Programma di GEOMETRIA

NUMERI COMPLESSI Operazioni di somma e prodotto. Il coniugato. Rappresentazione Geometrica. Forma trigonometrica.

POLINOMI Operazioni tra polinomi. Radici di un polinomio. Teorema fondamentale dell'algebra. Radici di un polinomio reale. Radice n-esima di un numero complesso.

VETTORI $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$, lo spazio delle n-uple reali e complesse rispettivamente. Addizione di vettori e moltiplicazione per uno scalare.

MATRICI Somma di matrici e moltiplicazione per uno scalare. matrice quadrata, nulla, identità, diagonale, scalare, triangolare superiore, triangolare inferiore, trasposta, simmetrica, antisimmetrica. Prodotto di matrici: riga per colonna. Matrice inversa. Operazioni elementari sulle righe. Riduzione. Rango.

Definizione esplicita e assiomatica del determinante di una matrice quadrata. Teorema di Binet. Rango di una matrice. Proprietà del determinante. Teorema di Laplace. Applicazione del determinante al calcolo dell'inversa di una matrice.

SPAZI VETTORIALI Assiomi di definizione. Esempi: $\mathbf{R}^n$, $M(m, n; \mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$. Sottospazi di uno spazio vettoriale. Combinazioni lineari, indipendenza lineare, insieme di generatori, base, dimensione. Componenti di un vettore rispetto a una base. Rango $A = \dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{C}$.

Somma e intersezione di sottospazi di uno spazio vettoriale. Somma diretta. Caratterizzazione: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow W \cap U = \{0\}$. Teorema (Formula di Grassmann): $\dim(W + U) + \dim(W \cap U) = \dim W + \dim U$. Corollario: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W + U) = \dim W + \dim U$.

SISTEMI LINEARI Equazione lineare. Sistema lineare di m equazioni in n incognite. Sistema omogeneo. Soluzione di un sistema di equazioni lineari. Teorema (Rouché-Capelli): $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ rango $A =$ rango (A, B) . Tecniche di calcolo. Sistemi con incognite vettoriale. Calcolo di A^{-1} .

GEOMETRIA ANALITICA Rette e piani in $\mathbf{R}^n$. Prodotto scalare. Prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$. Orientazione. Proiezione. Area, Volume.

Equazione cartesiana e parametrica di una retta nel piano. Retta per due punti. Rette parallele e ortogonali. Distanza fra due rette, distanza da un punto a una retta. Circonferenza.

Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani nello spazio. Retta per due punti. Posizione relativa tra rette. Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due rette, tra due piani, tra una retta e un piano. Intersezione. Rette sghembe e complanari. Sfera, circonferenza.

Distanza: fra due punti, distanza da un punto a una retta, da un punto a un piano, fra due piani, fra due rette.

APPLICAZIONI LINEARI Applicazioni lineari fra spazi vettoriali di dimensione finita. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Rango di un'applicazione lineare. Applicazioni iniettive, surgettive e bigettive. Teorema (della dimensione): Sia $f : V \rightarrow W$ una applicazione lineare, se $\dim V = n < \infty \Rightarrow n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

Matrice rappresentativa di una applicazione lineare. Base di $\text{Ker } f$, base di $\text{Im } f$. Matrice di cambio di base. Operazioni: $f + g$, αf , $f \circ g$, f^{-1} , $M(f + g) = M(f) + M(g)$, $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, $M(f \circ g) = M(f)M(g)$, $M(f^{-1}) = [M(f)]^{-1}$.

ENDOMORFISMI Autovalori ed autovettori di un endomorfismo. Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili. Polinomio caratteristico.

Autospazio, molteplicità algebrica, molteplicità geometrica di un autovalore. Criterio di diagonalizzazione. Invarianti per coniugio di una matrice.

SPAZI METRICI Prodotto scalare su uno spazio vettoriale. Ortogonalità, ortonormalità. Basi ortogonali (Gram-Schmidt). Supplemento ortogonale di un sottospazio vettoriale. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale. Matrice della proiezione ortogonale. Formula di Parseval. Teorema di Pitagora. Applicazioni lineari su spazi metrici. L'applicazione aggiunta. Applicazioni autoaggiunte o simmetriche. Teorema spettrale. Trasformazioni unitarie, trasformazioni ortogonali. Isometrie lineari (endomorfismi che preservano i prodotti scalari) e movimento rigido (isometrie affini).