

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2024/2025

03/10/2024 - 3 ore

Introduzione ai due problemi fondamentali in finanza: prezzo e copertura di opzioni.

[cfr. seminario ScienzaOrienta]

07/10/2024 - 3 ore

Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Introduzione al teorema di Girsanov. Risultati preliminari sulla “martingala esponenziale complessa”.

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1 (in particolare, Proposizione 12.1); Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

10/10/2024 - 3 ore

Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane, con parte della dimostrazione.

[cfr. Baldi, Par 12.3, 12.4; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

14/10/2024 - 3 ore

Conclusione della dimostrazione del TRMB. Conseguenza 1: se $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t \leq T} |M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala browniana e, a meno di una costante, si rappresenta come integrale stocastico di un processo in $M^2[0, T]$. Conseguenza 2: caratterizzazione delle misure equivalenti a $\mathbb{P}$ su $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$ (B = browniano, $\mathcal{N}$ = insiemi di misura nulla).

Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche. In particolare, teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p , markovianità della soluzione, generatore infinitesimale, formula di Ito con uso del generatore infinitesimale.

[cfr. Baldi, Par 12.3, 12.4 e Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 (vd esercizio 15, punto 1)]

17/10/2024 - 3 ore

Il modello di Black e Scholes. Strategie di mercato e portafoglio associato; strategie autofinanzianti. Prezzo e portafoglio scontati. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili. Opzioni e strategie replicanti.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4.]

21/10/2024 - 3 ore

Teorema di completezza del modello Black e Scholes (replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro). Conseguenza: prezzo (di non arbitraggio) delle opzioni

europee. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante). La formula di parità per opzioni call/put nel modello di Black e Scholes e le formule per il prezzo delle opzioni call e put. Le Greche di un'opzione.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4.]

24/10/2024 - 3 ore

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo. Il modello di Garman-Kohlaghen (opzioni su valute): discussione preliminare.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 1 e 2]

31/10/2024 - 3 ore

Il modello di Garman-Kohlaghen (opzioni su valute). Opzione composta call su call: discussione preliminare.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 2 e 5]

04/11/2024 - 3 ore

Opzione composta call su call.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 5]

07/11/2024 - 3 ore

Il modello di Black e Scholes bivariato e opzione di scambio tra due sottostanti.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 3]

11/11/2024 - 3 ore

Opzione asiatica nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7]

21/11/2024 - 3 ore

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in $\mathbb{R}^d$, il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione in termini di portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. La misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$. CN per l'esistenza della misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$. Il moto browniano sotto $\mathbb{P}^*$. Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala $\mathbb{P}^*$ e il sistema lineare per la determinazione della densità di $\mathbb{P}^*$ rispetto a $\mathbb{P}$. Prezzo di “non arbitraggio” per un'opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo di un'opzione replicabile dalla misura equivalente di martingala rispetto alla quale è replicabile.

[cfr. Baldi, Par. 13.4]

25/11/2024 - 3 ore

Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.

Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura equivalente di martingala.

[cfr. Baldi, Par. 13.4, 13.5]

25/11/2024 - 3 ore

La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza (e l'eventuale unicità) della misura equivalente di martingala. Teorema classico di completezza del mercato.

[cfr. Baldi, Par. 13.6]

28/11/2024 - 3 ore

Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; l'EDP parabolica associata e la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: cambio di variabile e legame con le soluzioni di EDP paraboliche.

[cfr. Baldi, Par. 13.6]

02/12/2024 - 3 ore

Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): il teorema di esistenza ed unicità (s.d.) e la formula di rappresentazione per la soluzione. EDP paraboliche con problema di Cauchy su $\mathbb{R}^m$: il teorema di esistenza ed unicità (s.d.) e la formula di Feynman-Kac per la rappresentazione della soluzione.

[cfr. Baldi, Par. 13.6, 10.3]

05/12/2024 - 3 ore

Dimostrazione della formula di Feynman-Kac. Uso della formula per determinare le condizioni sul tasso di interesse, sulla volatilità e sulla funzione-payoff affinché la funzione-prezzo sia soluzione regolare dell'EDP parabolica associata e, quindi, sia regolare quanto basta per il calcolo della copertura.

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IF di output.

[cfr. Baldi, Par. 10.4; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1]

09/12/2024 - 3 ore

Il generatore di Box-Muller per v.a. gaussiane. Simulazione del moto browniano. Simulazione del moto browniano geometrico.

Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza al crescere del numero di simulazioni. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma. Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup/inf su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ (stimatore Monte Carlo distorto).

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

12/12/2024 - 3 ore

Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (b) formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di "parità" per la validazione dei programmi.

Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.3, 3.1.4]

16/12/2024 - 3 ore

Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: lo stimatore Monte Carlo distorto basato sul metodo delle differenze finite (uso delle differenze finite centrate) e lo stimatore non distorto basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione (pesi *à la Malliavin*). Copertura dinamica.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.2, 3.3]

18/12/2024 - 3 ore

Panoramica sui tre temi di approfondimento: opzioni americane; mercati obbligazionari e tassi di interesse; calcolo di Malliavin e uso in finanza.