibile A si ha $\text{tr} A = \text{tr} A^{-1}$
- d) Per ogni matrice A e B si ha che $AB - BA \neq I$

Q3) Siano $r = \begin{cases} -y + z & = & 1 \\ 2x + 2y - z & = & 0 \end{cases}$ ed $s = \begin{cases} x & = & 2t + 1 \\ y & = & t + 2 \\ z & = & 1 \end{cases}$ due rette nello spazio.

- a) Le rette r ed s sono sghembe.
- b) Esistono infiniti piani paralleli ad entrambe le rette.
- c) Esiste un unico piano perpendicolare ad entrambe le rette.
- d) Il piano di equazione $-x + 2y - z = 1$ è equidistante alle rette r ed s .

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard e il prodotto vettoriale.

- a) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
- b) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle v, w \wedge u \rangle = \langle w, u \wedge v \rangle$.
- c) Se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$ allora $\{u, v, w\}$ è un insieme linearmente indipendente.
- d) $(v + w) \wedge (v - w) = 0$ qualsiasi siano v e $w \in V$.

Q5) Si considerino una matrice quadrata A di ordine n e un vettore colonna $B \neq \mathbf{0}$.

- a) Se il rango di A è minore di n allora il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non nulle.
- b) Siano Z una soluzione del sistema $AX = 0$ e Y una soluzioni del sistema $AX = B$ allora $Z + Y$ è una soluzioni del sistema $AX = B$.
- c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema $AX = B$ allora $Z + Y$ è una soluzioni del sistema $AX = B$.
- d) Se $\det A = 0$ allora esiste una matrice quadrata C non nulla tale che AC è la matrice nulla.

Q6) Sia $V = \mathbf{R}^n$ e siano $A = (a_{ij})$ una matrice reale di ordine n e $A^t = (a_{ji})$ la matrice trasposta di A .

- a) $\mathbf{R}^n = \ker A \oplus \text{Im } A^t$.
- b) Il nucleo di $A^t A$ coincide con il nucleo di A (cioè $\ker(A^t A) = \ker A$).
- c) L'immagine di $A^t A$ coincide con l'immagine di A^t (cioè $\text{Im}(A^t A) = \text{Im } A^t$).
- d) Vale sempre che $AA^t = A^t A$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) La dimensione dello spazio vettoriale V è uguale a n .
 - b) Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq n$.
 - c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme $\{\mathbf{0}, u_1, \dots, u_n, \mathbf{0}\}$ è linearmente indipendente.
 - d) Sempre che $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$ si ha che $a_i = b_i \forall i = 1, \dots, n$.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n .

- a) Il rango di BA è minore o uguale al minimo tra il rango di A e il rango di B .
 - b) Se il rango di A^2 è pari al rango di A allora $A^2 = A$.
 - c) Per ogni matrice A e B invertibili $(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$.
 - d) Per ogni matrice A si verifica che $A^2 - I = (A - I)(A + I)$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\dim \text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è uguale a n .
 - b) La dimensione del nucleo $\dim \ker f$ è uguale a $m - \dim \text{Im } f$.
 - c) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
 - d) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
-

Q4) Siano $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio metrico, U e W due sottospazi vettoriali di V e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ i rispettivi sottospazi ortogonali.

- a) Se $U \subset W$ allora $W^\perp \subset U^\perp$.
 - b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
 - c) La somma $W \oplus W^\perp$ è diretta e la sua dimensione è uguale alla dimensione di V .
 - d) I sottospazi W e $W^\perp$ hanno la stessa dimensione.
-

Q5) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a m , allora esistono infinite soluzioni del sistema.
 - b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se il rango di A è minore di m allora l'insieme delle soluzioni è vuoto.
 - d) Se le righe $A_1, \dots, A_m$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette esattamente una soluzione.
-

Q6) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se l'insieme $\{u, v, w\}$ è ortonormale allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
 - b) Se u, v, w sono tali che $\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$ allora $\text{span}\{u, v, w\} = V$.
 - c) La proiezione ortogonale di w su v è il vettore nullo se e solo se $\langle v, w \rangle = 0$.
 - d) Se $\langle u, v \rangle = 0$ allora $(\text{span}\{u\})^\perp \cap (\text{Span}\{u\})^\perp = \{0\}$.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.
 - b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è uguale a 2.
 - c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\mathbf{0}, v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Sia $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali.

