

I. operazioni elementari sulle righe e sviluppo di Laplace

Esempio: (Sanini)

Calcolare il determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 23 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

Effettuano le seguenti operazioni sulle righe:

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 7R_1$ si ottiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -9 & -9 & 0 & -10 \\ -12 & -13 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

mediante lo sviluppo di Laplace per la terza colonna si ottiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -9 & -9 & -10 \\ -12 & -13 & -19 \end{vmatrix}$$

Effettuano le seguenti operazioni sulle colonne:

$C^2 \rightarrow C^2 - C^1, C^3 \rightarrow C^3 - C^1$ si ottiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -1 \\ -12 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

mediante lo sviluppo di Laplace per la prima riga si ha che il determinante è
 $\Delta = 1$

Esempio: Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A ha quattro righe e tre colonne quindi $\text{rango } A \leq 3$. I minori di ordine 3 sono:

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 - 1 = 0$$

$$\det m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det m_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 = -2 + 2 = 0$$

$$\det m_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\det m_1 = \det m_2 = \det m_3 = \det m_4 = 0$ quindi $\text{rango } A < 3$

C'è un minore di ordine due con determinante non nullo: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ quindi $\text{rango } A = 2$

Calcolo del rango della matrice A usando la riduzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ ha rango } 2$$

Esempio: Calcolo della inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ usando el metodo della riduzione

svolgimento

$$(A, I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_2, \quad R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_4 \rightarrow 5R_3 + 4R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -7 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 - R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -7 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_4 \rightarrow \frac{1}{4}R_4, \quad R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3, \quad R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{array} \right) = (I, A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio: Effettuando le operazioni sulla righe $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$, $R_4 \rightarrow R_4 - R_2$, $R_4 \rightarrow R_4 + R_3$. alla matrice A si ottiene una matrice A' ridotta per righe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siccome ci sono quattro righe non nulle nella matrice ridotta il rango delle matrici è 4.

Sia $\mathcal{R} = \text{Span}\{R_1, R_2, R_3, R_4\} \subset \mathbf{R}^5$. Che il rango di A sia 4 implica che le quattro righe di A sono LI e $\dim \mathcal{R} = 4$. Siccome $\dim \mathbf{R}^5 = 5$ allora le righe $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ non generano $\mathbf{R}^5$, quindi non formano una base di $\mathbf{R}^5$.

Sia $\mathcal{C} = \text{Span}\{C^1, C^2, C^3, C^4, C^5\} \subset \mathbf{R}^4$. Siccome il rango di una matrice non dipende da la riduzione si ha che $\dim \mathcal{C} = 4 = \dim \mathbf{R}^4$ quindi $\mathcal{C} = \mathbf{R}^4$. Questo implica che le colonne di A generano $\mathbf{R}^4$, però non sono LI perché sono cinque. quindi le colonne $\{C^1, C^2, C^3, C^4, C^5\}$ non formano una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio: Nello spazio vettorial $\mathbf{R}^4$ considerare i vettori

$$w_1 = (1, 0, 1, 0), w_2 = (0, -1, -1, 0), w_3 = (0, 1, 0, 1), w_4 = (1, 0, 0, 1).$$

- Determinare se $\mathbf{R}^4 = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.
- Determinare se $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è LI.
- Determinare se formano una base di $\mathbf{R}^4$, giustificare.
- Determinare se $v = (3, 2, 1, 0)$ appartiene a $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.
- Determinare se $u = (3, 2, 5, 0)$ appartiene a $W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

soluzione: Scrivere i vettori come righe di una matrice e ridurre per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome sono equivalente per righe allora tutte le matrici hanno rango 3, dunque $\dim \text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = 3$.

- Quindi $\text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \neq \mathbf{R}^4$ (non generano $\mathbf{R}^4$).
- $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è LD. Infatti $w_4 - w_1 = w_3 + w_2$.
- Per a) o per b) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ non formano una base di $\mathbf{R}^4$.

soluzione di d) Notare che $\dim W = 2$, giacchè $\{w_1, w_2\}$ è LI.

Verifica: osservare che w_1 e w_2 non sono proporzionali.

Oppure, si noti che $\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

Si aggiunge all'ultima matrice le componenti del vettore v e si confrontano i ranghi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste matrici hanno rango 3 quindi v non è CL di w_1 e w_2 .

Cioè $\dim \text{Span}\{v, w_1, w_2\} > \dim \text{Span}\{w_1, w_2\} \Rightarrow v \notin W$.

soluzione di e)

Determinare se $u = (3, 2, 5, 0) \in W = \text{Span}\{w_1, w_2\}$.

Si scrive la matrice che ha per righe le componenti dei vettori w_1, w_2, u

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ hanno rango } 2$$

dunque $\dim \text{Span}\{u, w_1, w_2\} = \dim \text{Span}\{w_1, w_2\} \Rightarrow u \in W$.

Esercizio: (III 6)

Si considerino i polinomi $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x - x^2$, $r(x) = 1 - x^2$, $s(x) = 1 + x^2$.

Stabilire se $s(x) \in \text{Span}\{p(x), q(x), r(x)\}$.

soluzione:

Riferito alla base standard $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbf{R}_2[x]$ scrivere le componenti di p, q, r, s come righe di una matrice e ridurre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dalle prime tre righe si ha che $\dim \text{Span}\{p(x), q(x), r(x)\} = 2$.

Confrontando i ranghi si deduce che $s(x) \notin \text{Span}\{p(x), q(x), r(x)\}$.

III. Sottospazi vettoriali.

Esercizio: Sia $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di 2° ordine. Calcolare la dimensione dei seguenti sottospazi:

- 1) $T_S = \{A \in V : A \text{ è triangolare superiore}\},$
- 2) $T_I = \{A \in V : A \text{ è triangolare inferiore}\},$
- 3) $\mathcal{S} = \{A \in V : A^t = A\},$
- 4) $\mathcal{A} = \{A \in V : A^t = -A\}$ e
- 5) $\mathcal{T} = \{A \in V : \text{traccia } A = 0\}.$

Si consideri $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice generica di $V = M(2, \mathbf{R})$. Si ricordi che $\text{traccia } A = a + d$.

Soluzioni 1)

Le matrici triangolari superiori sono caratterizzate dall'equazione $c = 0$.

[i)] Verifichiamo prima che T_S è un sottospazio vettoriale

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & d+d' \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha d \end{pmatrix}.$$

ii) $T_S = \text{Span} \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ giacchè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[iii)] $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ è LI, perchè le tre matrici appartengono alla base standard.

Quindi $\mathcal{B}_{T_S} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ è base di T_S e $\dim T_S = 3$.

Soluzioni 2)

Le matrici triangolari inferiori sono caratterizzate dall'equazione $b = 0$.

$$\text{i) a) } \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ quindi}$$

$$T_I = \text{Span} \{E_{11}, E_{21}, E_{22}\} = \{\alpha E_{11} + \beta E_{21} + \gamma E_{22} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

iii) $\{E_{11}, E_{21}, E_{22}\}$ è LI, essendo tre matrici della base standard.

