MMMF - Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
AA 2025/2026

Informazioni e programma del corso
Università di Roma "Tor Vergata"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata
docente: Lucia Caramellino[1]

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Per una buona preparazione all'esame è fondamentale il corso EP/1-Elementi di Probabilità 1, o comunque un corso su calcolo stocastico. Per quanto riguarda gli strumenti finanziari, una buona introduzione viene fatta in Probabilità e Finanza (consigliato ma non essenziale).

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale, cui si accede dopo aver discusso con il docente gli algoritmi di simulazione analizzati durante il corso. Gli studenti devono obbligatoriamente prenotarsi all'esame alla pagina `ServiziOnLine` (Deplhi) di Tor Vergata. I programmi con l'implementazione degli esercizi vanno consegnati al docente prima della data d'esame (via `e-mail`; di seguito sono elencati tutti gli esercizi richiesti). Si fa esplicita richiesta di utilizzare un linguaggio di programmazione (ad es. C, C++ etc., ma non Scilab o analoghi software), a scelta dello studente. Si richiede la consegna dei file sorgente e, nel caso di grafici, di file salvati in pdf. Gli studenti possono lavorare in gruppo. Prima della data d'esame (o meglio, della data del primo del gruppo che sosterrà l'esame), sarà preso un appuntamento dove gli studenti che hanno consegnato i programmi illustreranno al docente gli stessi.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises.* Springer, Universitext, 2017.
- D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman and Hall, 1996 (o versioni successive).
- D. Lamberton: *Optimal stopping and American options.* Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, 2009 (note disponibili sul canale Teams del corso).
- Appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* (disponibili sul canale Teams del corso).

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", `email` e `web`

- Appunti su *Tassi di interesse* (disponibili sul canale Teams del corso).
- P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering.* Springer-Verlag, 2004.

Gli appunti sono sulla classe MSTeams del corso, oppure si possono richiedere via `e-mail`.

Programma

PARTE I: opzioni europee e metodi Monte Carlo

Richiami di calcolo stocastico

Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Il teorema di Girsanov. Il teorema di rappresentazione delle martingale Browniane. La caratterizzazione delle misure equivalenti su $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, dove $\mathscr{F}_T$ è la σ-algebra generata da un moto browniano e completata con gli insiemi di misura nulla. Richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema di esistenza ed unicità, stime in L^p, markovianità della soluzione).

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, 9 e 12.1, 12.3, 12.4; Lamberton e Lapeyre, Capitolo 3]

Il modello di Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes. Stragie autofinanzianti, ammissibili, replicanti. Portafoglio replicabile. Prezzo delle opzioni europee. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copetrura di opzioni call/put. Alcuni problemi riconducibili al modello di Black e Scholes: il modello a coefficienti dipendenti dal tempo; il modello di Garman-Kohlhagen (opzioni su valute); opzioni di scambio; opzioni composte call su call; opzioni asiatiche.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Capitolo 4 e Problemi 1, 2, 3, 5, 7 al Cap. 4]

Modelli con rumore browniano per i mercati finanziari

Modelli di Ito per l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario. Strategie autofinanzianti e ammissibili; misure di martingala equivalenti; arbitraggio; strategie replicanti. Completezza del mercato; prezzo di opzioni europee. Modelli di diffusione per i mercati finanziari: caratterizzazione della misura di martingala equivalente; la condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano $\geq$ numero di sottostanti e $\sigma\sigma^*$ uniformemente ellittica); teorema classico di completezza del mercato. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea; le greche di un'opzione europea. Formule di rappresentazione per soluzioni di equazioni alle derivate parziali paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet) e paraboliche su $\mathbb{R}^m$ (problema di Cauchy); formula di Feynman-Kac. Connessioni con la finanza.

[cfr Baldi, Cap 13 e Par. 10.3, 10.4]

Metodi numerici per la finanza

Il metodo Monte Carlo: stima di medie ed intervallo di confidenza. Simulazione del moto Browniano e del moto Browniano geometrico. Metodi numerici per la finanza: uso del metodo Monte Carlo. In particolare, seguendo il modello di Black e Scholes, si richiede l'implementazione un programma per il:

