

Argomenti: leggi gaussiane multivariate; convergenza in legge; legge dei grandi numeri e teorema limite centrale; approssimazione normale; intervalli di fiducia.

Esercizio 1. Sia $X = (X_1, \dots, X_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $N(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva. Dunque,

$$\varphi_X(\theta) = e^{i\langle \theta, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\theta, \theta \rangle}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

- a) Dimostrare che ciascuna componente X_k del vettore X ha legge gaussiana su $\mathbb{R}$, di media e varianza da precisare.
- b) Dimostrare che se C è una matrice diagonale allora le coordinate $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. indipendenti. Viceversa, dimostrare che se $X_1, \dots, X_d$ sono v.a. gaussiane e indipendenti a valori in $\mathbb{R}$ allora $X = (X_1, \dots, X_d)$ è una gaussiana multivariata con matrice di covarianza diagonale.
- c) Dimostrare il seguente risultato più generale.

Supponiamo che C sia una matrice a blocchi del tipo (la notazione $*$ denota la trasposizione)

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O^* & \hat{C} \end{pmatrix}$$

con $\bar{C} \in \text{Mat}(k \times k)$, $\hat{C} \in \text{Mat}((d-k) \times (d-k))$, $O \in \text{Mat}(k \times (d-k))$, dove $1 \leq k < d$ e O è una matrice nulla. Provare che i sottovettori aleatori $\bar{X} = (X_1, \dots, X_k)$ e $\hat{X} = (X_{k+1}, \dots, X_d)$ sono indipendenti e gaussiani rispettivamente su $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{d-k}$.

[Sugg.: basta far vedere che la f.c. della coppia $(\bar{X}, \hat{X})$ si fattorizza nel prodotto delle f.c.: $\varphi_{\bar{X}, \hat{X}}(\bar{\theta}, \hat{\theta}) = \varphi_{\bar{X}}(\bar{\theta})\varphi_{\hat{X}}(\hat{\theta})$, per ogni $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{d-k}$.]

Esercizio 2. In questo esercizio ci proponiamo di dimostrare un risultato di algebra lineare.

Sia $\odot : \text{Mat}(n \times n) \times \text{Mat}(n \times n) \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$ il prodotto tra matrici definito da

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad A, B \in \text{Mat}(n \times n).$$

Proposizione 1. Se $A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ sono simmetriche e semidefinite positive allora $A \odot B$ è simmetrica e semidefinita positiva.

Useremo una tecnica probabilistica. Per tale motivo, siano $\bar{C}, \hat{C} \in \text{Mat}(n \times n)$ matrici simmetriche e semidefinite positive e sia $C \in \text{Mat}(2n \times 2n)$ definita da

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & O \\ O & \hat{C} \end{pmatrix}$$

dove $O \in \text{Mat}(n \times n)$ denota la matrice nulla.

- a) Dimostrare che C è simmetrica e semidefinita positiva.

Sia X una v.a. su $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $X \sim N(0, C)$. Definiamo $\bar{X}$ il vettore delle prime n componenti di X e $\hat{X}$ il vettore delle rimanenti componenti, cioè

$$\bar{X}_i = X_i \quad \text{e} \quad \hat{X}_i = X_{n+i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiamo ora $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ la v.a. a valori in $\mathbb{R}^n$ data da

$$Y_i = \bar{X}_i \hat{X}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- b) Dimostrare che per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \bar{C}_{ij} \hat{C}_{ij}.$$

Sulla base dei punti **a)** e **b)**, dimostrare la Proposizione 1.

Esercizio 3. Siano X e Z due v.a. reali indipendenti tali che $X \sim N(0, 1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(Z = -1)$. Definiamo $Y = ZX$.

- a) Scrivere la funzione caratteristica di Y e dedurre che $Y \sim N(0, 1)$.
- b) Scrivere la funzione caratteristica di (X, Y) e dedurre che X e Y non sono indipendenti.
- c) Verificare che $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- d) È possibile che la coppia (X, Y) abbia legge gaussiana su $\mathbb{R}^2$?

[Sugg: dovendo calcolare $\mathbb{E}(f(X, Z))$, con f opportuna, si potrebbe usare la seguente relazione: $f(X, Z) = f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, Z)\mathbb{1}_{Z=-1} = f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1} + f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}$ ed essendo $X \perp\!\!\!\perp Z$, si ha $\mathbb{E}(f(X, Z)) = \mathbb{E}(f(X, 1)\mathbb{1}_{Z=1}) + \mathbb{E}(f(X, -1)\mathbb{1}_{Z=-1}) = \mathbb{E}(f(X, 1))\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{E}(f(X, -1))\mathbb{P}(Z = -1)$.]

Esercizio 4. Sia $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ una v.a. su $\mathbb{R}^d$ di legge $N(\mu, C)$, con $\mu \in \mathbb{R}^d$ e $C \in \text{Mat}(d \times d)$ simmetrica e semidefinita positiva.

