

Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2024/2025

L. Caramellino

Lorenzo Dello Schiavo

03/03/2025 - Lezioni 1, 2 [Caramellino]

Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ -algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Esempi. La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4]

05/03/2025 - Lezioni 3, 4, 5 [Caramellino]

Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come “nuova” misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

06/03/2025 - Lezioni 6, 7, 8 [Caramellino]

Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5, 1.6]

10/03/2025 - Lezioni 9, 10 [Caramellino]

Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli, legge binomiale) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica). Esempi ed esercizi. Comportamento asintotico della legge ipergeometrica.

[cfr. Baldi, Par. 1.6]

12/03/2025 - Tutorato 1 (3 ore) [Caramellino/ Dello Schiavo]

[cfr. Team del corso]

14/03/2025 - Lezioni 11, 12, 13 [Caramellino]

Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. Legge di una variabile aleatoria. Variabili aleatorie discrete. Densità discreta. Esempi: v.a. bernoulliane (funzione indicatrice), binomiali e ipergeometriche.

[cfr. Baldi, Par. 2.1, 2.2]

17/03/2025 - Lezioni 14, 15 [Caramellino]

Legge geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi. Esistenza di una v.a. con densità discreta data. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Caratterizzazione della legge geometrica come unica legge discreta senza memoria.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

19/03/2025 - Lezioni 16, 17, 18 [Caramellino]

La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. Esempi ed esercizi. Funzioni di ripartizione: definizione e proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3]

20/03/2025 - Lezioni 19, 20, 21 [Caramellino]

V.a. discrete m -dimensionali: densità congiunta e marginali. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. La legge uniforme. Esempi ed esercizi sull'uso della densità (discreta) congiunta. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: equivalenza fra indipendenza e fattorizzazione della densità congiunta nel prodotto delle densità marginali. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

24/03/2025 - Lezioni 22, 23 [Caramellino]

Densità condizionale. Esempi ed esercizi. Funzioni di variabili casuali, indipendenza e calcolo delle densità. Indipendenza di $\Phi(X)$ e $\Psi(Y)$ quando X e Y sono indipendenti, per ogni funzione Φ e Ψ .

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

26/03/2025 - Tutorato 2 (3 ore) [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

27/03/2025 - Lezioni 24, 25, 26 [Caramellino]

Calcoli con le densità. La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti. Esercizi. Esempio: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p ; somma di v.a. di Poisson. Legge del max e del min di v.a. indipendenti. Esempi ed esercizi.

Definizione di speranza matematica per v.a. discrete. La media aritmetica come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. Linearità della media.

[cfr. Baldi, Par. 2.5, 2.6]

31/03/2025 - Lezioni 27, 28 [Caramellino]

Le proprietà della speranza matematica: monotonia/positività; esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita; in particolare, esistenza nel caso di v.a. limitate. Calcolo della speranza matematica delle seguenti leggi: uniforme in un insieme finito (media aritmetica), bernoulliana (caso particolare: funzione indicatrice), binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata, di Poisson. L'identità di Wald (media di somme aleatorie).

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

02/04/2025 - Lezioni 29, 30, 31 [Caramellino]

Fattorizzazione della media nel caso di v.a. indipendenti e caratterizzazione delle v.a. indipendenti tramite fattorizzazione della media per funzioni limitate ($X \perp\!\!\!\perp Y$ sse per ogni funzione φ, ψ limitate si ha $\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$). La media condizionale $\mathbb{E}(X | Y = y)$ e la v.a. media condizionale $\mathbb{E}(X | Y)$. Esercizi.

Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k . Conseguenze: la definizione di momento centrato ben posta; equivalenza tra esistenza del momento k -esimo e del momento centrato di ordine k . Il caso $k = 2$: definizione di varianza. La varianza come indicatore della “dispersione” intorno alla media. La disuguaglianza $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$. L’equivalenza tra $\text{Var}(X) = 0$ e l’esistenza di una costante c tale che $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

[cfr. Baldi, Par. 2.6, 2.7]

03/04/2025 - Lezioni 32, 33, 34 [Caramellino]

Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson, geometrica e geometrica modificata. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.6, 2.7]

07/04/2025 - Lezioni 35, 36 [Caramellino]

Coefficiente di correlazione. La retta di regressione; significato di “dipendenza positiva” e “dipendenza negativa” in termini del segno della covarianza. Esempi ed esercizi.

La convergenza in probabilità e la legge (debole) dei grandi numeri per v.a. discrete. La disuguaglianza di Chebycev per determinare la velocità di convergenza nella LDGN. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 2.7, 2.8]

09/04/2025 - Lezioni 37, 38, 39 [Caramellino]

Esercizi di preparazione all’esonero.

10/04/2023 - Tutorato 3 (3 ore) [Caramellino]

[cfr. Team del corso]

14/04/2025 - Lezioni 40, 41 [Caramellino]

Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme; legge esponenziale e proprietà di assenza di memoria; legge di Weibull.

[cfr. Baldi, Par. 3.1]

16/04/2025 - Lezioni 42, 43, 44 [Caramellino]

Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di X^2 e di $aX + b$, $a \neq 0$, quando X ha densità continua. La legge del max

e del min di due v.a. indipendenti ed assolutamente continue. Vettori aleatori a.c. di \mathbb{R}^d : densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e rappresentazione in termini di integrale. V.a. assolutamente continue e indipendenti: fattorizzazione della densità nel prodotto delle densità marginali. Viceversa, se la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna da una sola variabile allora le v.a. sono indipendenti. Esercizi sul calcolo di densità congiunte.

[cfr. Baldi, Par. 3.2, 3.3]

17/04/2025 - Lezioni 45, 46, 47 [Caramellino]

La legge uniforme su un insieme di \mathbb{R}^2 di misura positiva e finita. Esempi. Densità della somma di v.a. che hanno densità continua congiunta. La legge gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e le proprietà (in particolare, se $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ allora $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$). Calcoli con densità congiunte: uso del teorema del cambio di variabile (TCV) per calcolare la densità di $\phi(X)$ quando X è una v.a. con densità e ϕ è diffeomorfismo. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Versione bis dell'uso del TCV: basta che le restrizioni di ϕ a n aperti O_1, \dots, O_n a due a due disgiunti siano dei diffeomorfismi e che $\mathbb{P}(X \in O_1 \cup \dots \cup O_n) = 1$. Esempi ed esercizi. La legge gaussiana standard.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4, 3.6, 37]

23/04/2025 - Lezioni 48, 49, 50 [Caramellino]

Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Le proprietà. Esempi: speranza matematica della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana standard. Momenti e momenti centrati. Varianza. Esempi: varianza della legge uniforme, della legge gamma ed esponenziale, della legge gaussiana standard. Matrice di covarianza e proprietà. Calcolo della matrice di covarianza di una trasformazione lineare affine.

[cfr. Baldi, Par. 3.5, 3.6]

24/04/2025 - Primo esonero

[cfr. Team del corso]

28/04/2025 - Lezioni 51, 52 [Caramellino] e consegna tutorato 4

Legge normale $N(\mu, \sigma^2)$: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media, della varianza e della funzione di ripartizione usando la standardizzazione. I quantili della legge gaussiana ed esercizi. Legge del quadrato di una gaussiana standard e legge della somma dei quadrati di n gaussiane standard e indipendenti: la legge Chi-quadro con n gradi di libertà. Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale,

[cfr. Team del corso e Baldi, Par. 3.6, 3.13]

28/04/2025 - Lezioni 53, 54, 55 [Caramellino]

La f.c. della legge Gamma. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; la f.c. delle coordinate di un vettore aleatorio; il legame tra la derivabilità della f.c. ed i momenti (s.d.). La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); uso della f.c.

per dimostrare che una trasformazione lineare di gaussiane indipendenti ha legge gaussiana.
Caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.13]