- a) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - b) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \det A = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - c) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \text{traccia} A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n > m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
 - b) Se $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
 - c) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\text{Im } f = \text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.
-

Q4) Siano $(V, <, >)$ uno spazio metrico, U e W due sottospazi vettoriali di V e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ i rispettivi sottospazi ortogonali.

- a) Se $U \subset W$ allora $U^\perp \supset W^\perp$.
 - b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
 - c) I sottospazi $W + W^\perp$ e $U + U^\perp$ hanno la stessa dimensione.
-

Q5) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a m , allora esistono infinite soluzioni del sistema.
 - b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se B è combinazione lineare delle colonne $A^1, \dots, A^n$ di A allora il sistema ammette esattamente una soluzione.
-

Q6) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$. Si considerino i vettori $v = (1, 1, 1)$ e $w = (1, 1, -1)$

- a) La norma del vettore v è $\sqrt{3}$.
 - b) I vettori v e w sono ortogonali.
 - c) La proiezione ortogonale di w nella direzione di v è il vettore nullo.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n .

- a) Se $\{u_1, \dots, u_h\}$ è un insieme di vettori di V linearmente indipendente allora $h \leq n$.
 - b) Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq n$.
 - c) Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori di V , se l'elemento neutro $\mathbf{0} = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$ sempre si ha che $a_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n .

- a) Per ogni matrice A e B si ha che $\text{traccia}(BA) = \text{traccia}(AB)$
 - b) Per ogni matrice A e B si ha che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
 - c) Per ogni matrice A e B si ha che $\text{traccia}(A + B) = \text{traccia}A + \text{traccia}B$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali, $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare e A una sua matrice rappresentativa.

- a) Le colonne $A^1, \dots, A^m$ della matrice A generano l'immagine ($\text{Im } f$) di f .
 - b) Le righe $A_1, \dots, A_m$ della matrice A generano il nucleo ($\ker f$) di f .
 - c) Se $f(v) = 0_W$ implica che $v = 0_V$ allora $\dim \text{Im } f = n$.
-

Q4) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare.

- a) Se la somma delle molteplicità geometriche è pari al grado del polinomio caratteristico allora l'endomorfismo è diagonalizzabile.
 - b) Se f è diagonalizzabile allora $V = \ker f \oplus \text{Im } f$
 - c) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è un autovettore di f allora l'applicazione $f - \lambda(\text{id})$ è iniettiva.
-

Q5) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
 - b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $v \wedge w \neq \mathbf{0}$.
 - c) Se $v \wedge w = \mathbf{0}$ allora $\langle v, w \rangle \neq 0$.
-

Q6) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se $\text{rango}A = \text{rango}A'$ allora $B \in \text{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$, dove $A^1, \dots, A^n$ denotano le colonne della matrice A .
 - b) Se $n = m$ la colonna B è quasi sempre soluzione del sistema.
 - c) Se $\text{rango}A = \text{rango}A'$ è minore del minimo tra m ed n allora l'insieme delle soluzioni è vuoto.
-

Q1) Sia $\{u, v, w\}$ una base dello spazio vettoriale V .

- a) L'insieme $\{u - v, v - w, w - u\}$ è una base di V .
 - b) $\{0, u, v, w\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V .
 - c) L'insieme $\{u - v + w\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n e sia I la matrice identità.

- a) Se $\det(AB) = 0$ allora $\det A = \det B = 0$.
 - b) Se $\det(AB) = \det B$ allora $A = I$.
 - c) Per ogni matrice A si ha che $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
-

Q3) Siano V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare.

- a) Se f è diagonalizzabile allora $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
 - b) Per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$ l'applicazione $f - \lambda(\operatorname{id})$ è iniettiva.
 - c) Se la somma delle molteplicità geometriche è pari al grado del polinomio caratteristico allora l'endomorfismo è diagonalizzabile.
-

Q4) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
 - b) $\dim \ker f$ è sempre minore o uguale di $\dim W$.
 - c) $\dim \operatorname{Im} f$ è sempre minore o uguale di $\dim V$.
-

Q5) Si consideri il sistema $AX = B$, dove A è una matrice quadrata di ordine n .

- a) Se $\det A = 0$ allora il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non nulle.
 - b) Se $\det A \neq 0$ allora l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = 0$ è vuoto.
 - c) Sia $B \neq 0$, se Z e Y sono soluzioni del sistema allora anche $Z + Y$ è soluzione.
-

Q6) Siano $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio metrico, W un suo sottospazio e $W^\perp$ il sottospazio ortogonale a W .

