Tutorato III
Probabilità e Statistica
a.a. 2024/2025

Argomenti: leggi condizionali; calcolo di leggi di funzioni di v.a.; speranza matematica; speranza matematica condizionale; momenti; varianza e covarianza; retta di regressione; disuguaglianza di Chebycev e legge dei grandi numeri.

Esercizio 1. Un'urna, che indicheremo con U, contiene 2 palline bianche e 1 pallina rossa. Da U vengono effettuate n estrazioni con reinserimento. Sia N il numero totale di palline bianche estratte. Una seconda urna, urna V, viene riempita con N palline bianche e $n - N$ palline rosse.

(a) Calcolare la distribuzione di N.

(b) Dall'urna V viene estratta una pallina: calcolare la probabilità che sia bianca (si interpreti il risultato!).

(c) Se dall'urna V stata estratta una pallina bianca, per quali valori di n la probabilità di aver estratto dall'urna U una sola pallina bianca è più grande di 1/2?

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = np$.]

Esercizio 2. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x \text{ e } x, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che effettivamente p_{XY} è una densità discreta su $\mathbb{R}^2$.

b) Si ha: $\mathbb{P}(Y < X) = 0$. Giustificare questa affermazione senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

c) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note? X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le distribuzioni condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$, per y e x in un insieme da specificare. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 3. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(|Y| = X)$.

b) Scrivere le distribuzioni marginali. Si tratta di leggi note? Riconducibili a leggi note?

Esercizio 4. Siano X e Y v.a. con densità discreta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (1-p)^{|x|-1}p & \text{se } x = \pm1, \pm2, \pm3, \dots \text{ e } y = \mathrm{sgn}(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e la funzione sgn, detta "funzione segno", è definita da: $\mathrm{sgn}(\xi) = +1$ se $\xi > 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ e $\mathrm{sgn}(\xi) = -1$ se $\xi < 0$.

a) Si ha: $\mathbb{P}(Y = \sqrt{2}) = 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$. Giustificare queste affermazioni senza fare conti (niente foglio e penna!), guardando solo alla densità congiunta.

b) Mostrare che dev'essere $c = 1/2$.

c) Scrivere le densità marginali di X e di Y. Le v.a. X e Y sono indipendenti?

d) Scrivere le densità condizionali di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$. Verificare formalmente che $\mathbb{P}(X > 0 \mid Y = -1) = 0$.

Esercizio 5. Siano X e Y due v.a. discrete a valori in E_X e E_Y rispettivamente, con densità congiunta discreta p_{XY} data da: $p_{XY}(x,y) = g_1(x)g_2(y)$, $x \in E_X$ e $y \in E_Y$, dove $g_1, g_2 \geq 0$. Siano p_X e p_Y le rispettive densità marginali. Dimostrare che

a) posto $c_1 = \sum_{x \in E_X} g_1(x)$ e $c_2 = \sum_{y \in E_Y} g_2(y)$, si ha $0 < c_1, c_2 < +\infty$;

b) $c_1 \cdot c_2 = 1$;

c) $p_X(x) = c_1^{-1} g_1(x)$ e $p_Y(y) = c_2^{-1} g_2(y)$.

Dedurre il seguente risultato:

d) *Due v.a. discrete X e Y sono indipendenti se e solo se la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni che dipendono dalle singole variabili, ovvero: esistono due funzioni g_1 e g_2 tali che la densità congiunta di X e Y si può scrivere $p_{XY}(x,y) = g_1(x)g_2(y)$.*

Esercizio 6. Siano X e Y v.a. indipendenti t.c.

$$X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione di ripartizione di X e di Y.

b) Posto $Z = X^2$, dire quali valori può assumere Z. Calcolare la densità discreta di Z e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

c) Posto $W = Z + Y$, dire quali valori può assumere W. Calcolare la densità discreta di W e disegnare la relativa funzione di ripartizione.

Esercizio 7. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare la distribuzione condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

b) Calcolare la distribuzione congiunta di $Z = X + 1$ e $W = Y - X$. Z e W sono indipendenti?

