Primo esonero di Probabilità e Statistica
a.a. 2024/2025
24 Aprile 2025

Esercizio 1. [*Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ad hoc*] Un dado equilibrato viene lanciato tre volte. Qual è la probabilità di ottenere tre numeri consecutivi?

Esercizio 2. Una moneta equa viene lanciata 5 volte. Successivamente, un'urna $\mathcal{U}$ viene riempita con un numero di palline rosse pari al numero di teste ottenute e con un numero di palline gialle pari al numero di croci osservate.

a) Da $\mathcal{U}$ viene estratta una pallina: qual è la probabilità che sia rossa?

b) Qual è la probabilità che i lanci della moneta abbiano prodotto 2 teste se da $\mathcal{U}$ è stata estratta una pallina rossa?

c) Da $\mathcal{U}$ vengono eliminate 3 palline: qual è la probabilità che siano tutte rosse?

Esercizio 3. Siano X e Y v.a. discrete con densità congiunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} \, \mathbb{1}_{x,y \in \mathbb{N}, y \geq x},$$

dove $\lambda > 0$.

a) Calcolare $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq X+1)$.

b) Calcolare $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

c) Posto $Z = Y - X$, dimostrare che X e Z sono indipendenti.

d) Studiare la dipendenza tra X e Y.

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 \leq 1$. Posto $Z_n = X_1 + \cdots + X_{3n}$, $n \geq 1$,

a) dimostrare che $\frac{1}{n} Z_n \xrightarrow{P} 3$ per $n \to \infty$;

b) determinare n affinché per ogni σ^2 si abbia $\mathbb{P}(-n < Z_n < 5n) \geq 0.99$.