Quindi $\mathcal{B}_{T_I} = \{E_{11}, E_{21}, E_{22}\}$ è base di T_I e $\dim T_I = 3$.

Soluzioni 3)

Le matrici simmetriche ($A = A^t$) sono caratterizzate dall'equazione $c = b$.

$$\text{i) a) } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \text{Span}\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}. \text{ iii) Se } \alpha E_{11} + \beta(E_{12} + E_{21}) + \gamma E_{22} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dunque $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ è LI. $\mathcal{B}_S = \{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ è base di $\mathcal{S}$, quindi $\dim \mathcal{S} = 3$.

Soluzioni 4)

Le matrici antisimmetriche ($A = -A^t$) sono caratterizzate da $a = 0, d = 0, b = -c$:

$$\text{i) a) } \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c' \\ c' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c - c' \\ c + c' & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \alpha \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c \\ \alpha c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ quindi } \mathcal{A} = \text{Span}\{E_{21} - E_{12}\}.$$

$$\text{iii) La matrice } E_{21} - E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \text{ quindi è LI.}$$

Si ha che $\mathcal{B}_A = \{E_{21} - E_{12}\}$ è base di $\mathcal{A}$, dunque $\dim \mathcal{A} = 1$.

Soluzioni 5)

Le matrici di traccia nulla sono caratterizzate da $d = -a$:

$$\text{i) a) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & -a - a' \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & -\alpha a \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} = \text{Span}\{E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}\}.$$

iii) Per verificare la indipendenza lineare usando la riduzione si scrive la matrice le cui righe sono le componenti rispetto alla base standard di $M(2, \mathbf{R})$ dei vettori (matrici) in questione:

$$\begin{array}{l} E_{11} - E_{22} \rightarrow \\ E_{12} \rightarrow \\ E_{21} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ha rango 3, quindi } \dim \mathcal{T} = 3.$$

Esercizio: Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2. Calcolare la dimensione dei seguenti sottospazi

$$1) W = \{p \in V \text{ tali che } p(2) = 0\}$$

$$2) Z = \{p \in V \text{ tali che } p(1) = 0, p(0) = 0\}.$$

Soluzione 1)

Sia $p(x) = a + bx + cx^2$ un polinomio generico di $V = \mathbf{R}_2[x]$.

i) Sia $p(x) = a + bx + cx^2 \in W$, allora $0 = p(2) = a + 2b + 4c$ si ha quindi che $a = -2b - 4c$, sostituendo a nella formula di p si ottiene che

$$p(x) = (-2b - 4c) + bx + cx^2 = b(-2 + x) + c(-4 + x^2),$$

cioè p è CL dei polinomi $x - 2$ e $x^2 - 4$ dunque $W = \text{Span}\{x - 2, x^2 - 4\}$.

ii) Per vedere che questi due polinomi sono LI, si noti che i vettore delle componenti nella base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ di V , $(x - 2)_{\mathcal{B}} = (-2, 1, 0)$ e $(x^2 - 4)_{\mathcal{B}} = (-4, 0, 1)$, sono LI.

Quindi $\mathcal{B}_W = \{x - 2, x^2 - 4\}$ è base W e $\dim W = 2$.

Soluzione alternativa:

i) Siccome $p(2) = 0$ si ha che $x - 2$ divide $p(x)$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 2)(\alpha + \beta x) = \alpha(x - 2) + \beta x(x - 2)$$

$$\Rightarrow W = \text{Span}\{x - 2, x^2 - 2x\}.$$

ii) la matrice che ha per righe i vettore delle componenti relativi alle base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$

$$\begin{array}{l} x-2 \longrightarrow \\ x^2-2x \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
 ha rango 2 quindi $\mathcal{B}'_W = \{x-2, x^2-2x\}$ è un'altra base di W .

Nota: osservare che: $|\mathcal{B}_W| = |\mathcal{B}'_W| = 2$.

Inoltre $\{x-2, x^2-4, x(x-2)\}$ è un insieme di generatori di W .

Non formano una base di perchè sono LD. [Verifica: $-2(x-2) + (x^2-4) - x(x-2) = 0$.]

Soluzione 2)

$Z = \{p \in V \text{ tali che } p(1) = 0, p(0) = 0\}$.

i) Sia $p(x) = a + bx + cx^2 \in W$, allora $0 = p(1) = a + b + c$ e $0 = p(0) = a$ si ha quindi che $c = -b$ e $a = 0$.

Sostituendo questi coefficienti si ottiene che $p(x) = bx - bx^2 = b(x - x^2)$.

Quindi $Z = \text{Span} \{x - x^2\}$.

ii) Il polinomio $x - x^2 = x(1 - x)$ è non nullo, quindi $\{x - x^2\}$ è LI.

$\mathcal{B}_Z = \{x - x^2\}$, dunque $\dim Z = 1$.

Esercizio: (IV 5) In $M(2, \mathbf{R})$, sia $W = \text{Span}\{A, B, C, D\}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinare la dimensione e una base di W .

b) Sia $U = \text{Span}\{A, B\}$, $V = \text{Span}\{C, D\}$. Determinare la dimensione e una base di $U \cap V$.

soluzione:

a) lo spazio somma è generato da A, B, C, D , cioè $U + V = \text{Span}\{A, B, C, D\}$.

Scrivere le componenti di A, B, C, D nella base standard di $M(2, \mathbf{R})$ come righe di una matrice:

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} A \\ B-A \\ C+A \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U + V) = 3.$$

Le righe non nulle della matrice ridotta sono LI e corrispondono alle matrici $A, B - A, D$ quindi una base dello spazio somma W è $\mathcal{B}_W = \{A, B - A, D\}$.

Oppure applicando il metodo degli scarti successivi C si scarta perché è combinazione lineare di A e B quindi si ottiene la base $\mathcal{B}'_W = \{A, B, D\}$.

b) Osservare che $\dim U = 2$ e $\dim V = 2$, applicando la Formula di Grassman si ha che $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Per trovare una base di $U \cap V$ si noti che $B - A = C + A$ quindi la terza riga della matrice ridotta è nulla. Cioè $\mathbf{0} = B - A - (C + A) = B - 2A - C$, per tanto $C = B - 2A$.

Siccome $C \in V$ e $B - 2A \in U$ si ha che $U \cap V = \text{Span}\{C\} \Rightarrow \mathcal{B}_{U \cap V} = \{C\}$.

Inoltre $\dim(U \cap V) = 1 \Rightarrow U + V \neq U \oplus V$ (la somma non è diretta)

Esercizio: Se $V = M(n, \mathbf{R})$.

Dimostrare che la somma tra $\mathcal{S} = \{A \in V : A^t = A\}$ e $\mathcal{A} = \{A \in V : A^t = -A\}$ è diretta e che $\mathcal{S} + \mathcal{A} = V$.

soluzione: Se $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \Rightarrow A = A^t = -A \Rightarrow A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Inoltre, notare che

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2} \text{ dove } \frac{A + A^t}{2} \in \mathcal{S} \text{ e } \frac{A - A^t}{2} \in \mathcal{A}$$

verifica: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A \Rightarrow A + A^t \in \mathcal{S}$,
 $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) \Rightarrow A - A^t \in \mathcal{A}$
 $\Rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{A} = V$.