- a) L'insieme $W \cap W^\perp$ è vuoto.
 - b) Il sottospazio ortogonale $V^\perp$ di V è l'insieme $\{0_V\}$.
 - c) Per ogni $u, w \in V$ vale $\|u - w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di $\dim 2$. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è una base di V .
 - b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ è uguale a 3.
 - c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\mathbf{0}, v_1, v_2\}$ è linearmente dipendente.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n .

- a) Per ogni matrice A e B si ha che $\text{traccia}(AB - BA) = 0$
 - b) Per ogni matrice A e B si ha che $\det(AB) = \det(BA)$.
 - c) Se $AB = BA = 0$ allora si ha che $A = 0$ oppure $B = 0$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\} = W$.
 - b) La dimensione del nucleo di f ($\dim \ker f$) è uguale a $m - \dim \text{Im } f$.
 - c) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
-

Q4) Siano V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare.

- a) Se $v \in V$ è autovettore di f allora v è diverso da zero.
 - b) Se f è diagonalizzabile allora gli autovalori sono distinti a due a due.
 - c) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è autovalore di f allora λ è diverso da zero.
-

Q5) Sia A una matrice di ordine n e sia $B \in \mathbf{R}^n$. Sia A' la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a n , allora il sistema ammette soluzione e la soluzione è unica.
 - b) Se $B \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{0}$ non è soluzione del sistema.
 - c) Se l'insieme delle soluzioni del sistema è vuoto allora il rango di A è minore di n .
-

Q6) Siano $r = \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2z &= 1 \end{cases}$ ed $s = \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= t - 1 \\ z &= t \end{cases}$ due rette nello spazio.

- a) Le rette r ed s sono perpendicolari.
 - b) Esistono infiniti piani paralleli ad entrambe le rette.
 - c) Esistono infinite rette perpendicolari ad entrambe le rette date.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{u_1, \dots, u_h\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) La dimensione dello spazio vettoriale V è uguale a h .
 - b) Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq h$.
 - c) L'insieme $\{u_1 + \dots + u_h\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

- a) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - b) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } A + A^t = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - c) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \text{traccia} A = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
-

Q3) Siano A e P matrici quadrate di ordine n tali che P è invertibile e P^t denota la trasposta di P . Si consideri la matrice $B = P^t A P$

- a) È sempre vero che $\det A = \det B$.
 - b) È sempre vero che $\det(AB) \geq 0$.
 - c) Vale sempre che $\text{traccia } B = \text{traccia } A$.
-

Q4) Si consideri un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: 2 è un autovalore di f tale che il suo autospazio ha dimensione 2 e inoltre f non è iniettivo.

- a) L'applicazione $f - 2(id)$ è iniettiva.
 - b) $\vec{0}$ è un autovettore relativo all'autovalore 0.
 - c) $\mathbf{R}^3$ ha una base i cui elementi sono autovettori dell'endomorfismo f .
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \text{Im } f = \dim W$.
 - b) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
 - c) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
-

Q6) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a m , allora esistono infinite soluzioni del sistema.
 - b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.
 - b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è uguale a 2.
 - c) Sia $\vec{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\vec{0}, v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

- a) L'applicazione che ad ogni matrice $A \in V$ assegna il numero $\det A$ è lineare.
 - b) L'applicazione che ad ogni matrice $A \in V$ assegna il numero $\text{traccia } A$ è lineare.
 - c) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \text{traccia } A = \det A\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
-

Q3) Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che esiste una matrice P invertibile che soddisfa $B = P^{-1}AP$.

- a) È vero che $\det A = \det B$.
 - b) È vero che $\text{traccia } B = \text{traccia } A$.
 - c) In questo caso è vero che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
-

Q4) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(v) = v \wedge w$, dove w è un vettore di norma 1.

- a) Il $\ker f$ è la retta parallela al vettore w .
 - b) Il vettore w è un autovettore dell'endomorfismo.
 - c) L'applicazione f è suriettiva.
-

Q5) Considerare la retta $r = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e il punto $P = (1, 2, 0)$ nello spazio.