Esercizio 8. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Verificare che la v.a. $W = Y/X$ è ben posta e calcolarne la legge.

b) Calcolare la legge di $X + Y$.

Esercizio 9. Siano p, q densità discrete di v.a. a valori in $E \subset \{0, 1, \dots\}$. Si dice che q è *assolutamente continua* rispetto a p, in simboli: $q \ll p$, se per ogni $k \in E$ tale che $p(k) = 0$ allora si ha anche $q(k) = 0$. E si chiama *entropia* di una densità q rispetto a una densità p la quantità

$$H(q;p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in E} \log \frac{q(k)}{p(k)}\, q(k) & \text{se } q \ll p \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che, in generale, $H(p;q) \neq H(q;p)$ ed inoltre che si ha sempre $H(p;p) = 0$.

a) Calcolare $H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ quando p_λ è la densità di Poisson di parametro λ. Mostrare che $\lambda \mapsto H(p_\lambda; p_{\lambda_0})$ si annulla per $\lambda = \lambda_0$ insieme alla sua derivata prima, mentre la derivata seconda è positiva. Dedurre che $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) \geq 0$ e $H(p_\lambda; p_{\lambda_0}) = 0$ solo se $\lambda = \lambda_0$.

b) Per $p, p_0 \in (0, 1)$, calcolare $H(\mu_p; \mu_{p_0})$, dove μ_p è la densità $\mathrm{Bi}(n, p)$. Provare che $H(\mu_p; \mu_{p_0}) \geq 0$ e $H(\mu_p; \mu_{p_0}) = 0$ solo se $p = p_0$.

Esercizio 10. Siano X e Y due v.a. discrete, con densità discreta congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-2}}{x!\,(y-x)!} & \text{se } y \geq x, \text{ con } x, y = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Dire se X e/o Y hanno media ed in caso affermativo, calcolarne le medie. E se esiste, calcolare $\mathbb{E}(X - Y)$.

b) Calcolare la media condizionale di Y dato che $X = x$, per x appartenente ad un insieme opportuno che si chiede di specificare.

Esercizio 11. Sia (X, Y) una coppia di v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)!}\,e^{-1} & \text{per } x = 1, 2, \dots \text{ e } y \in \{-x, 0, x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per $x = -1, 1$, dire se esiste e in caso affermativo calcolare la media condizionata di Y dato $X = x$.

Esercizio 12. Siano X, Y, Z tre v.a. indipendenti, con legge geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Calcolare la media condizionata di X dato $X + Y$ e di Z dato $X + Y$.

Esercizio 13. In uno schema di Bernoulli, con $p =$probabilità di ottenere 1, calcolare il numero medio di esperimenti che occorre effettuare perché per la prima volta si osservi la sequenza 01.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che, per $\alpha \in (-1, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.]

Esercizio 14. Una compagnia di assicurazioni ha un numero N (molto grande) di assicurati contro un dato rischio che ha una probabilità p (molto piccola) di colpire ogni singolo assicurato nel corso di un anno (si supponga che il numero N di assicurati e la probabilità p del rischio rimangano costanti nel corso degli anni). Siano X_1 e X_2 il numero di assicurati che la compagnia sarà chiamata ad indennizzare rispettivamente nel primo e nel secondo anno e sia $Z = X_1 + X_2$ il numero totale di indennizzi nei primi due anni. Per la particolare natura del rischio in questione, si può supporre che eventi che si riferiscono ad assicurati diversi siano indipendenti. Si supponga che anche X_1 e X_2 siano indipendenti.

1. Quale legge è ragionevole assumere per le v.a. X_1 e X_2? [Sugg.: si ricordi il comportamento asintotico della distribuzione binomiale...]

2. Sulla base del modello imposto in 1., qual è la distribuzione di Z?

3. La compagnia versa ad ogni assicurato, in caso d'incidente, un indennizzo pari ad I e riceve da ogni assicurato un premio pari a $\frac{5}{4}pI$. Definiamo il "beneficio annuale" della compagnia il denaro guadagnato in un anno, ovvero le entrate meno le uscite di denaro annuali. In media qual è il beneficio della compagnia in un anno?