Esercizio: (IV 6) Sia $V = M(2, \mathbf{R})$.

a) Siano $\mathcal{S} = \{A \in V : A^t = A\}$ e $\mathcal{A} = \{A \in V : A^t = -A\}$

Dimostrare che la somma tra $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ è diretta.

soluzione:

Nel caso $n = 2$ calcolando le basi per $\mathcal{S}$ e per $\mathcal{A}$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

si ottiene che $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Riferito alla base standard di V scrivere la matrice che ha per righe le componenti delle matrici che generano $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ e si calcola il rango

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \text{ quindi}$$

$$\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \dim(\mathcal{S} + \mathcal{A}) \Rightarrow \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = V.$$

b) Sia $\mathcal{T} = \{A \in V : \text{traccia } A = 0\}$. Trovare una base e calcolare la dimensione per $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$.

soluzione:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = a = -d, \beta = b = \gamma$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è LI, quindi è base di } \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \text{ e } \dim \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = 2.$$

c) Fissate delle basi per $\mathcal{S}$ e per $\mathcal{T}$ calcolare le componenti di $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{soluzione: } A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vettore delle componenti di A rispetto alla base $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ è: $A_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = (3, 1, -3)$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Il vettore delle componenti di A rispetto alla base $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ è: $A_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}}} = (3, 1, 1)$.

Esercizio:

Siano $V = \mathbf{R}_2[x]$, $W = \{p \in V \text{ tali che } p(2) = 0\}$ e

$Z = \{p \in V \text{ tali che } p(1) = 0, p(0) = 0\}$. a) Dimostrare che la somma di W con Z è diretta.

soluzione: Sia $p(x) = a + bx + cx^2$, $p(2) = a + 2b + 4c = 0$ si ha quindi che $a = -2b - 4c$,

$p(1) = a + b + c = 0$ e $p(0) = a = 0$ si ha quindi che $a = 0$ e $c = -b$.

$$0 = a = -2b - 4c = -2b + 4b = 2b \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow p(x) = \vec{0} = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2.$$

$$W \cap Z = \{\vec{0}\} \Rightarrow W + Z = W \oplus Z.$$

soluzione alternativa: Per il principio d'identità dei polinomi,

"un polinomio di grado n che ha m radici con $m > n$ è necessariamente il polinomio nullo".

Se $p(x) \in \mathbf{R}_2[x]$ e ha tre radici $(0, 1, 2)$ allora $p(x) \equiv 0$. $\Rightarrow W \cap Z = \{0\} \Rightarrow W + Z = W \oplus Z$.

b) Calcolare le componenti del polinomio $x^2 - 4$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x - 2, x^2 - 4\}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{x - 2, x(x - 2)\}$ di W .

soluzione: Rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$x^2 - 4 = 0(x - 2) + 1(x^2 - 4) \text{ quindi } (x^2 - 4)_{\mathcal{B}} = (0, 1).$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$x^2 - 4 = \alpha(x - 2) + \beta x(x - 2) = \alpha x - 2\alpha + \beta x^2 - 2\beta x$$

$$= -2\alpha + (\alpha - 2\beta)x + \beta x^2 \text{ quindi } -2\alpha = -4, \quad \alpha - 2\beta = 0, \quad \beta = 1$$

$$\text{Quindi } \beta = 1, \alpha = 2 \Rightarrow (x^2 - 4)_{\mathcal{B}'} = (2, 1).$$

Esempio: a) Trovare l'espressione dell'elemento generico u del sottospazio vettoriale

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x - z = 0, y + 2t = 0\} \text{ di } \mathbf{R}^4.$$

Trovare un insieme di generatori di U (cioè, descrivere U come $\text{Span}\{u_1, \dots, u_r\}$).

b) Calcolare la dimensione di U e determinare una base.

soluzione:

a) Siccome $x = z$ e $y = -2t$ si può sostituire x per z e y per $-2t$ e si ottiene l'elemento generico

$$u = (z, -2t, z, t) = z(1, 0, 1, 0) + t(0, -2, 0, 1)$$

si ha dunque che $U = \text{Span}\{u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, -2, 0, 1)\}$

b) I vettori u_1 e u_2 non sono proporzionali per cui sono LI, quindi $\dim U = 2$ e $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2\}$

soluzione alternativa:

b) Notare che U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$

La matrice associata al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 2,

quindi per il Teorema di Rouché-Capelli $\dim U = \dim \mathbf{R}^4 - \text{rango } A = 4 - 2 = 2$.

a) Scegliendo come variabili libere z e t , quindi x e y variabili dipendenti, si procede come nella dimostrazione del Teorema: la soluzione u_1 del sistema si ottiene ponendo $z = 1$ e $t = 0$, la soluzione u_2 si ottiene ponendo $z = 0$ e $t = 1$. Quindi $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, -2, 0, 1)$.

Una base di U è $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2\}$

Esercizio: (V 2) Considerati i sistemi lineari e discutere le eventuali soluzioni al variare dei parametri h , $k \in \mathbf{R}$.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + hz = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k \end{cases}$$

a) Riducendo per righe la matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

Se $h \neq 1$ il rango $A = 3$ e l'unica soluzione è $\vec{0}$ perché il sistema è omogeneo.

Se $h = 1$ il rango $A = 2$, ci sono ∞^1 soluzioni.

Per trovare le soluzioni si risolve il sistema per sostituzione,

dall'ultima equazione $4x + z = 0$ si ha $z = -4x$, che sostituito nella prima si ottiene $y = 5x$.

Le variabili y e z dipendono dalla variabile x quindi l'elemento generico è $(x, 5x, -4x)$.

e lo spazio delle soluzioni è $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Riducendo per righe la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -h & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ h & -2 & -2 & k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -h & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -h & 0 & 0 & k+4 \end{array} \right)$$

Se $h \neq 0$ si ha $\text{rango} A = 3 = \text{rango}(A|B)$ per ogni k .

Quindi il sistema ammette una unica soluzione:

dall'ultima equazione $-hx = k + 4$ si ricava $x = \frac{k+4}{-h}$,

dalla seconda si ricava

$$y = 1 + x = \frac{h - k - 4}{h},$$

sostituendo nella prima $z = 2 + hx - y$ i valori di x e y si ha

$$z = 2 - k - 4 - \frac{h - k - 4}{h} = \frac{-2h - kh - h + k + 4}{h} = \frac{-kh - 3h + k + 4}{h}$$

La soluzione è:

$$\left(\frac{k+4}{-h}, \frac{h-k-4}{h}, \frac{-kh-3h+k+4}{h} \right).$$

Se $h = 0$ e $k \neq -4$ il $\text{rango} A = 2 < 3 = \text{rango}(A|B)$, allora il sistema è incompatibile. L'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto (che si denota col simbolo $\emptyset$).