- a) Il piano di equazione $3x + 4y + 2z = 1$ contiene la retta r .
 - b) Esistono infiniti piani paralleli a la retta r passante per il punto P .
 - c) Esistono infinite rette perpendicolari a la retta r passante per il punto P .
-

Q6) Sia $n \geq 1$ e $m = n + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se $\text{rango } A = \text{rango } A'$ allora $B \in \text{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$, dove $A^1, \dots, A^n$ denotano le colonne della matrice A .
 - b) Se $\det A' \neq 0$, la colonna B è quasi sempre soluzione del sistema.
 - c) Se le colonne $A^1, \dots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette almeno una soluzione.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale, e siano u, v, w , vettori di V .

- a) Se l'insieme $\{u, v, w\}$ è LI (linearmente indipendente), allora $\{u + v, u + v - w, u + 3v\}$ è LI.
 - b) Se l'insieme $\{u, v, w\}$ è LI e $\dim V = 3$ allora $\text{Span}\{u + v, u + v - w, u + 3v\} = V$.
 - c) Se u, v, w sono tali che $0u + 0v + 0w = \vec{0}$, allora $\{u, v, w\}$ è LI.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n .

- a) È sempre vero che $\det(AB)^t = \det(BA)^t$.
 - b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$.
 - c) Vale sempre che $\text{traccia } A^{-1} = -\text{traccia } A$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n ed m rispettivamente, e sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\dim \text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è uguale a n .
 - b) La dimensione del nucleo $\dim \ker f$ è uguale a $m - \dim \text{Im } f$.
 - d) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
-

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
 - b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $v \wedge w \neq \mathbf{0}$.
 - c) È sempre vero $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
-

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se le colonne $A^1, \dots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti allora B è soluzione del sistema.
 - b) Se il rango di A è pari al rango di A' il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se $B = \vec{0}$ e se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.
-

Q6) Siano V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = id$.

- a) L'applicazione T è iniettiva.
 - b) Per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$ l'applicazione $f - \lambda(id)$ è iniettiva.
 - c) L'immagine di T è contenuta nel nucleo di T .
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$. Siano u, v, w vettori non nulli appartenenti a V .

- a) La dimensione dello spazio vettoriale $\text{Span}\{u, v, w\}$ è uguale a 3.
 - b) Se l'insieme $\{v, w\}$ è linearmente dipendente allora esiste $\alpha \in \mathbf{K}$ such that $w = \alpha v$.
 - c) L'insieme $\{u\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n . Denota con A^t la trasposta di A .

- a) È sempre vero che $\text{traccia}(AB)^t = \text{traccia}(BA)^t$.
 - b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = (\alpha)^n \det(A)$.
 - c) È sempre vero che se $AB = \mathbf{0}$ allora $A = \mathbf{0}$ oppure $B = \mathbf{0}$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \text{Im } f = \dim W$.
 - b) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
 - c) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = f(u)$ allora $v = u$.
-

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
 - b) Se $v \wedge w \neq \vec{0}$ allora $\langle v, w \rangle = 0$.
 - c) Se $v \wedge w = \vec{0}$ allora $\langle v, w \rangle \neq 0$.
-

Q5) Siano $1 \leq m = n + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è n allora esiste una unica soluzioni del sistema.
 - b) Se $\det A' = 0$ il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se Z è soluzione del sistema omogeneo e Y è soluzioni del sistema $AX = B$ allora anche $Z + Y$ è soluzione del sistema $AX = B$.
-

Q6) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = T$.

- a) L'applicazione T è iniettiva.
- b) I numeri 0 e 1 sono gli unici autovalori di T .
- c) È vero che $\text{Im } T \oplus \ker T = V$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3\}$ è linearmente dipendente.
 - b) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ è linearmente indipendente.
 - c) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, \vec{0}\}$ è linearmente dipendente.
-

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n . Denota con A^t la trasposta di A e A^{-1} denota l'inversa di A .

- a) È sempre vero che $\text{traccia}(AB)^t = \text{traccia}(BA)^t$.
 - b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = (\alpha)^n \det(A)$.
 - c) È sempre vero che $\det(AB)^t = \det(BA)^{-1}$.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n > m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) L'applicazione f non è mai iniettiva.
 - b) L'applicazione f non è mai suriettiva.
 - c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \text{Im } f = m$.
-

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
 - b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $v \wedge w \neq \vec{0}$.
 - c) Se $v \wedge w \neq \vec{0}$ allora $\langle v, w \rangle = 0$.
-

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se le colonne $A^1, \dots, A^n, B$ di A' sono linearmente dipendenti allora B è soluzione del sistema.
 - b) Se il rango di A è pari al rango di A' il sistema ammette infinite soluzioni.
 - c) Se $B = \vec{0}$ e se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.
-

Q6) Siano V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = 0$.