- calcolo numerico del prezzo della call e della put, con intervallo di confidenza al 95% e studio numerico della convergenza del prezzo call/put alla formula di Black e Scholes (Ex 3.1 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di una call asiatica, con intervallo di confidenza al 95% e con implementazione della formula di parità (Ex. 3.2 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di un'opzione call con barriera superiore (up-and-in e up-and-out) usando sia lo stimatore approssimato sia lo stimatore non distorto, con intervallo di confidenza al 95% e formula di parità; sviluppare il programma al variare della barriera superiore (Ex. 3.4 degli appunti);
- calcolo numerico del prezzo di un'opzione di scambio e di una digital su due sottostanti, con intervallo di confidenza al 95% e formula di parità (Ex. 3.5 degli appunti);
- calcolo numerico della delta di un'opzione call con le differenze finite e tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettazioni; studio numerico della convergenza, per $Q \to \infty$, alla delta calcolata con la formula esatta (Ex. 3.6 degli appunti);
- calcolo numerico della delta di opzioni digital e di scambio su due sottostanti, con le differenze finite e tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettazioni (Ex. 3.7 degli appunti);
- calcolo della copertura dinamica di un'opzione call e uguaglianza finale con il *payoff* dell'opzione, sia con il calcolo esatto della delta (Ex. 3.8 degli appunti) e sia approssimando la delta con la tecnica Monte Carlo (differenze finite e formula di rappresentazione, Ex. 3.8 degli appunti).

[cfr appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* o anche Glasserman]

PARTE II: approfondimenti

Si richiede un argomento scelto[2] tra i seguenti.

1. Tassi d'interesse

Il mercato obbligazionario: zero coupon bonds. L'importanza di un modello stocastico per la dinamica del tasso di interesse. L'EDS per r_t, $t \geq 0$, il titolo non rischioso

[2] Potranno essere presi in considerazione altri argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.

B_t, $t \geq 0$, il prezzo $p(t,T)$ del bond a maturità T e l'ipotesi $p(t,T) = F^T(r_t,t)$, con F^T regolare. Il differenziale di $p(t,T)$ per $t \in [0,T]$ e la costruzione del portafoglio autofinanziante che ha lo stesso rendimento del titolo non rischioso. Il "risk premium" e la misura di rischio neutro. Proprietà di martingala dei prezzi scontati e l'"equazione di struttura" della funzione prezzo F^T. Espressione della funzione-prezzo nei modelli affini: $F^T(x,t) = \exp(A(t,T) - xB(t,T))$ e le equazioni differenziali (ordinarie) per il calcolo di $A(t,T)$ e $B(t,T)$. I modelli mean-reverting per il tasso istantaneo r. Il modello di Vasicek. Il modello CIR. La curva dei tassi forward e il modello HJM: la dinamica in termini di processo di Ito del prezzo $p(t,T)$ dello zero coupon bond. L'inversione "alla Fubini" dell'integrale misto Lebesgue/Browniano per dimostrare la dinamica di processo di Ito del prezzo del bond nel modello HJM. Il modello HJM "gaussiano" ($\sigma(t,s) \equiv \sigma > 0$): l'espressione della curva forward, del tasso istantaneo di interesse e dello zero-coupon bond. Le opzioni sul mercato obbligazionario. Le opzioni replicabili: prezzo e copertura. La call su bond: prezzo nei modelli affini, in particolare Vasicek e CIR, e nel modello HJM. Cambio di numerario e conseguente semplificazione dell'espressione del prezzo dell'opzione. Caso HJM gaussiano: espressione semplificata del prezzo della call su bond.

[cfr Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi al Cap. 6; note distribuite dal docente]

2. Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza

Lo spazio S dei funzionali semplici e lo spazio P dei processi semplici; la derivata di Malliavin come operatore $D : S \to P$ e l'integrale di Skorohod come operatore $\delta : P \to S$; le tre proprietà fondamentali: dualità, chain rule e integrale di Skorohod di "un prodotto speciale"; estensione al caso infinito dimensionale: gli spazi $Dom_p(D) = \mathbb{D}^{1,p}$, $Dom_p(\delta)$, $p \geq 2$, e $Dom_\infty(D) = \mathbb{D}^{1,\infty}$, $Dom_\infty(\delta)$; la derivata di Malliavin D, l'integrale di Skorohod δ e le tre proprietà fondamentali; gli spazi $\mathbb{D}^{k,p}$ e $\mathbb{D}^{k,\infty}$. La formula di integrazione per parti alla Malliavin ed uso per il calcolo delle greche. La formula di Clark-Ocone ed uso per la rappresentazione della copertura delle opzioni.

[cfr Appunti su Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza, Cap. 2 (esclusa appendice Par. 2.6) e Cap. 3 (escluso Par. 3.3)]

3. Opzioni americane

Il problema dell'arresto ottimo: l'inviluppo di Snell, la decomposizione di Doob-Meyer. Prezzo e copertura delle opzioni americane: strategie ammissibili, opzioni americane e inviluppo di Snell, funzione-prezzo. Il caso delle equazioni differenziali stocastiche. Prezzo di opzioni call e put nel modello Black e Scholes; proprietà analitiche della funzione-prezzo. La disuguaglianza variazionale.

[cfr Lamberton, cap$\geq$ 2 degli appunti della scuola estiva di Lubiana 2009; considerare il caso di dividendi nulli.]