Supponiamo che la compagnia disponga di capitale iniziale $K = 10^9$ e che $N = 2 \cdot 10^4$, $p = 5 \cdot 10^{-5}$, $I = 10^9$. Ciò significa che dispone di un capitale pari a $K + \frac{5}{4}pNI$ all'inizio del primo anno e incassa $\frac{5}{4}pNI$ all'inizio del secondo anno.

4. Si verifichi che la compagnia si troverà in difficoltà se avverranno più di due incidendi nel primo anno oppure più di tre incidenti nei primi due anni.

5. Qual è la probabilità che la compagnia si trovi in difficoltà allo scadere del secondo anno?

Esercizio 15. Sia Y una v.a. discreta di densità p_Y ed indichiamo con E_Y l'insieme dei valori che Y può effettivamente assumere: $E_Y = \{y : p_Y(y) > 0\}$. Sia X una v.a. con speranza matematica finita e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$\varphi(y) = \mathbb{E}(X \,|\, Y = y) \text{ se } y \in E_Y \text{ e } \varphi(y) = 0 \text{ altrimenti.}$$

a) Dimostrare che anche $\varphi(Y)$ ha speranza matematica finita e si ha $\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \mathbb{E}(X)$.

La v.a. $\varphi(Y)$ è detta *media condizionale di X dato Y*, e spesso si denota con la notazione $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
D'ora in poi, supporemo che X abbia anche momento secondo finito.

b) Dimostrare che $\varphi(Y)$ ha momento secondo finito.

[Sugg.: ricordiamo che, data una qualsiasi v.a. Z, si ha $|\mathbb{E}(Z)|^2 \le \mathbb{E}(|Z|^2)$, cioè $|\sum_z z p_Z(z)|^2 \le \sum_z |z|^2 p_Z(z)$.]

c) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $g(Y)$ abbia momento secondo finito. Dimostrare che $\mathbb{E}(g(Y)\varphi(Y)) = \mathbb{E}(g(Y)X)$.

d) Sia $\psi : E_Y \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\psi(Y)$ abbia momento secondo finito. Dimostrare che $\mathbb{E}(|\psi(Y) - X|^2) \geq \mathbb{E}(|\varphi(Y) - X|^2)$.

[Sugg.: potrebbe essere utile scrivere $\mathbb{E}(|\psi(Y) - \varphi(Y)|^2) = \mathbb{E}(|(\psi(Y) - X) + (X - \varphi(Y))|^2)$, sviluppare il quadrato, usare la linearità ed il punto **c)**...]

Oss.: L'Esercizio 15 dà un sacco di informazioni sulla media condizionale (di carattere generale, validi cioè non solo per v.a. discrete). **a)** dimostra che la media della media condizionata è la media stessa, cioè, in media, la media condizionata di X dato Y si comporta proprio come la media di X. **b)** prova che quando si vuole calcolare il valor medio della media condizionale $\mathbb{E}(X \mid Y)$ ristretto ad una funzione della sola Y basta considerare la restrizione della X. Infine, da **d)** segue che la media condizionale di X dato Y rappresenta la funzione di Y che "meglio approssima" la v.a. X nella classe delle v.a. che sono funzioni di Y e che hanno momento secondo finito.

Esercizio 16. Sia $a > 1$ un parametro fissato e sia X una v.a. di densità discreta

$$p_X(x) = \frac{c}{x^a} 1\!\!1_{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}},$$

dove $c > 0$ è una costante opportuna.
X ha media? Ha varianza? Ha momento di ordine k finito? Esiste $a > 1$ tale che X possiede momento finito di qualsiasi ordine?