Se $h = 0$ e $k = -4$ il $\text{rango} A = \text{rango}(A|B) = 2$, allora esistono ∞^1 soluzioni.

La prima equazione è $y + z = 2$, la seconda $x - y = -1$.

Scegliendo y come parametro libero si ottiene $x = -1 + y$, $z = 2 - y$.

L'elemento generico è $(-1 + y, y, 2 - y) = (-1, 0, 2) + y(1, 1, -1)$.

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio: (IV 5)

In $M(2, \mathbf{R})$, siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si considerino $U = \text{Span}\{A, B\}$ e $V = \text{Span}\{C, D\}$.

Determinare la dimensione e una base di $U \cap V$ e di $U + V$.

soluzione: calcolo dell'intersezione usando i sistemi lineari.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta & = & 2a + b \\ \alpha + 3\beta & = & a \\ 2\alpha + 5\beta & = & a + b \\ \alpha + \beta & = & -a \end{cases}$$

Il sistema si può scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo per righe la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta - 2a - b = 0 \\ \alpha + 3\beta - a = 0 \\ 2\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \alpha + 4\beta - 2a \\ a = \alpha + 3\beta \\ \alpha = -2\beta \end{cases}$$

Se $\beta = 1$ allora $\alpha = -2$ allora $2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in U \cap V$.

Quindi $\mathcal{B}_{U \cap V} = \{C\}$ e $\dim(U \cap V) = 1$.

Oppure, se $\beta = 1, \alpha = -2 \Rightarrow a = -2 + 3 = 1$ e $b = -2 + 4 - 2 = 0$ quindi sostituendo i valori di a e b si ottiene che $1C + 0D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in U \cap V$

ATTENZIONE: Bisogna interpretare la soluzione del sistema: ad esempio se si sostituisce la soluzione del sistema $\beta = 1, \alpha = 2, a = 1, b = 0$ in una matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin U \cap V$ si ottiene una matrice che NON appartiene alla intersezione $U \cap V$!

Per calcolare la dimensione dello spazio somma $U + V = \text{Span}\{A, B, C, D\}$ osservare che $\dim U = 2, \dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 1$. Quindi applicando la Formula di Grassman si ottiene $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3$.

Per trovare una base di $U + V$ si applica il metodo degli scarti successivi a $\{A, B, C, D\}$:

i) $\{A, B\}$ è LI, ii) $C = -2A + B$ quindi C si scarta

Siccome $\dim(U + V) = 3 \Rightarrow D$ non è CL di A e B dunque $\mathcal{B}'_{U+V} = \{A, B, D\}$ è base di $U + V$.

Osservare che $U + V \neq U \oplus V$ e che $U + V \neq M(2, \mathbf{R})$.

Esercizio 1: (prodotto scalare)

(1) Dimostrare che $\langle u + v, u - v \rangle = 0$ se e solo se $\|u\| = \|v\|$.

Soluzione:

$$\langle u + v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

Osservare che un parallelogramma è un rombo se e solo se la lunghezza dei lati è uguale se e solo se ha le due diagonali perpendicolari.

Esercizio 2: (area)

(2) Siano $S(1, -2, -1), P(-1, 1, 1), Q(0, 1, -1)$.

a) verificare che non sono allineati,

b) trovare le coordinate di un punto R tali che S, P, Q, R siano vertici consecutivi di un parallelogramma.

c) calcolare l'area del triangolo SPQ e l'altezza relativa alla base SP .

Soluzione:

a) $\vec{SP} = P - S = (-1, 1, 1) - (1, -2, -1) = (-2, 3, 2),$

$\vec{SQ} = Q - S = (0, 1, -1) - (1, -2, -1) = (-1, 3, 0).$

Quindi $\vec{SP}$ e $\vec{SQ}$ non sono proporzionali.

b) $\vec{SR} = \vec{PQ} \Leftrightarrow R - S = Q - P \Leftrightarrow R = Q - P + S.$

Quindi $R = (0, 1, -1) - (-1, 1, 1) + (1, -2, -1) = (2, -2, -3)$

c) $\vec{SP} = (-2, 3, 2) - (1, -2, -1) = (-2, 3, 2), \vec{SR} = (2, -2, -3) - (1, -2, -1) = (1, 0, -2)$

$$\vec{SP} \wedge \vec{SR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6, -2, -3)$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{SP} \wedge \vec{SR}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{7}{2}.$$

d) $A_{\Delta} = \frac{1}{2}bh$, dove $b = \|\vec{SP}\| = \sqrt{17}$. quindi $h = \frac{2A_{\Delta}}{b} = \frac{7}{\sqrt{17}}.$

Esercizio 3: (angoli)

Dati u e v tali che $\|u\| = 5, \|v\| = 2$ e $\langle u, v \rangle = -6$. Calcolare $\|u \wedge v\|$.

Soluzione: $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta$
 $= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta$
 $= \|u\|^2 \|v\|^2 - (\langle u, v \rangle)^2$
 $= 25 \cdot 4 - 36 = 64$

Quindi $\|u \wedge v\| = 8.$

Esercizio 4: (norma)

Determinare i vettori di norma 3 perpendicolari a $u = (1, 1, 4)$ e $v = (1, -1, 0)$.

Soluzione:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (4, 4, -2)$$

la norma $\|(4, 4, -2)\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6,$
 quindi i vettori sono $(2, 2, -1)$ e $(-2, -2, 1).$

Esercizio 5: (angoli)

Sapendo che $\|u\| = 3$, $\|v\| = 5$ e $\|u + v\| = 7$ calcolare l'angolo fra u e v .

Soluzione:

$$\begin{aligned} \langle u + v, u + v \rangle &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\|u\|\|v\|\cos\theta + \langle v, v \rangle \\ 49 &= 9 + 30\cos\theta + 25 \text{ allora } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ quindi } \theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 6: (proiezione ortogonale)

Dati $u = (1, 1, -1)$ e $v = (1, -1, 2)$ decomporre v nella somma di due vettori $w_{\parallel}$ e $w_{\perp}$ rispettivamente parallelo e perpendicolare ad u .

Soluzione:

$$\begin{aligned} w_{\parallel} &= \pi_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{-2}{3}(1, 1, -1). \\ w_{\perp} &= v - \pi_u(v) = (1, -1, 2) - \frac{-2}{3}(1, 1, -1) = \frac{1}{3}(5, -1, 4). \end{aligned}$$

Esercizio 7: (rette e piani)

Dati $\alpha : 2x + y + 2z = -1$ ed $r : \begin{cases} hx + y - 2z = 0 \\ y + z = -2k \end{cases}$

Trovare i valori di h per cui a) r è parallela a α

b) Trovare i valori di k per cui r giace su α ,

Soluzione:

Il vettore perpendicolare al piano α è $n = (2, 1, 2)$.