- a) Se λ è un autovalore di T allora $\lambda = 0$.
 - b) L'applicazione T è iniettiva.
 - c) Per ogni $\lambda \neq 0$ l'applicazione $T - \lambda(id)$ è iniettiva.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\text{Span}\{v_1 + v_2 + v_3\}$ ha dimensione 1.
 - b) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ è linearmente indipendente.
 - c) L'insieme $(\text{Span}\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, \vec{0}\})$ ha dimensione 3.
-

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

- a) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - b) L'insieme $\{A \in V \text{ tale che } A + A^t = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - c) L'applicazione che ad $A \in V$ assegna il numero $\det A$ è lineare.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) L'applicazione f non è mai iniettiva.
 - b) L'applicazione f non è mai suriettiva.
 - c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \text{Im } f = m$.
-

Q4) Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $\langle, \rangle$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u, v, w \in V$ tre vettori non nulli.

- a) Se l'insieme $\{u, v\}$ è linearmente indipendente allora $(\text{Span}\{u, v, u \wedge v\}) = \mathbf{R}^3$.
 - b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $v \wedge w \neq \vec{0}$.
 - c) Se $\langle u, v \rangle = 0$ allora $(\text{Span}\{u\})^\perp \cap (\text{Span}\{v\})^\perp = \{0\}$.
-

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se le colonne $A^1, \dots, A^n, B$ di A' sono linearmente dipendenti allora il sistema ammette soluzioni.
 - b) Se il rango di A è pari al rango di A' allora B è soluzioni del sistema.
 - c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.
-

Q6) Considerare la retta $r = \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + 2y & = 1 \end{cases}$ e il piano α di equazione $-2x + y + z = 3$.

- a) La retta r è parallela al piano α .
 - b) La retta r è perpendicolare al piano α .
 - c) Esistono infiniti piani perpendicolari al piano α che contengono la retta r .
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 - v_2\}$ è linearmente indipendente.
 - b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ è uguale a 2.
 - c) Sia $\vec{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\vec{0}, v_1 - v_2, v_1 + v_3\}$ è linearmente indipendente.
-

Q2) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare standard e $w \in V$ un vettore di norma 1.

- a) L'applicazione che ad ogni vettore $v \in V$ assegna il numero $\langle v, w \rangle$ è lineare.
 - b) L'applicazione che ad ogni vettore $v \in V$ assegna il numero $\langle v, v \rangle$ è lineare.
 - c) L'insieme $\{v \in V \text{ tali che } \langle v, v \rangle = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
-

Q3) Sia A una matrice invertibile.

- a) Se λ è autovalore di A allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1} .
 - b) Se v è autovettore di A allora v è anche autovettore di A^{-1} .
 - c) I polinomi caratteristici di A e di A^{-1} coincidono.
-

Q4) Si consideri l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in V$, dove $u = (3, 2, 1)$.

- a) Il nucleo di f ($\ker f$) è il piano perpendicolare al vettore u .
 - b) L'applicazione f è suriettiva.
 - c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la matrice dell'applicazione aggiunta f^* di f .
-

Q5) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

- a) La dimensione di V è 2.
 - b) L'applicazione $(A, B) \mapsto \text{traccia}(AB)$ è un prodotto scalare.
 - c) L'applicazione $(A, B) \mapsto \text{traccia}(AB^t)$ è un prodotto scalare.
-

Q6) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se le colonne $A^1, \dots, A^n, B$ di A' sono linearmente indipendenti il sistema è incompatibile.
 - b) Se $m = n + 1$ e $\det A' = 0$, la colonna B è soluzione del sistema.
 - c) Se le colonne $A^1, \dots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette almeno una soluzione.
-

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

- a) L'insieme $\{v_1 - v_3\}$ è linearmente indipendente.
 - b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_3, v_1 + v_2\}$ è uguale a 2.
 - c) Sia $\vec{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\vec{0}, v_1 - v_3, v_1 + v_2\}$ è linearmente dipendente.
-

Q2) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare standard e $w \in V$ un vettore di norma 1.