Esercizio 17. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilià.

a) Fissato $k = 1, 2, \ldots$, sia

$$L^k_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ t.c. } X \text{ è v.a. discreta ed esiste } \mathbb{E}(|X|^k)\}.$$

Dimostrare che $L^k_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio vettoriale e che per ogni $1 \leq r \leq k$ si ha $L^k_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset L^r_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

b) Consideriamo il caso $k = 2$. Definiamo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (X, Y) \in L^2_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^2_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto \langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY) \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definisce un **prodotto scalare**[1] su $L^2_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e quindi

$$|| \cdot || : X \in L^2_d \mapsto ||X|| = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

è una **norma** su $L^2_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Esercizio 18. Dimostrare che per ogni scelta di $X, Y, X_1, X_2 \in L^2_d(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;

2) $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$;

3) $\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$, per ogni $a \in \mathbb{R}$;

4) $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) \geq 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 0$ se e solo se $X = \alpha$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) $\mathrm{Cov}(X, \alpha) = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[1] Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale, $\langle \cdot, \cdot \rangle : (v, w) \in V \times V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ è un prodotto scalare se valgono le seguenti proprietà: 1. (simmetria) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$; 2. (linearità) $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$; 3. (omogeneità) per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$; 4. (positività e non degenerazione) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

Dedurre che la covarianza è un'applicazione **simmetrica** e **bilineare**:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, cY_1 + dY_2) =& ac\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) + ad\mathrm{Cov}(X_1, Y_2) + \\ &+ bc\mathrm{Cov}(X_2, Y_1) + bd\mathrm{Cov}(X_2, Y_2).\end{aligned}$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ma $\mathrm{Cov}(X, Y)$ non definisce un prodotto scalare su L^2_d: perché?

Esercizio 19. Ricordiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: *se X e Y hanno momento secondo finito allora*

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Nel seguito studiamo il caso in cui vale l'uguaglianza.

a) *Siano X e Y v.a. con momento secondo finito tali che $\mathbb{P}(XY \neq 0) = 1$. Dimostrare che $|\mathbb{E}(XY)| = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$ se e solo $X = \lambda Y$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ (da determinare).*

Come conseguenza, dimostrare il seguente risultato.

b) *Siano X e Y v.a. con momento secondo finito e con varianza positiva. Dimostrare che $|\mathrm{Cov}(X, Y)| = \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ se e solo $X = \lambda Y + c$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, e $c \in \mathbb{R}$ (da determinare).*

[Sugg. per **a)**: lavorare con $\mathbb{E}((X + \theta Y)^2)$ al variare di $\theta \in \mathbb{R}$ e ricordare che se $\mathbb{E}(Z^2) = 0$ allora $Z = 0$.]

Esercizio 20. Siano X e Y v.a. correlate ($\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$) e di varianza positiva. Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta di regressione di Y rispetto a X:

$$g(x) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)}\big(x - \mathbb{E}(X)\big) + \mathbb{E}(Y).$$

Indichiamo con ψ la funzione inversa di g: $\psi(y) = g^{-1}(y)$. Si noti che ψ è lineare, quindi l'equazione $x = \psi(y)$ definisce una retta. È vero (sempre, qualche volta, mai) che ψ è la retta di regressione di X rispetto a Y?

[Sugg.: Si ricorda il punto **b)** dell'Esercizio 19.]

Esercizio 21. Siano X e Y due v.a. bernoulliane di parametro p e $\hat{p}$ rispettivamente. Dimostrare che X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Generalizzare tale proprietà per X e Y v.a. che possono assumere solo due valori: $E_X = \{x_1, x_2\}$ e $E_Y = \{y_1, y_2\}$, con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

[Sugg.: Per la seconda parte, si può tenere conto delle v.a. ausiliarie $U = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$ e $V = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}$.]

Esercizio 22. Siano X e Y due v.a. a valori in $E_X = \{-2, 1\}$ e $E_Y = \{-1, 0, 2\}$ rispettivamente, con distribuzione congiunta descritta tramite la seguente tabella:

	$X = -2$	$X = 1$	
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$Y = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
$Y = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Mostrare che $\text{Cov}(X,Y) = 0$ e che X e Y non sono indipendenti. Dedurre che, in generale, covarianza nulla **non** implica indipendenza.