Il vettore parallelo alla retta è $v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -h, h)$

a) $r \parallel \alpha \Leftrightarrow v \perp n \Leftrightarrow \langle v, n \rangle = 0$,

$$\langle v, n \rangle = 6 - h + 2h = 0 \Rightarrow h = -6.$$

b) $r \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} r \parallel \alpha \\ r \cap \alpha \neq \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B).$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2k \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 + 8k \end{array} \right),$$

$$\text{quindi } \rho(A) = \rho(A|B) \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}.$$

Esercizio 8: (rette parallele)

Date due rette

$$r : \begin{cases} x - hy + 2z = -1 \\ 3x + hy = 1 \end{cases} \text{ ed } s : \begin{cases} hx + hy - z = 0 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

a) trovare i valori h per cui r e s sono parallele.

b) In tal caso, individuare il piano su cui giacciono e

c) calcolare la loro distanza.

Soluzione:

$$a) \quad v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -h & 2 \\ 3 & h & 0 \end{vmatrix} = (-2h, 6, 4h) \quad w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h & h & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3h + 2, 3h, 2h)$$

$$v \parallel w \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{R}: v = \alpha w \Leftrightarrow \begin{cases} -2h = -3h\alpha + 2\alpha \\ 6 = 3h\alpha \\ 4h = 2h\alpha \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ha che $6 = 3h\alpha \Rightarrow h\alpha = 2$,
 sostituendo nella terza $4h = 2h\alpha = 4 \Rightarrow h = 1$. Quindi se $h = 1$ allora $\alpha = 2$.
 La prima equazione è verificata per $\alpha = 2$, $h = 1$.
 Quindi le rette sono parallele per $h = 1$.

b) Per $h = 1$ le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \text{ed } s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\text{sono parallele al vettore } v_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2).$$

Si scelgono un punto R su r e un punto S su s :

Ponendo $x = 0$ nelle equazioni che definiscono r , dalla seconda si ricava $y = 1$.

Sostituendo i valori $x = 0$ e $y = 1$ nella prima equazione si ha che

$$0 - 1 + 2z = -1 \rightarrow z = 0, \text{ quindi } R(0, 1, 0).$$

Ponendo $y = 0$ nelle equazioni che definiscono s , dalla seconda si ottiene $z = -1$,

sostituendo i valori $y = 0$, $z = -1$ nella prima si ha $x = -1$. Quindi $S(-1, 0, -1)$.

Il vettore $v = (-1, 3, 2)$, parallelo alle rette r ed s , e

il vettore $w = R - S = (0, 1, 0) - (-1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ sono paralleli al piano α che le contiene.

$$\text{Quindi } v \wedge w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, -4) \text{ è perpendicolare al piano, per tanto } \alpha : x + 3y - 4z = d.$$

Per determinare d si richiede che R (oppure S) appartenga al piano,

cioè le coordinate del punto scelto devono verificare l'equazione.

Si ha dunque che $d = 0 + 3 \cdot 1 + 0 = 3$,

quindi il piano che contiene le rette ha equazione cartesina $\alpha : x + 3y - 4z = 3$.

c) Per calcolare la distanza tra due rette parallele si cercano due punti dove un piano a loro perpendicolare le interseca, ad esempio il piano β perpendicolare a $v = (-1, 3, 2)$ che passa per $R(0, 1, 0)$ ha equazione $-x + 3y + 2z = 3$.

Siccome $R = \beta \cap r$, basta trovare la intersezione di β con la retta s , che è la soluzione

$$\text{del sistema: } P = \beta \cap s = \begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ x + y - z = 0 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{array} \right)$$

Le coordinate del punto P si trova risolvendo il sistema ridotto associato a l'ultima matrice:

$$P : \begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 4y + z = 3 \\ -7z = 3 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $z = -\frac{3}{7}$.

Sostituendo il valore di z nella seconda si ha $y = \frac{6}{7}$.

Sostituendo i valori di z e y nella prima equazione si ottiene $x = -\frac{9}{7}$.

Per tanto $P = (-\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7})$.

Dunque la distanza tra r ed s è

$$d(r, s) = d(R, P) = \sqrt{\left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{1-6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{91}{7}.$$

Esercizio 9: (rette) Considerare le retta di equazioni $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$ e la retta

di equazioni $s_t : \begin{cases} x + y + (t+3)z = 3 \\ x + 3y + 3z = t+3 \end{cases}$ al variare del parametro t .

- Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$, r e s_t sono parallele, incidenti o sghembe (posizione relativa).
- Nel caso $t = 0$ determinare l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
- Nel caso $t = -2$ calcolare la distanza tra le rette
- e trovare l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
- Nel caso $t = 1$ calcolare la distanza tra le rette
- e trovare l'equazione cartesiana della retta che le interseca ortogonalmente.

Soluzione:

a) (posizione relativa)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t+3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & t+3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & t+2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & t+2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & t+2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{array} \right)$$

Se $t = 0$ le rette sono incidenti,

se $t = -2$ sono parallele,

per $t \neq 0, 2$ sono sghembe.

b) Se $t = 0$ il piano che le contiene è $x + 3y + 3z = 3$.

c) (distanza tra rette parallele) Se $t = -2$,

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 3z = 3 \end{cases} \quad s_{-2} : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$R(0, 1, 0) \in r; \quad r \parallel s \parallel v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -2, 2),$$

Il piano α per R perpendicolare a v è $-y + z = -1$

La matrice completa associata al sistema $S = s_{-2} \cap \alpha$ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$ è $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$

riducendo

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right) \text{ e risolvendo si ottiene il punto } S = (4, 0, -1).$$

La distanza tra le rette è $d(r, s_{-2}) = d(R, S) = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

d) (piano per due rette parallele) $w = R - S = (0, 1, 0) - (4, 0, -1) = (-4, 1, 1)$,

Il piano che contiene r ed s_{-2} è perpendicolare a

$$w \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 4, 4) \parallel (1, 2, 2).$$

Il piano $x + 2y + 2z = 2$ passante per $R(0, 1, 0)$ e perpendicolare a $(1, 2, 2)$ contiene le rette r ed s_{-2} .

e) (distanza tra rette sghembe) Se $t = 1$,

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + 3z = 3 \end{cases} \quad s_1 : \begin{cases} x + y + 4z = 3 \\ x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$r \parallel v = (0, -2, 2), s \parallel w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-9, 1, 2).$$

$$\text{Se } w \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 9, 9) \parallel n = (1, 3, 3).$$

Il punto $S(7, 0, -1) \in s_1$.

Il piano β passante per S e perpendicolare a n ha equazione $x + 3y + 3z = 4$.

$$d(r, s_1) = d(R, \beta) = \frac{|3-4|}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

f) (retta perpendicolare a due rette sghembe)

Sia $t = 1$.

La retta l perpendicolare a r ed s_1 è parallela a $n = v \wedge w$.

Sia α il piano parallelo a n che contiene r , e sia β il piano parallelo a n che contiene s .