- a) L'applicazione che ad ogni vettore $v \in V$ assegna il numero $\langle v, w \rangle$ è lineare.
 - b) L'applicazione che ad ogni vettore $v \in V$ assegna il numero $\langle v, w \rangle$ è lineare.
 - c) L'insieme $\{v \in V \text{ tali che } \langle v, w \rangle = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
-

Q3) Sia A una matrice quadrata e sia A^t la sua trasposta.

- a) Se λ è autovalore di A allora λ è autovalore di A^t .
 - b) Se v è autovettore di A allora v è anche autovettore di A^t .
 - c) I polinomi caratteristici di A e di A^t coincidono.
-

Q4) Si consideri l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$, dove $u = (1, 2, 3)$.

- a) Il nucleo di f ($\ker f$) è il piano perpendicolare al vettore u .
 - b) L'applicazione f è suriettiva.
 - c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è la matrice dell'applicazione aggiunta f^* di f .
-

Q5) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

- a) La dimensione di V è 2.
 - b) L'applicazione $(A, B) \mapsto \text{traccia}(AB^t)$ è un prodotto scalare.
 - c) L'applicazione $(A, B) \mapsto \text{traccia}(AB)$ è un prodotto scalare.
-

Q6) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se le colonne $A^1, \dots, A^n, B$ di A' sono linearmente indipendenti il sistema è incompatibile.
 - b) Se $m = n + 1$ e $\det A' \neq 0$, la colonna B è soluzione del sistema.
 - c) Se le colonne $A^1, \dots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette almeno una soluzione.
-

Q1) Su uno spazio vettoriale V si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di vettori non nulli.

- a) L'insieme $\{v_1\}$ è linearmente indipendente.
 - b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente indipendente allora $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \vec{0}$.
 - c) Se i vettori dati sono a due a due ortogonali allora la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è 4.
-

Q2) Siano A, B, C matrici quadrate di ordine $n > 0$ e sia I matrice identità.

- (a) Se $A + B = I$ allora $\det A + \det B = 1$.
 - (b) Se $\text{traccia}(A + B) = 0$ allora $\text{traccia}A = -\text{traccia}B$
 - (c) Se $A \cdot B = I$ e $C \cdot A = I$, allora $B = C$.
-

Q3) Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W due suoi sottospazi.

- a) Se $U = U \cap W$ allora $W \subset U$.
 - b) Se $\dim(U + W) = \dim V$ allora $U \oplus W = V$.
 - c) Se $\dim(U + W) = \dim(U \cap W)$ allora $U = W$.
-

Q4) Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ è una base di $\text{Im } f$ allora $\{v_1, \dots, v_k\}$ genera V .
 - b) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
 - c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\forall w \in W \exists v \in V$ tale che $f(v) = w$.
-

Q5) Si consideri l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(v) = \langle u, v \rangle u \forall v \in V$, dove $u = (3, 2, 1)$.

- a) Il nucleo di f ($\ker f$) è il piano perpendicolare al vettore u .
 - b) L'endomorfismo f ha tre autovalori distinti.
 - c) L'applicazione f è autoaggiunta.
-

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Si considerino il complemento ortogonale $W^\perp$ di W e la proiezione ortogonale P di V su W .

- a) Il nucleo $\ker P$ di P coincide col sottospazio $W^\perp$.
 - b) Vale sempre che $V = W \oplus W^\perp$.
 - c) Se $v \in V$ allora $\|v - P(v)\| \leq \|v - w\|$ per ogni $w \in W$.
-

Q1) Su uno spazio vettoriale V si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di vettori non nulli.

- a) L'insieme $\{v_4\}$ è linearmente dipendente.
 - b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente indipendente allora $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \neq \vec{0}$.
 - c) Se i vettori dati sono a due a due ortogonali allora la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$.
-

Q2) Siano A, B, C matrici quadrate di ordine $n > 0$ e sia I matrice identità.

- a) Se $\text{traccia}(A - B) = 0$ allora $\text{traccia}A = \text{traccia}B$
 - b) Se $A - B = I$ allora $\det A - \det B = 1$.
 - c) Se $A \cdot B = I$ e $C \cdot A = I$, allora $B = C$.
-

Q3) Siano V uno spazio vettoriale e U e W due suoi sottospazi.