- a) Per $m \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \text{Mat}(k \times d)$, sia $W = m + AZ$. Dimostrare che W è ancora gaussiana e precisare i parametri che caratterizzano la legge. Dedurre poi che per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, la v.a. $\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_d Z_d$ è gaussiana, di parametri da determinare.
- b) Siano X e Y due v.a. su $\mathbb{R}$ congiuntamente gaussiane, centrate e tali che $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ e $2X + Y \perp\!\!\!\perp X - 3Y$.
 - b1) Scrivere la matrice di covarianza di (X, Y) .
 - b2) Calcolare la legge di $(X + Y, 2X - Y)$.

Esercizio 5. Sia $X = 2U - V$, dove (U, V) è un vettore gaussiano, con $\mathbb{E}(U) = 6$, $\mathbb{E}(V) = 2$ e matrice di covarianza

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare $\mathbb{P}(4 \leq X < 16)$.
- b) Determinare c tale che $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.1$.

Esercizio 6. a) Siano $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. su $\mathbb{R}$, X una v.a. su $\mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ allora $aX_n + b \xrightarrow{\mathcal{L}} aX + b$.

- b) Dimostrare la seguente versione del TLC: se $\{X_n\}_n$ è una successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza σ^2 allora

$$\bar{S}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0, \sigma^2).$$

Esercizio 7. a) Sia X_n una v.a. con densità di probabilità f_n , $n = 1, 2, \dots$. Sia f una funzione continua a tratti tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Dimostrare che f è una densità di probabilità e, detta X una v.a. con densità f , $X_n \rightarrow X$ in legge.

- b) Per $n = 1, 2, \dots$, sia X_n una v.a. con f.r. $F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}$ se $0 \leq x < 1$, $F_n(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_n(x) = 1$ se $x \geq 1$.
 - b1) Dimostrare che $X_n \rightarrow X$ in legge, con $X \sim \text{Un}(0, 1)$. Dedurre che X ha densità, che indichiamo con f .
 - b2) Scrivere la densità f_n di X_n e provare che non vale la condizione del punto a), cioè la successione delle densità $\{f_n\}_n$ non converge alla densità f della v.a. limite nel senso scritto in a).

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che se g è una funzione continua a tratti ed integrabile su $\mathbb{R}$ tale che $\int_I g(x)dx \geq 0$ per ogni intervallo I in $\mathbb{R}$ allora $g(x) \geq 0$ per quasi ogni x , cioè le x per cui non vale la disuguaglianza determinano un insieme finito o numerabile.]

Esercizio 8. Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \text{Un}(0, \frac{1}{n})$.

- a) Studiare la convergenza in legge della successione $\{n^\gamma X_n\}_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
- b) Studiare la convergenza in legge di $\{(nX_n)^\beta\}_n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. tali che $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = n^\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Studiare la convergenza in legge di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 10. Sia N il primo istante (aleatorio!) in cui si osserva l'uscita di testa in una serie di lanci ripetuti di una moneta. Sia $p \in (0, 1)$ la probabilità che esca testa. Studiare la convergenza in legge di $2pN$ quando $p = p_n \rightarrow 0$.

[Oss: poiché la legge di N dipende da p , se $p = p_n$ anche N dipende da n , quindi si chiede di studiare la convergenza in legge di $2p_n N_n$.]

Esercizio 11. Per $n \geq 1$, sia X_n una v.a. tale che $\mathbb{P}(X_n = n) = \alpha_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$, dove $\{\alpha_n\}_n \subset [0, 1]$.

- a) Scrivere la f.c. di X_n .
- b) Dimostrare che $\{X_n\}_n$ converge in legge se e solo $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Esercizio 12. Siano X e Y v.a. indipendenti di legge $\text{Exp}(1)$ e siano (X_k, Y_k) , $k \geq 1$ copie indipendenti di (X, Y) .

- a) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\sum_{k=1}^n (X_k + Y_k) + \sqrt{2n} - 2n| > \sqrt{2n})$.
- b) Posto $W_n = \min_{1 \leq k \leq n} (X_k + Y_k)$ e $T_n = \max_{1 \leq k \leq n} (X_k + Y_k)$, studiare la convergenza in legge delle successioni $\{W_n\}_{n \geq 1}$ e $\{T_n\}_{n \geq 1}$. $\{W_n\}_{n \geq 1}$ e/o $\{T_n\}_{n \geq 1}$ convergono in probabilità?

Esercizio 13. Per $n \geq 1$, sia $X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, $\lambda > 0$.

- a) Usando la legge dei grandi numeri, dimostrare che $\frac{\lambda X_n}{n} \xrightarrow{P} 1$.
- b) Usando il teorema limite centrale, dimostrare che $\frac{\lambda X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \text{N}(0, 1)$.