La retta l è l'intersezione dei piani α e β .

$$\text{Il piano } \alpha \text{ che contiene la retta } r \text{ è perpendicolare a } v \wedge n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 1, 1)$$

e passa per il punto $R(0, 1, 0) \in r$, quindi ha equazione $-6x + y + z = 1$.

$$\text{Il piano } \beta \text{ che contiene la retta } s \text{ ed è perpendicolare a } w \wedge n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-3, 29, -26)$$

e passa per il punto $S(7, 0, -1) \in s$ ha equazione $-3x + 29y - 28z = 7$.

Dunque la retta l che interseca r ed s_1 ortogonalmente ha equazione cartesiana

$$\alpha \cap \beta : \begin{cases} -6x + y + z = 1 \\ -3x + 29y - 28z = 7. \end{cases}$$

Esercizio 10: (punti equidistanti da tre punti non allineati)

Determinare i punti equidistanti dai punti $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, 1)$ e $C(-1, 2, 3)$

Soluzione:

Il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano perpendicolare a $\vec{AB}$ che passa per il punto medio M di A e B .

M soddisfa $\vec{AM} = \vec{MB}$, quindi $M - A = B - M$, si ha dunque $M = \frac{1}{2}(B + A)$.

$$\vec{AB} = B - A = (3, 0, 1) - (1, 2, -1) = (2, -2, 2),$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2}(B + A) = \frac{1}{2}((3, 0, 1) + (1, 2, -1)) = (2, 1, 0).$$

$$2x - 2y + 2z = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$$

Il luogo dei punti equidistanti da A e B è il piano $x - y + z = 1$

$$\vec{BC} = C - B = (-1, 2, 3) - (3, 0, 1) = (-4, 2, 2),$$

$$M_{BC} = \frac{1}{2}(C + B) = \frac{1}{2}((-1, 2, 3) + (3, 0, 1)) = (1, 1, 2).$$

Il luogo dei punti equidistanti da B e C è il piano $-2x + y + z = 1$

$$\vec{CA} = A - C = (1, 2, -1) - (-1, 2, 3) = (2, 0, -4),$$

$$M_{CA} = \frac{1}{2}(B + A) = \frac{1}{2}((1, 2, -1) + (-1, 2, 3)) = (0, 2, 1).$$

Il luogo dei punti equidistanti da A e C è il piano $x - 2z = -2$.

Il luogo dei punti equidistanti da A , B e C è l'intersezione dei tre piani:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \\ x - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La matrice associata al sistema e la matrice completa hanno rango 2,

dunque il sistema è compatibile e l'insieme delle soluzioni è la retta: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$

Notare che i sistemi lineari $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2z = -2 \end{cases}$ definiscono la stessa retta.

Esempio 1) Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(t, x, y, z) = (3t + 2y - z, -t - 2y + 3z, 2t + 2z)$$

Qualsiasi siano le basi scelte la matrice associata a f ha quattro colonne e tre righe.

Rispetto alle basi canoniche

$\mathcal{C} = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^4$ e

$\mathcal{C}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ le colonne della matrice rappresentativa di f sono

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, f(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Quindi la matrice è } M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativamente si può procedere a scrivere le righe della matrice:

le righe corrispondono ai coefficienti dei polinomi di grado 1 nelle variabili t, x, y, z .

La prima riga corrisponde ai coefficienti del polinomio $3t + 2y - z$, quindi è $(3 \ 0 \ 2 \ -1)$,

la seconda corrisponde ai coefficienti del polinomio $-t - 2y + 3z$, quindi è $(-1 \ 0 \ -2 \ 3)$,

e la terza corrisponde ai coefficienti del polinomio $2t + 2z$, quindi è $(2 \ 0 \ 0 \ 2)$.

Esempio 2) La trasposta:

sia $T : M(2, \mathbf{R}) \rightarrow M(2, \mathbf{R})$ definita da $T(A) = A^t$,

e sia $\mathcal{S} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base standard di $M(2, \mathbf{R})$.

$$T(E_{11}) = E_{11} = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

$$T(E_{12}) = T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21} = 0E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}.$$

$$T(E_{21}) = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} = 0E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

$$T(E_{22}) = E_{22} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}.$$

$$\text{Quindi la matrice di } T \text{ nella base } \mathcal{S} \text{ è } M_{\mathcal{S}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3) La derivata:

sia $D : \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_2[x]$ definita da $D(p(x)) = p'(x)$.

Siano $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ base di $\mathbf{R}_3[x]$ e $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ base di $\mathbf{R}_2[x]$.

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

$$\text{Quindi } M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esempio 4) La traccia:

si consideri l'applicazione traccia : $M(2, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, e siano $\mathcal{S} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base standard di $M(2, \mathbf{R})$ e $\mathcal{C} = \{1\}$ la base canonica di $\mathbf{R}$.

traccia (E_{11}) = 1, traccia (E_{12}) = 0, traccia (E_{21}) = 0, traccia (E_{22}) = 1 quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}}(\text{traccia}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 5) Matrice dell'applicazione identità in una base.

Sia V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Sia $\text{id}: (V, \mathcal{B}) \rightarrow (V, \mathcal{B})$ l'applicazione identità: $\text{id}(v_i) = v_i$.

$$\begin{aligned} \text{id}(v_1) &= v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ \text{id}(v_2) &= v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n \\ &\dots \\ \text{id}(v_n) &= v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1v_n \end{aligned} \quad \text{allora } M_{\mathcal{B}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 6) Matrice dell'applicazione identità in basi diverse. $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id})$:

Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $V = \mathbf{R}^3$, e sia

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ un'altra base.}$$

Sia $\text{id}: (V, \mathcal{B}) \rightarrow (V, \mathcal{C})$ l'applicazione identità definita da $\text{id}(v_i) = v_i$.

$$\begin{aligned} \text{id}(v_1) &= v_1 = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3 \\ \text{id}(v_2) &= v_2 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \quad \text{si ha quindi } M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ \text{id}(v_3) &= v_3 = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 \end{aligned}$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id})$?

Si determine ora la matrice dell'applicazione identità $\text{id}: (V, \mathcal{C}) \rightarrow (V, \mathcal{B})$ definita da $\text{id}(e_i) = e_i$.

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\text{id}(e_1) = e_1 = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ c = 0 \\ -a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{id}(e_2) = e_2 = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ c = 1 \\ -a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{id}(e_3) = e_3 = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ c = 0 \\ -a+b+c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}) = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id}))^{-1}$

Esercizio Sia $V = \mathbf{R}^3$, $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V .

Verifica: applicando lo sviluppo di Laplace per la seconda riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \text{ è LI,}$$

siccome $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, tre vettori LI formano una base.

Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Siccome $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base l'applicazione f è lineare.

Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

La matrice di f associata alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3 .

Cioè: $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id})$, $P^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id})$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice B di f associata alla base $\mathcal{C}$ ($B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$) bisogna moltiplicare a destra la matrice A per la matrice inversa di P , cioè $B = AP^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la matrice F rappresentativa di f nella base $\mathcal{B}$ ($F = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$) bisogna moltiplicare a sinistra la matrice A per la matrice inversa di P , cioè $B = P^{-1}A$.