- a) Se $W = U \cap W$ allora $U \subset W$.
 - b) Se $\dim(U + W) = \dim V$ allora $U \oplus W = V$.
 - c) Se $\dim(U + W) = \dim(U \cap W)$ allora $U = W$.
-

Q4) Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ è una base di $\text{Im } f$ allora $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
 - b) Se $\dim \text{Im } f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
 - c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\forall w \in W \exists v \in V$ tale che $f(v) = w$.
-

Q5) Si consideri l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(v) = \langle u, v \rangle u \forall v \in V$, dove $u = (1, 2, 3)$.

- a) Il nucleo di f ($\ker f$) è il piano perpendicolare al vettore u .
 - b) L'endomorfismo f ha tre autovalori distinti.
 - c) L'applicazione f è autoaggiunta.
-

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Si considerino il complemento ortogonale $W^\perp$ di W e la proiezione ortogonale P di V su W .

- a) L'immagine $\text{Im } P$ di P coincide col sottospazio W .
 - b) L'insieme $W \cap W^\perp$ è sempre $\{\vec{0}\}$.
 - c) Se $v \in V$ allora $\|v - P(v)\| \leq \|v - w\|$ per ogni $w \in W$.
-

Q1) Su uno spazio vettoriale V si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori non nulli.

- a) Se $\dim \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$ allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente.
 - b) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente allora $\dim \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$.
 - c) L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente se e solo se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \vec{0}$.
-

Q2) Siano A e B due matrici quadrate di ordine $n > 0$.

- a) Se A e B sono invertibili allora anche $A + B$ lo è.
 - b) Se la matrice AB è invertibile allora anche A e B lo sono.
 - c) Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$.
-

Q3) Si considerino i seguenti insiemi dello spazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^2$.

- a) L'insieme $\{(x, y) \in V \mid xy \geq 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - b) L'insieme $\{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - c) L'insieme $\{(x, y) \in V \mid x = y\} + \{(x, y) \in V \mid y = 0\}$ è lo spazio vettoriale V .
-

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard e il prodotto vettoriale.

- a) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
 - b) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle v, w \wedge u \rangle = \langle w, u \wedge v \rangle$.
 - c) Se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$ allora $\{u, v, w\}$ è un insieme linearmente indipendente.
-

Q5) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a m , allora esistono infinite soluzioni del sistema.
 - b) Se il rango di A' è pari a m , il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se le righe $A_1, \dots, A_m$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette esattamente una soluzione.
-

Q6) Si consideri in $V = \mathbf{R}^2$ il prodotto scalare standard.

- a) L'endomorfismo $f(x, y) = (x + y, x)$ è autoaggiunto.
 - b) L'endomorfismo $g(x, y) = (y, -x)$ è anti-autoaggiunto.
 - c) L'endomorfismo $h(x, y) = (x, x + y)$ è autoaggiunto.
-

Q1) Su uno spazio vettoriale V si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di vettori non nulli.

- a) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente indipendente se e solo se $\dim \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$.
 - b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente indipendente allora $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \neq \vec{0}$.
 - c) Se i vettori dati sono a due a due ortogonali allora la dimensione di $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 4$.
-

Q2) Sia $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

- a) Per ogni α la matrice A_α è invertibile.
 - b) Per ogni α le matrici $A_\alpha A_\alpha^t$ e $A_\alpha + A_\alpha^t$ sono diagonalizzabili.
 - c) Se $\alpha = 1$ la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è 3.
-

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare.

- a) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V allora $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ è una base di $\text{Im } f$.
 - b) Se $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ allora $\text{Im } f = \text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$.
 - c) Se $V = W$ e $\forall w \in W \exists v \in V$ tale che $f(v) = w$ allora 0 non è autovalore di f .
-

Q4) Sia r una retta nello spazio $\mathbf{R}^3$ e P un punto che non appartiene a r .

- a) Esistono infiniti piani paralleli a la retta r passante per il punto P .
 - b) Esiste un unico piano che contiene la retta r passante per il punto P .
 - c) Esistono infinite rette perpendicolari a la retta r passante per il punto P .
-

Q5) Siano $1 \leq m < n + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.
 - b) Se il rango di A è pari a m , allora esistono infinite soluzioni del sistema.
 - c) Se il rango della matrice A' è pari a m allora il sistema ammette almeno una soluzione.
-

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio metrico di dimensione n e sia f un endomorfismo di V .