Esercizio 23. Siano X e Y due v.a. indipendenti t.c. X,$Y \sim \text{Po}(\lambda)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la covarianza tra X e $Z^{\alpha,\beta} = \alpha\, X + \beta\, Y$. Stabilire il tipo di dipendenza tra X e $Z^{\alpha,\beta}$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[Sugg.: non utilizzare la distribuzione congiunta di X e $Z^{\alpha,\beta}$; piuttosto, si consideri che $Z^{\alpha,\beta} = \alpha\, X + \beta\, Y$...]

b) Disegnare la retta di regressione di $Z^{\alpha,\beta}$ rispetto a X.

Esercizio 24. Fissate X_1, X_2, X_3 v.a. i.i.d. con distribuzione

$$p(1) = \frac{1}{2} = 1 - p(-1),$$

siano $U = X_1\, X_2$ e $V = X_1\, X_3$.

a) Calcolare la retta di regressione di V rispetto a U.

b) Le v.a. U e V sono indipendenti?

c) Calcolare la distribuzione congiunta di U e V.

Esercizio 25. Sia X una v.a. con densità discreta

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1-p)^{|x|-1} p & \text{se } x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definiamo $Z = 1\!\!1_{\{X \geq 0\}} - 1\!\!1_{\{X<0\}}$ e $W = |X|$.

a) Calcolare la legge congiunta di Z e W. Z e W sono indipendenti?

b) Calcolare la legge e la media condizionale di W dato $Z = z$.

c) Studiare la dipendenza tra X e Z; disegnare la retta di regressione di Z rispetto a X.

d) Calcolare la media condizionale di X dato che $Z = -1$.

Esercizio 26. Una moneta che dà testa con probabilità $p \in (0,1)$ viene lanciata 6 volte. Sia $X_i = 1\!\!1_{A_i}$, dove A_i denota l'evento *all'i-esimo lancio esce testa*, $i = 1, \dots, 6$. Definiamo:

$$Y = \sum_{i=1}^{2} X_i, \quad Z = \sum_{i=3}^{4} X_i, \quad W = \sum_{i=5}^{6} X_i, \quad T = Y + Z, \quad U = Z + W.$$

a) Calcolare la covarianza tra T e U. T e U sono indipendenti?

b) Calcolare la media e la varianza di T.

c) Calcolare la media e la varianza di $2T + 1$.

d) Calcolare la covarianza tra $2T + 1$ e $3U$.

Esercizio 27. Un dado equo viene lanciato due volte. Sia X il risultato del primo lancio e Y il massimo risultato ottenuto nei due lanci.

a) Calcolare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali di X e Y.

[Sugg.: potrebbe essere utile ricordare che:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.]

b) Calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Che tipo di dipendenza c'è tra X e Y?

c) Disegnare la retta di regressione di Y rispetto a X.

d) Stimare il numero di volte in cui occorre lanciare il dado affinché con probabilità minore di 0.2 la media aritmetica dei risultati disti da 3.5 (cioè dal valore atteso) per più di 0.1.

Esercizio 28. Una moneta dà testa con probabilità p incognita. Per avere informazioni su p, la moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale di teste uscite su n lanci. Volendo approssimare p con tale percentuale,

a) quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso sia al più 0.1?

b) E quanto deve essere grande n affinché con probabilità maggiore di 0.9 l'errore commesso sia al più 0.01?

Qualcuno sostiene che occorrano più lanci per vedere soddisatta la prima condizione, perché la probabilità richiesta è maggiore. Cosa ne pensate?

[Sugg.: si usi la disuguaglianza di Chebycev.]

Esercizio 29. Un dado viene lanciato n volte. Sia S_n in numero di volte, su n lanci, in cui si osserva che è uscito 6. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n} S_n > 2)$.

[Sugg.: si ricorda la legge dei grandi numeri...]

Esercizio 30. Siano X e Y v.a. indipendenti, $X \sim \mathrm{Geomod}(\frac{1}{2})$ e $Y \sim \mathrm{Po}(\frac{1}{2})$. Sia $\{U_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tutte con la stessa legge di $U = X - 2Y$. Stimare n affinché la v.a. $S_n = U_1 + \ldots + U_n$ non superi il livello $3n$ con probabilità almeno 0.9.