

Argomenti: uso del TCV per il calcolo di densità; media, varianza, covarianza e matrice di covarianza di v.a. assolutamente continue; legge gaussiana su $\mathbb{R}$ e legge chi-quadro; funzione caratteristica.

Esercizio 1. Sia (X, Y) una v.a. in $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2} \mathbb{1}_{x>1, y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare $\mathbb{P}(Y < 2X)$.
- b) Calcolare la densità congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.
- c) Calcolare, se esiste, $\mathbb{E}(U^n)$, dove $n \geq 1$ è un intero fissato.

Esercizio 2. Si chiama legge di Laplace di parametro $\lambda > 0$ quella individuata dalla densità

$$p(x) = c e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare c . Dire se X ha momento di ordine k , con $k \geq 1$. E qualora esistano, calcolare media e varianza di X .
- b) Calcolare la densità di $Z = \alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta di una legge nota?
- c) Calcolare la legge di $W = |X|$. Si tratta di una legge nota? Esistono media e varianza? Se sì, quanto valgono?

Esercizio 3. Sia X una v.a. con densità

$$p(x) = (\mu + 1) x^\mu \mathbb{1}_{x \in (0,1)},$$

dove $\mu > 1$ è un parametro fissato.

- a) Dire per quali valori di μ esiste la media di X e calcolarla.
- b) Sia $Y \sim \text{Exp}(1)$ una v.a. indipendente da X . Calcolare la densità della v.a. $X + Y$.

Esercizio 4. Una v.a. X su $\mathbb{R}$ è detta “di Cauchy” se ha densità

$$p(x) = \frac{c}{1 + x^2}$$

- a) Mostrare che $c = 1/\pi$ e scrivere esplicitamente la funzione di distribuzione associata.
- b) Dire se X ha valor medio. X ha varianza?
- c) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media? Ha varianza?
- d) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z . Z ha media? Ha varianza?

Esercizio 5. Siano X e Y v.a. indipendenti tali che $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Calcolare la densità e la f.r. di:

- a) $Z = X + Y$;
- b) $W = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si tratta di leggi note?

Esercizio 6. Sia X una v.a. con densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$, ovvero

$$p_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad \alpha, \lambda > 0.$$

- a) Esistono i momenti di $Y = 1/X$? Se sì, fino a quale ordine?
- b) Calcolare, se possibile, la media di Y .
- c) Calcolare, se possibile, $\text{Cov}(X, Y)$. Che tipo di dipendenza c'è tra X e Y ?

Esercizio 7. Siano X ed Y due v.a. indipendenti $X \sim \text{Un}(0, 1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$.

- a) Posto $U = X$ e $V = X - Y$, calcolare la densità congiunta di (U, V) .
- b) Usando a), calcolare la densità di $X - Y$.
- c) Usando b), calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$.

Esercizio 8. Sia (X, Y) un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^2$ con densità di probabilità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{xy^2} \mathbb{1}_{y>x>1}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare le leggi marginali. X ha media? E Y ?
- b) Posto $U = \ln X$ e $V = \ln Y - \ln X$, verificare che U e V sono ben poste, determinare la densità congiunta di (U, V) e di conseguenza $\text{Cov}(U, V)$.

Esercizio 9. Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x, y) = c \sqrt{x^2 + y^2} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$$

- a) Calcolare c e la matrice di covarianza di (X, Y) .
- b) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti?
- c) Sia R la distanza di (X, Y) dall'origine. Calcolare, se esistono, $\mathbb{E}(R)$ e $\text{Var}(R)$.
- d) Per $n \geq 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X, Y) . Posto $D_n = \min(R_1, \dots, R_n)$, $n \geq 1$, dimostrare che per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$.

Esercizio 10. [Distribuzione chi-quadro]

- a) Sia $X \sim N(0, 1)$. Dimostrare che $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dedurre la seguente proprietà della funzione Gamma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

- b) Per $n \geq 1$, siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. di legge $N(0, 1)$. Dimostrare che $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

La legge $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ è detta *legge chi-quadro* (o *chi-quadrato*) con n gradi di libertà¹ ed è indicata con $\chi^2(n)$. Dunque, in **b)** si dimostra che date n v.a. indipendenti gaussiane standard $X_1, \dots, X_n$, allora $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Esercizio 11. Sia $X \sim N(10, 36)$. Facendo uso delle tavole, calcolare:

- a) $\mathbb{P}(X > 4)$;
- b) $\mathbb{P}(4 < X \leq 16)$;
- c) $\mathbb{P}(X \leq 22)$;
- d) il valore di c per cui $\mathbb{P}(X > c) = 0.10$;
- e) il valore di c per cui $\mathbb{P}(|X - 10| > c) = 0.10$.

Esercizio 12. Presa $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, siano $\bar{\varphi}$ la funzione coniugata e $|\varphi|^2$ la funzione modulo (complesso) al quadrato.

Dimostrare che se $\varphi(t)$ è una funzione caratteristica allora anche $\bar{\varphi}(t)$, $\varphi^2(t)$ e $|\varphi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche. Equivalentemente: se $\varphi(t)$ denota la funzione caratteristica di una v.a. X , cioè $\varphi_X(t) = \varphi(t)$, esibire tre v.a. Y, Z e W con funzione caratteristica data da $\varphi_Y(t) = \bar{\varphi}(t)$, $\varphi_Z(t) = \varphi^2(t)$ e $\varphi_W(t) = |\varphi|^2(t)$ rispettivamente.

Esercizio 13. Sia $\varphi(t)$ la funzione caratteristica di una v.a. X su $\mathbb{R}$ dotata di momento secondo. Dimostrare che si ha sempre $\varphi'(0)^2 \geq \varphi''(0)$.

[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]

Esercizio 14. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su $\mathbb{R}^2$ con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y > x > 0}.$$

- a) Calcolare c e, se esiste, $\mathbb{E}(XY)$.
- b) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$ di (X, Y) .
- c) Usando la funzione caratteristica $\varphi_{X,Y}$, calcolare $\text{Cov}(X, Y)$.
[Sugg.: ricordare il legame tra funzioni caratteristiche e momenti...]
- d) Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_{U,V}$ di $U = X$ e $V = Y - X$. U e V sono indipendenti?
[Si ricorda che, per Z v.a. in $\mathbb{R}^d$, A matrice $n \times d$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si ha $\varphi_{AZ+b}(\theta) = e^{i\langle \theta, b \rangle} \varphi_Z(A^T \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$.]
- e) Calcolare la densità congiunta di $U = X$ e $V = Y - X$ usando dapprima il punto **d)** e poi usando il TCV.

¹La distribuzione $\chi^2(n)$ riveste un ruolo particolarmente importante in statistica, dov'è usata per la verifica di test d'ipotesi sulla varianza (rozzamente, si tratta di test statistici per la validazione di un'ipotesi fatta sulla varianza, quando questa non è nota).