- a) Se f è autoaggiunto allora la matrice rappresentativa di f in una qualunque base di V è simmetrica.
 - b) Se esiste una base ortonormale di V tale che la matrice rappresentativa di f in tale base sia simmetrica allora f è autoaggiunto.
 - c) Se V ammette una base di autovettori di f allora f è autoaggiunto.
-

Q1) Su uno spazio vettoriale V si consideri un insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori non nulli.

- a) Se $\dim \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = k$ allora $\{v_1, \dots, v_k\}$ è LI (linearmente indipendente).
 - b) Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è LI allora $\dim \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = k$.
 - c) L'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è LD (linearmente dipendente) se e solo se $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \neq \vec{0}$.
-

Q2) Siano A e B due matrici quadrate di ordine $n > 0$.

- a) Se $A + B$ è invertibile allora la sua inversa è $A^{-1} + B^{-1}$.
 - b) Se la matrice AB è invertibile allora anche A e B lo sono.
 - c) Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$.
-

Q3) Si considerino i seguenti insiemi dello spazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^2$.

- a) L'insieme $\{(t^2, t^2) \in V \mid t \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - b) L'insieme $\{(t^3, t^3) \in V \mid t \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
 - c) L'insieme $\{(t, t) \in V \mid t \in \mathbf{R}\} + \{(t, -t) \in V \mid t \in \mathbf{R}\}$ coincide con lo spazio vettoriale V .
-

Q4) Si considerino in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard e il prodotto vettoriale.

- a) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
 - b) Se $\|v\| = \|w\|$ e $\langle v, w \rangle = 0$ allora $(v + w) \wedge (v - w) = 0$.
 - c) Se $\|v\| = \|w\|$ e $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle v + w, v - w \rangle = 0$.
-

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se $B \neq \vec{0}$ allora B è soluzioni del sistema.
 - b) Se le colonne $A^1, \dots, A^n, B$ di A' sono LD il sistema ammette almeno una soluzione.
 - c) Se le righe $A_1, \dots, A_m$ di A sono LI il sistema mai ammette soluzioni.
-

Q6) Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ sia P un punto esterno a una retta r e a un piano α .

- a) Per P passa un solo piano perpendicolare a r .
 - b) Per P passa un solo piano perpendicolare a α .
 - c) Per P passa una sola retta parallela ad α .
-

Q1) Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2 considerare i polinomi

$$s(x) = 1 + x, p(x) = x + x^2, q(x) = 1 + x + x^2, r(x) = 1 + x^2.$$

- a) L'insieme di vettori $\{s(x), p(x), q(x), r(x)\}$ è linearmente indipendente.
 - b) I vettori $s(x), p(x), q(x), r(x)$ generano V .
 - c) L'insieme $\{q(x)\}$ è linearmente indipendente..
-

Q2) Siano A, B, C matrici quadrate $n \times n$, $n > 0$.

- a) Se A è tale che $A^2 = A$ allora $A = 0$ oppure $A = I$.
 - b) Se $A + B = I$ (I matrice identità) allora $\det A + \det B = 1$.
 - c) La matrice $A^t - A$ è antisimmetrica.
-

Q3) Considerare lo spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^3$.

- a) L'insieme $\{(x, y, z) \in V \mid yz = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 1.
 - b) L'insieme $\{(x, y, z) \in V \mid y^2 + z^2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 1.
 - c) L'insieme $\{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 2.
-

Q4) Siano $(V, \langle, \rangle)$ uno spazio metrico, U e W due sottospazi vettoriali di V e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ i rispettivi sottospazi ortogonali.

- a) Se $U \subset W$ allora $W^\perp \subset U^\perp$.
 - b) La somma $W + W^\perp$ è diretta.
 - c) I sottospazi $W \oplus W^\perp$ e $U \oplus U^\perp$ hanno la stessa dimensione.
-

Q5) Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia $B \in \mathbf{R}^n$. Sia A' la matrice ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A . Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

- a) Se il rango di A è pari a n , allora esiste una unica soluzione del sistema.
 - b) Se $\det A = 0$ l'insieme delle soluzioni è vuoto.
 - c) Se il rango di A' è pari a n il sistema ammette sempre soluzione.
-

Q6) Siano V uno spazio vettoriale e $T : V \rightarrow V$ una applicazione lineare tale che soddisfa $T^2 = I$, dove T^2 denota T composto con T .

- a) Gli unici autovalori di T sono 1 e -1 .
 - b) L'operatore T è invertibile.
 - c) Lo spazio vettoriale $V = \ker(T + I) \oplus \ker(T - I)$.
-