Esercizio 14. In una popolazione femminile (adulta) è noto che la statura media è 164 cm e che nell'88.5% dei casi la statura è inferiore a 170 cm. Si suppone che la variabile "statura" sia normalmente distribuita.

- a) Calcolare la deviazione standard.
- b) Consideriamo un campione di 25 donne, prese a caso nella popolazione femminile. Calcolare la probabilità che la media aritmetica delle stature osservate nel campione sia maggiore di 166 cm.

Esercizio 15. Siano X, Y v.a. indipendenti con $X \sim \text{Un}(0, 2)$ e $Y \sim \text{Un}(-1, 0)$. Sia $\{Z_k\}_k$ una successione di copie indipendenti di $Z = X - Y$ e $\{S_n\}_n$ la successione delle somme parziali: $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(|2S_n - 3n| < \sqrt{\frac{5n}{3}}\right) = 2\Phi(1) - 1.$$

Esercizio 16. Sia X una v.a. con densità di probabilità

$$p(x) = \frac{3}{x^4} \mathbb{1}_{x>1}.$$

- a) Dire per quali valori di β esiste $\mathbb{E}[X^\beta]$ e, se possibile, calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}(X)$.

Sia $\{X_n\}_n$ una successione di copie indipendenti di X e $\{S_n\}_n$ la successione delle somme parziali: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

b) Usando la disuguaglianza di Chebycev, stimare n affinché $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{3}{2}\right| > 0.1\right) \leq 10^{-3}$.

c) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{2S_n - 3n}{\sqrt{n}} > 0\right)$.

Esercizio 17. Un dado (non truccato) viene tirato 300 volte. Sia X la somma dei punteggi. Calcolare approssimativamente le probabilità seguenti:

a) $\mathbb{P}(X > 1000)$;

b) $\mathbb{P}(1000 < X \leq 1100)$.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ e $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.]

Esercizio 18. a) Una moneta equa viene tirata 1000 volte. Qual è la probabilità di ottenere un numero di teste compreso tra 490 e 520?

b) Una moneta equa viene tirata 1000 volte. Determinare k affinché la probabilità di ottenere un numero di teste compreso tra 490 e k sia circa 0.7.

c) Una moneta equa viene tirata più di 800 volte. Quante volte dev'essere tirata perché con probabilità maggiore di 0.6 escano più di 400 teste?

d) Trovare condizioni sulla probabilità p che in un lancio singolo esca testa affinché si abbia: $\mathbb{P}(S_{1000} \leq 201) > 0.5$

Esercizio 19. La quantità di neve, che cade al giorno, in un certo periodo dell'anno, su un tratto di autostrada, si può modellizzare come una variabile aleatoria continua, di media 1.5 pollici e deviazione standard 0.3 pollici.

a) Qual è la probabilità (approssimata) che in 50 giorni cadano meno di 70 pollici di neve?

b) Qual è la probabilità (approssimata) che in 50 giorni cadano tra i 70 e i 90 pollici di neve?

Esercizio 20. Un dado dà probabilità $p \in (0, 1)$ all'uscita di 1, gli altri risultati (2, 3, 4, 5, 6) risultano invece equiprobabili. Sia X il risultato di un lancio di questo dado.

a) Scrivere la legge di X .

b) Calcolare $\mu = \mathbb{E}(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$. Trovare inoltre una stima dall'alto per $\sup_{p \in (0,1)} \sigma^2$.

Il dado viene poi lanciato n volte e, ad ogni lancio, viene registrato il risultato ottenuto.

c) Scrivere un intervallo di fiducia di livello 95% per μ e, di conseguenza, per p .

d) Vengono effettuati 1000 lanci, ottenendo una media dei risultati pari a 2.7. Cosa si può dire di p ?

e) Stimare il numero di lanci n che occorre effettuare affinché l'intervallo di fiducia per p abbia ampiezza al più 10^{-2} .

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ e $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.]

Esercizio 21. Si vuole studiare una certa caratteristica, che chiameremo $\mathcal{C}$, presente in una popolazione. Tale popolazione è costituita da 2 gruppi, che indicheremo con A e B . Si sa che $\mathcal{C}$ è presente nel gruppo A in proporzione γ e nel gruppo B in proporzione $1 - \gamma$, dove $\gamma \in [0, 1]$ non è noto. Per studiare γ , un gruppo, tra A e B , viene scelto in base ad un esperimento che con probabilità $2/3$ porta alla scelta di A e con probabilità $1/3$ alla scelta di B . Una volta determinato il gruppo, si prende a caso un individuo e si osserva la presenza o meno della caratteristica $\mathcal{C}$.

a) Scrivere uno stimatore non distorto e consistente per γ .

b) Determinare un intervallo di fiducia per γ al 95% e determinare il numero n di osservazioni affinché l'ampiezza di tale intervallo sia dell'ordine di 10^{-3} .