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice E rappresentativa di f nelle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$, $E = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ si può ottenere moltiplicando a sinistra la matrice B per P^{-1} oppure moltiplicando a destra la matrice F per P^{-1} .

$E = P^{-1}B = FP^{-1}$:

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: L'ipotesi che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base di V è fondamentale:

Sia $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + v_3$ e sia $h: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $h(v_1) = h(v_3) = h(u) = w$.

Se h fosse lineare si avrebbe che $h(u) = h(v_1) + h(v_3) = 2w \neq w$, quindi l'applicazione h non è ben definita perché $\{v_1, u, v_3\}$ non è una base di $\mathbf{R}^3$

Metodo alternativo per trovare le matrici B, E ed F :

Rispetto alla base canonica i vettori v_1, v_2, v_3 si scrivono $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$, $v_3 = e_2 + e_3$
 La matrice $B = M_C^C(f) = ([f(e_1)]_C \quad [f(e_2)]_C \quad [f(e_3)]_C)$

$$w = f(v_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3)$$

$$w = f(v_2) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3)$$

$$w = f(v_3) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3)$$

Le colonne della matrice B si ottengono risolvendo il sistema lineare con incognite vettoriali:

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_3) = w \\ f(e_1) + f(e_3) = w \\ f(e_2) + f(e_3) = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = w \\ f(e_3) = \vec{0} \\ f(e_2) = w \end{cases} \text{ quindi } B = M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici E ed F :

$$E = M_B^C(f) = ([f(e_1)]_B \quad [f(e_2)]_B \quad [f(e_3)]_B) \text{ ed } F = M_B^B(f) = ([f(v_1)]_B \quad [f(v_2)]_B \quad [f(v_3)]_B)$$

Per i calcoli già fatti e per la definizione di f :

$$\text{le colonne di } E \text{ sono } \begin{cases} f(e_1) = w \\ f(e_2) = w \\ f(e_3) = \vec{0} \end{cases} \text{ e le colonne di } F \text{ sono } \begin{cases} f(v_1) = w \\ f(v_2) = w \\ f(v_3) = w \end{cases}$$

quindi bisogna calcolare le componenti del vettore w nella base $\mathcal{B}$ (cioè il vettore w_B):

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E = M_B^C(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ed } F = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio: (VII 6)

Considerare le applicazioni lineari $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y) = (4x + y, 3y, 2x + y)$

e $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da
$$\begin{cases} g(e_1 - e_3) &= -e_3 \\ g(2e_1 + e_2) &= e_1 + 5e_2 - e_3 \\ g(e_2 + e_3) &= e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases}$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ é la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Determinare la matrice rappresentativa di $g \circ f$ rispetto alle basi canoniche.

primo metodo

Si cerca la matrice di g nella base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$G = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3}(g) = (g(e_1) \ g(e_2) \ g(e_3))$$

$$\begin{cases} g(e_1 - e_3) &= g(e_1) - g(e_3) &= -e_3 & (1^a) \\ g(2e_1 + e_2) &= 2g(e_1) + g(e_2) &= e_1 + 5e_2 - e_3 & (2^a) \\ g(e_2 + e_3) &= g(e_2) + g(e_3) &= e_1 + 2e_2 - e_3 & (3^a) \end{cases}$$

$(1^a) + (3^a)$ elimina $g(e_3)$ e si ottiene:

$$(4^a): g(e_1) + g(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2g(e_1) + g(e_2) &= e_1 + 5e_2 - e_3 \\ g(e_1) + g(e_2) &= e_1 + 2e_2 - 2e_3 \end{cases}$$

sottraendo la 4^a dalla 2^a si elimina $g(e_2)$ e si ottiene $g(e_1)$;

$$g(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dalla (1^a) : $g(e_3) = g(e_1) + e_3$

$$g(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dalla (4^a) :

$$g(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ Quindi } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $C = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(g \circ f)$ è GF dove $F = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Quindi } C = GF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 18 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

secondo metodo

Siano $F = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(f)$, $A = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}(g)$, $P = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}(id)$

$G = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_3} = ?$, $C = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(g \circ f) = ?$

$G = AP^{-1} \Rightarrow C = GF = (AP^{-1})F$.

Quindi bisogna calcolare P^{-1} .

i dati sono

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ definita da } f(x, y) = (4x + y, 3y, 2x + y), \text{ quindi } F = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ definita da } \begin{cases} g(v_1) = -e_3 \\ g(v_2) = e_1 + 5e_2 - e_3 \\ g(v_3) = e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases}$$

$$\text{nelle basi } \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ e } \mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ di } \mathbf{R}^3 \text{ si ha che } A = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice dell'applicazione identità nelle basi $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e

$$\mathcal{B} = \{v_1 = e_1 - e_3, v_2 = 2e_1 + e_2, v_3 = e_2 + e_3\} \text{ di } \mathbf{R}^3 \text{ è } P = M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo di P^{-1} usando la riduzione per righe

$$\begin{aligned} (P \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Dunque } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora $G = AP^{-1}$ e $C = GF = (AP^{-1})F$.

$$G = AP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = GF = (AP^{-1})F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 18 & 3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & t+1 & 0 \\ t & t-1 & 2t \end{pmatrix}$.

a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$, A_t non è semplice.

b) Per $t = 1$ trovare una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori di A_1 .

Svolgimento:

$$A_t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & t+1-\lambda & 0 \\ t & t-1 & 2t-\lambda \end{pmatrix}$$

$p_{A_t}(\lambda) = (1-\lambda)(t+1-\lambda)(2t-\lambda)$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = t+1$, $\lambda_3 = 2t$.

Per $t \in \mathbf{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$.

caso 1) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ allora A_t è semplice.

caso 2) Se $1 = \lambda_1 = \lambda_2 = t+1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$.

La molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è $m_1 = 2$ e dell'autovalore 0 è $m_0 = 1$.

Per determinare se A_0 è semplice basta calcolare la molteplicità geometrica di 1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ha rango } 2.$$

La molteplicità geometrica $\mu_1 = \dim \ker(A_0 - I) = \dim \mathbf{R}^3 - \text{rango}(A_0 - I) = 3 - 2 = 1 < m_1$.

Quindi A_0 non è semplice.

caso 3) Se $1 = \lambda_1 = \lambda_3 = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2}$. Quindi $A_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{\frac{1}{2}} - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ ha rango } 2.$$

Quindi per $t = \frac{1}{2}$, $A_{\frac{1}{2}}$ non è semplice perché $\mu_1 = 1 < m_1 = 2$.

caso 4) Se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow t+1 = 2t \Rightarrow t = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Le molteplicità algebriche sono $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ha rango } 1.$$

Per tanto la molteplicità geometrica $\mu_2 = 2 = m_2$ quindi A_1 è semplice.

Dunque A_t non è semplice per $t = 0$ e per $t = \frac{1}{2}$.

b) Una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori di A_1 è costituita dall'unione delle basi degli autospazi V_2 e V_1 .

Un vettore X appartiene all'autospazio $V_2 = \ker(A_1 - 2I)$ se e solo se è soluzione del sistema omogeneo $(A_1 - 2I)X = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y \text{ e } z \text{ sono liberi. Quindi è il piano di equazione } x = 0.$$

$$\text{Perciò } V_2 = \{(0, y, z), y, z \in \mathbf{R}\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per $\lambda_1 = 1$, $V_1 = \ker(A_1 - I)$, quindi si cercano le soluzioni del sistema omogeneo $(A_1 - I)X = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}. \text{ La intersezione di due piani non paralleli}$$

$$\text{è una retta. } V_1 = \{(x, 2x, -x), x \in \mathbf{R}\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{La base di } \mathbf{R}^3 \text{ formata di autovettori di } A_{t=1} \text{ è } \mathcal{A} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Sia } P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ la matrice di passaggio, allora } D = P^{-1}AP \text{ è diagonale,}$$

$$\text{e sulla diagonale giacciono gli autovalori nell'ordine dei vettori della base: } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio: (VIII 3)

Sia f un'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(0, 1, 1) \in \ker f$ e $V_2 = \{(x, y, z)/x - 2y + z = 0\}$ è l'autospazio di f relativo all'autovalore 2.

a) Dire se f è semplice giustificando la risposta.

b) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$

Svolgimento:

a) L'autospazio V_2 ha molteplicità geometrica $\mu_2 = 2$.

Il vettore $(0, 1, 1) \in V_0 = \ker f \Rightarrow 0$ è autovalore di f e $(0, 1, 1)$ è un autovettore.

Quindi $\mu_0 = \dim \ker f \geq 1$.

Siccome la somma delle molteplicità geometriche è minore o uguale a $\dim \mathbf{R}^3$ si ha che

$1 + 2 \leq \mu_0 + \mu_2 \leq 3$, quindi $\dim V_0 = 1$. Quindi $\mu_0 + \mu_2 = \dim \mathbf{R}^3$ implica che f è semplice.

b) Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e A la matrice di f

$$A = M_{\mathcal{C}}(f) = (f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3))$$

I dati sono: $e_2 + e_3 \in \ker f$

$$V_2 = \{(x, y, z)/x - 2y + z = 0\} \Rightarrow \mathcal{B}_{V_2} = \{(2, 1, 0), (0, 1, 2)\}$$

$$(1^a) \quad f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = \vec{0}$$

$$(2^a) \quad f(2e_1 + e_2) = 2f(e_1) + f(e_2) = 4e_1 + 2e_2$$

$$(3^a) \quad f(e_2 + 2e_3) = f(e_2) + 2f(e_3) = 2e_2 + 4e_3$$

$$(1^a) \Rightarrow f(e_2) = -f(e_3)$$

sostituendo $f(e_2)$ nella (3^a) si ottiene $f(e_3) = 2e_2 + 4e_3$

dalla (2^a) : $2f(e_1) = -f(e_2) + 4e_1 + 2e_2 = 4e_1 + 4e_2 + 4e_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Alternativamente: nella base di autovettori $\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ la matrice che rappre-

senta f è $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e la matrice di cambiamento di base è $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quindi

$$A = PDP^{-1}.$$

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Calcolare il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ e determinare se A è diagonalizzabile.

Svolgimento:

Rango $A = 1 \Rightarrow \dim \ker A = \dim \mathbf{R}^4 - \text{rango } A = 3$, quindi 0 è autovalore di A di molteplicità geometrica 3. Per cui $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - \alpha) = \lambda^4 - \alpha\lambda^3$.

Il coefficiente di λ^3 è $\alpha = (-1)^3 \text{traccia } A = -32$.

Quindi $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 32)$ dunque 32 è autovalore di molteplicità (algebraica e) geometrica 1.

Di conseguenza A è diagonalizzabile per che la somma delle molteplicità geometriche è pari alla dimensione di $\mathbf{R}^4$.

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare A^{100} .

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 6 - 7\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X \in V_1 = \ker(A - I) \Leftrightarrow 2x + y = 0 \text{ e } X \in V_6 = \ker(A - 6I) \Leftrightarrow -x + 2y = 0,$$

$$\text{quindi } V_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } V_6 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare e^{At}

Svolgimento:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservare che $A^4 = I$.

Quindi la serie esponenziale è:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots & t - \frac{1}{6}t^3 + \dots \\ -t + \frac{1}{6}t^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Per $t = 0$, $e^{A0} = I$.

La derivata: $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Esempio: $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Esercizio 1)

In $\mathbf{R}^4$ si consideri il prodotto scalare canonico e l'insieme $S = v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Trovare una base per $W = S^\perp$.

svolgimento: $w \in W \Leftrightarrow \langle w, v_1 \rangle = 0, \text{ e } \langle w, v_2 \rangle = 0$

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + t = 0 \\ 2x - 3y - z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + t \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}t \end{cases}$$

queste sono le equazioni cartesiane del sottospazio W :

$$\text{L'elemento generico di } W \text{ è } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}(x+t) \\ x+t \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Quindi una base di } W \text{ è } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 2)

In $\mathbf{R}^3$ si consideri il prodotto scalare canonico e sia $W = \text{Span} \left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Determinare la matrice della proiezione ortogonale su W .

svolgimento:

notare che $\{v, w\}$ non è ortogonale ($\langle v, w \rangle = -2$).

$$\text{Il vettore proiezione ortogonale } \pi_w(v) = v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di W .

Per ottenere la proiezione ortogonale P_W di un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sul sottospazio W si calcolano

i prodotti scalari

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = x - z, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x + y + z$$

e si applica la definizione

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x-z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{x+y+z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix}$$

La matrice che rappresenta P_W nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

b) secondo metodo

Notare che W è il piano ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ vettore parallelo a $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ogni vettore $u \in \mathbf{R}^3$ si decompone $u = P_W(u) + \pi_n(u) \Rightarrow P_W(u) = u - \pi_n(u)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x - 2y + z$$

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x-2y+z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi come prima

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{1}{3}(x+y+z) \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix}$$

c) Calcolo di $P_W(e_1)$ geometricamente

Notare che W è il piano di equazione $x - 2y + z = 0$.

Per calcolare la proiezione dal punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al piano W basta calcolare l'intersezione fra

il piano W e la retta per Q parallela a n .

$$\text{La retta ha equazione parametrica } r(t) = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

Per trovare la intersezione si sostituisce $r(t)$ nella equazione del piano W :

si ha che $1 + t + 4t + t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{6}$

$$\text{Quindi } P_W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{6} \\ -2(-\frac{1}{6}) \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esempio: Si consideri $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico e sia V lo spazio delle matrici anti-simmetriche di ordine 3 con il prodotto scalare $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^t)$.

L'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow V$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{è una isometria, giacchè se } A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che $\text{tr}(AB^t) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 2 \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$.